INTRODUÇÃO DO LIVRO "SET THEORY"DE CHARLES PINTER - TRADUÇÃO: J. A. VERDERESI E C. A. KNUDSEN - REVISÃO: I. F. DRUCK.

Embora a teoria dos conjuntos seja reconhecida como a pedra angular da "moderna" matemática, nada existe de essencialmente novo na ideia intuitiva de um conjunto.

Desde os mais remotos tempos, os matemáticos têm sido levados a considerar conjuntos de objetos de uma espécie ou de outra, e as noções elementares da moderna teoria dos conjuntos estão implícitas na grande maioria dos argumentos clássicos. No entanto, não foi senão na última parte do século XIX, no trabalho de Georg-Cantor (1845 - 1918), que os conjuntos foram reconhecidos como o objeto principal de uma teoria matemática.

Estranhamente, foi seu trabalho em um campo altamente técnico de séries trigonométricas que primeiro levou Cantor a estudar as propriedades dos conjuntos. Primeiramente limitou-se a certos conjuntos particulares de números reais que ocorriam em conexão com a convergência de séries. Mas Cantor rapidamente percebeu que suas descobertas aplicavam-se a conjuntos reais gerais; numa série de publicações memoráveis publicadas entre 1873 e 1897 ele passou progressivamente dos problemas concretos, os quais haviam iniciado seu pensamento sobre conjuntos, dirigindo-se para os poderosos conceitos gerais sobre os quais reside a teoria dos conjuntos atualmente.

O mais arrojado passo dado por Cantor, aos olhos de seus contemporâneos, foi o uso de conjuntos infinitos, os quais ele considerava de maneira tão natural como o uso de conjuntos finitos. O problema de "infinitude" havia sido um dos mais sensíveis problemas dos matemáticos.

O leitor indubitavelmente tem conhecimento do famoso paradoxo de Zenão, no qual um segmento linear unitário é dividido em subintervalos de comprimentos 1/2 1/4 1/8 ... etc. Cada subintervalo - não importa o quão pequeno seja - tem um comprimento determinado não nulo, e existe uma infinidade de subintervalos; donde a aparente conclusão paradoxal de que infinitamente muitos comprimentos não nulos podem ser adicionados para produzir um comprimento finito. De forma a evitar tais empecilhos, os matemáticos clássicos fizeram uma distinção entre infinito atual - no qual uma infinidade de objetos são concebidos como existindo simultaneamente - e o infinito potencial que é simplesmente o potencial que excede qualquer quantidade finita fixa.

O infinito potencial foi tido como seguro, portanto admissível, ao passo que o infinito atual era um tabu. Não é surpreendente então que a teoria de Cantor - com seu desinibido uso dos conjuntos infinitos - não tenha sido imediatamente aceita por seus contemporâneos (a noção de infinito foi obviamente entendida aqui no sentido atual). Ela foi recebida primeiramente com ceticismo, muitas vezes com declarada hostilidade. No entanto por volta de 1890, a parte mais atraente da teoria de Cantor foi amplamente usada para fornecer uma estrutura elegante a uma ampla variedade de teorias matemáticas. Antes do fim do século mesmo os aspectos mais revolucionários da teoria dos conjuntos tinham sido aceitos por uma grande parte dos matemáticos - principalmente porque mostrou ser uma ferramenta indispensável, particularmente em análise.

Nesse meio tempo, o trabalho de vários matemáticos importantes, em particular Dedekind, foi tomando um rumo que levaria a teoria dos conjuntos a desempenhar um papel não só promissor, mas fundamental na unificação da Matemática.

Desde os mais remotos tempos, matemáticos têm pensado na possibilidade da unificação de toda a ciência sob um pequeno número de príncipios básicos. Muitas das escolas antigas, de Euclides até a Idade Média, sustentavam que as várias partes da Matemática estavam subordinadas à geometria (números poderiam ser concebidos como proporções entre segmentos). Uma tentativa mais bem sucedida de unificação veio no século XIX, quando o trabalho de Weierstrass, Dedekind e outros, sugeriu que toda a matemática clássica seria derivada da aritmética dos números racionais: assim o estudo de números reais é redutível ao estudo dos números racionais, como os números racionais podem ser vistos facilmente como pares de números inteiros, finalmente a matemática dos números reais - que inclue o cálculo (via geometria analítica) e toda geometria - pode ser baseado nos números naturais.

Foi neste ponto crucial da evolução das ideias sobre os Fundamentos da Matemática que Dedekind, em seu pequeno livro "Was send und eas sollen die Zahlen" (1888), revelou que o conceito de números naturais pode ser derivado de príncipios básicos de Teoria dos Conjuntos. Modernamente para mostrar isto temos o seguinte: tomaremos "0" como sendo o conjunto vazio (isto é, o conjunto sem elementos, denotado por $\emptyset$), "1" é definido como o conjunto $\{0\}$, isto é, o conjunto (de conjuntos) contendo o único elemento $\emptyset$. Então "2" é definido como sendo o conjunto $\{0, 1\}$; "3" é definido como $\{0, 1, 2\}$ e assim por diante.

Todas as propriedades dos números naturais podem ser provadas usando estas definições e teoria elementar dos conjuntos.

No início do século XX, então, a teoria dos conjuntos não somente fora aceita como um fundamento indispensável por uma grande parte da comunidade, como também se tornou uma séria concorrente à posição de primazia entre as ciências matemáticas.

Ironicamente, depois de muito tempo em que as ideias de Cantor pareciam finalmente ter ganho aceitação, o primeiro de certos paradoxos foi anunciado, o qual eventualmente depositaria suas dúvidas sobre a solidez das bases da teoria dos conjuntos em suas formas cantorianas. Estes paradoxos tiveram tão amplas repercusões que vale a pena olhá-lhos com algum pormenor.

OS PARADOXOS

Entre 1895 e 1910 um número de contradições foi descoberto em vários pontos da teoria dos conjuntos. No início, os matemáticos deram pouca atenção a eles, aceitavam os paradoxos e os consideravam não mais que uma pequena curiosidade matemática. O mais antigo dos paradoxos foi publicado por Burali-Forti em 1897, mas este tinha sido descoberto já por Cantor, dois anos antes. Desde que o paradoxo de Burali-Forti apareceu num contexto técnico da teoria dos conjuntos, esperava-se, de início, que uma pequena alteração das definições básicas seriam suficientes para corrigí-los. No entanto, em 1902, Bertrand Russel deu uma versão do paradoxo a que envolve os aspectos mais elementares de teoria dos conjuntos e, portanto, não poderia ser ignorada. Nos anos seguintes outras contradições foram descobertas, as quais pareciam desafiar muitas das noções "seguras" dos matemáticos.

Os "paradoxos" da teoria dos conjuntos são de duas espécies diferentes: uma é a dos paradoxos lógicos, a outra é a dos paradoxos semânticos. A razão dos nomes "lógicos" e "semânticos" tornar-se-á clara para nós depois de alguns exemplos destes paradoxos. Essencialmente os paradoxos lógicos provêm de uma lógica imperfeita, sendo que os paradoxos semânticos vêm do uso imperfeito da linguagem.

Dedicaremos o resto desta seção a apresentar dois paradoxos dos mais célebres, que envolvem somente conceitos elementares de teoria dos conjuntos. O primeiro é lógico e o segundo semântico; ambos podem ser considerados como típicos de suas espécies.

O mais simples dos paradoxos lógicos é o paradoxo de Russel, que pode ser descrito como segue:

Se A é um conjunto, seus elementos podem ser êles próprios conjuntos: esta situação ocorre frequentemente em Matemática. Por exemplo, A pode ser um conjunto de retas, e cada reta pode ser vista como um conjunto de pontos. Assim surge a possibilidade de que A possa a ser um elemento de si mesmo; por exemplo, se A é o conjunto de todos os conjuntos então A é um elemento de si mesmo.

Seja então S o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos.

Pergunta: É S um elemento de S?

Bem, se S é um elemento de S então, pela definição de S, S não é um elemento de S. Se S não é um elemento de S, então (pela própria definição de S) S é um elemento de S.

Assim provamos que S é um elemento de S se e somente se S não é um elemento de S. Uma contradição das mais elementares.

Normalmente em Matemática quando encontramos uma contradição desta espécie somos forçados a admitir que uma de nossas hipóteses estava errada. Neste caso, somos levados a concluir que é sem sentido falar de um conjunto como um elemento de si mesmo, ou que não existe um objeto descrito por “conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos”. Retornaremos a esta questão logo mais, neste interim falaremos em poucas palavras sobre os paradoxos semânticos.

Típico dos paradoxos semânticos é o paradoxo de Berry.

Para o sucesso do paradoxo, admitiremos que todas as palavras do português estejam catalogadas em um dicionário. Seja T o conjunto de todos os números naturais que podem ser descritos com menos de vinte palavras da língua portuguesa. Desde que existe um número finito de palavras, existe somente um número finito de combinações com menos de vinte de tais palavras. - Isto é, T é um conjunto finito - obviamente, existe um único natural maior que qualquer elemento de T, assim, existe, o menor número natural que não pode ser descrito com menos de vinte palavras da língua portuguesa.

Por definição este número não está em T, mas desde que ele foi descrito por 16 palavras ele deve estar em T.

Novamente estamos face a face com uma clara contradição. Se o argumento acima fosse irrepreensível, se admitíssemos a existência do conjunto T, seríamos levados irrevogavelmente à conclusão de que um conjunto tal como T simplesmente não pode existir.

Antes dos paradoxos, a questão da existência de conjuntos nunca tinha sido colocada. Cantor definiu um conjunto como sendo “uma coleção de objetos definidos e distinguíveis de nossa percepção que podem ser concebidos como uma totalidade”. Mais precisamente Cantor e seus primeiros seguidores aceitavam a noção “senso comum” que se pudéssemos descrever uma propriedade sobre objetos, poderíamos também falar do conjunto de todos os objetos possuindo esta propriedade. Os paradoxos tinham o singular mérito de mostrar que tal concepção ingênua dos conjuntos é inadequada - pelo simples fato de que certas “propriedades” levam a conjuntos paradoxais.

Nos vários movimentos que surgiram no início do século XX com o objetivo de revisar os fundamentos da Teoria dos Conjuntos, o tópico central foi o da existência de conjuntos.

- Que propriedades definem legitimamente um conjunto?
- Sob que condições propriedades definem conjuntos totalmente?
- Como poderiam ser formados novos conjuntos a partir daqueles existentes?

MÉTODO AXIOMÁTICO

O aparecimento dos paradoxos marcou o começo de uma crise nos Fundamentos da Matemática os quais não estão completamente resolvidos até nossos dias. Tornou-se bastante claro que a concepção matemática de um conjunto, como encarada nas definições de Cantor, não oferece uma base satisfatória para a teoria dos conjuntos - muito menos para a matemática em sua totalidade. Tentativas menores para eliminar os paradoxos pela exclusão de tipos específicos de conceitos e definições fracassaram; nada menos que um enfoque inteiramento novo foi necessário.

Começando por volta de 1905, várias maneiras de se tratar o problema foram propostas e desenvolvidas por seus adeptos; a maioria delas pode ser classificada em três grandes grupos: as escolas **formalista**, **logicista** e **intuicionista**. O resto desta seção estará empenhada na apresentação destes três caminhos de pensamentos. Primeiramente, entretanto, faremos uma breve revisão sobre o desenvolvimento do método axiomático.

O método axiomático surge em matemática de uma forma altamente desenvolvida por volta de 300 A. C. com o aparecimento dos "Elementos de Euclides". Ainda que o método axiomático popularizado por Euclides tenha se tornado um fato característico de qualquer parte da matemática atual, somente nos anos recentes foi aplicado fora da Geometria. Por esta razão nossa moderna compreensão do método axiomático, e mais geralmente do método dedutivo, surgiu em grande parte dos estudos no domínio da geometria.

Assim é digno enunciar um pouco do grande desenvolvimento em Geometria que influenciou o crescimento do método axiomático.

Para Euclides e seus contemporâneos, os postulados e os axiomas representavam "verdades" cuja validade estava fora de questão. Por exemplo, foi esta crença absoluta na verdade das proposições geométricas que levou à controvérsia mais que milenar sobre o "postulado das paralelas de Euclides". Este postulado afirma que se duas retas A e B interceptam uma terceira reta C, e se a soma dos ângulos interiores que A e B formam com C for menor que dois ângulos retos, então A e B interceptam-se. Este postulado, apesar de parecer uma "verdade óbvia", mereceu um enunciado mais complexo, faltando a simplicidade dos demais axiomas e postulados da geometria Euclidiana. Por esse fato, até por volta de 1700, sucederam-se vãs tentativas para prová-lo a partir das restantes suposições. Somente em meados do século XIX a questão foi resolvida, quando Bolyai e Lobachevski, cada um destes substituindo o postulado das paralelas por proposições que o contradizem, desenvolveram geometrias não euclidianas. As geometrias não euclidianas mostraram-se não menos consistentes que a geometria euclidiana, desde que elas poderiam ser interpretadas na geometria euclidiana (isto é, reinterpretando adequadamente "pontos", "retas", "ângulos", e assim por diante, os postulados de Bolyai e Lobachevski tornam-se verdadeiros na Geometria euclidiana).

Assim não somente o postulado das paralelas é independente dos outros axiomas e postulados de Euclides, mas, alternativamente, geometrias igualmente consistentes podem ser encontradas, as quais não descrevem o espaço de nossa experiência diária.

Com isto veio o reconhecimento de que os axiomas não são "verdades universais" mas proposições que desejamos usar como premissas em um argumento.

Talvez o maior defeito nos "Elementos" seja o número de proposições implícitas feitas por Euclides - proposições não garantidas pelos postulados (os chamados "lemas ocultos"). Por exemplo, em uma certa prova supõem-se que dois círculos, cada qual passando pelo centro do outro, tenham dois pontos em comum - ainda que os postulados não garantam a existência dos mesmos. Do mesmo modo, Euclides fala de um ponto entre dois, ainda que não tenha definido "estar entre" ou postulado qualquer coisa com esta propriedade. Outros argumentos nos Elementos envolvem o conceito de movimento rígido - conceito não definido ou mencionado nos postulados. Assim, através de Euclides, a sistemática cadeia de referências lógicas, é frequentemente rompida pela ajuda tácita de evidências visuais. Com a descoberta destas falhas, principalmente no século XIX, tornou-se consenso que os argumentos matemáticos necessitavam ser feitos sem a mediação de intuição especial ou outras quaisquer; que certos objetos e relações (tais como "pontos", "retas", "estar entre") necessitam ser considerados como noções indefinidas e suas propriedades totalmente especificadas; que dedução é, de maneira essencial, independente do significado dos conceitos. Em 1882, M. Pasch publicou a primeira formulação da geometria na qual a exclusão de qualquer apêlo à intuição é claramente tomada como uma meta e sistematicamente executada.

Pelo fim do século XIX, então, uma moderna concepção do método axiomático começou a surgir. Em linhas gerais não diferia das idéias assumidas por Euclides: uma teoria matemática é axiomática se certas proposições são selecionadas como axiomas e todas as restantes são derivadas dos axiomas por <u>inferências lógicas</u>. No entanto, havia uma nova compreensão da natureza formal de uma prova matemática. Tanto, quanto possível, os axiomas seriam suficientemente detalhados e as regras de dedução lógicas suficientemente explícitas, de modo que nem inteligência ou intuição fossem necessárias para conduzir passo a passo uma prova. Idealmente deveria ser possível um computador verificar se uma prova é correta ou não.

Desde que a matemática seja formulada em linguagem comum, tal como o português, o entendimento humano é indispensável para integrar proposições e encontrar a estrutura de sentenças complexas. Assim, se nossa intuição deve ser abolida das provas matemáticas, um pré-requisito essencial é o desenvolvimento de uma linguagem matemática formal.

As regras desta linguagem devem ser precisamente codificadas de modo que toda sentença seja não ambígua e sua estrutura clara. A criação de uma linguagem simbólica e formal foi um dos mais importantes desenvolvimentos da matemática moderna; vejamos como é uma tal linguagem.

A maior parte das sentenças matemáticas básicas são como estas:

"X é paralelo a Y"
"Y está entre x e z"
"X é um conjunto aberto", <u>etc</u>.

Estas são afirmações sobre <u>um objeto</u>, um <u>par de objetos</u>, ou de forma geral sobre uma <u>n-upla de objetos</u>. Estas proposições são chamadas <u>predicados elementares</u> e, as letras X, Y, x, y, z são chamadas <u>variáveis</u>.

É conveniente denotar um predicado por uma única <u>letra</u> seguida por uma lista de suas variáveis. Deste modo "X é paralelo a Y" pode ser escrito "$A(X,Y)$", y está entre x e z pode ser escrito $B(x,y,z)$ e assim por diante. Um estudante com maturidade está ciente do fato de que o "significado" de um predicado é imaterial no processo de raciocínio matemático. Exemplificando, o "significado" da palavra "paralela" não é importante no decorrer de um argumento geométrico, tudo que importa é a relação entre a sentença "X é paralela a Y" e outras sentenças tais como "X intercepta V" e "Y é perpendicular a Z". Por esta razão predicados elementares são também chamadas fórmulas atômicas. Cada um deles é um todo "indivisível", não cabe analisá-los, são somente distintos uns dos outros.

Um fato importante que conhecemos é que todo ramo da Matemática existente requer somente um número finito (em geral muito pequeno) de predicados elementares distintos. Por exemplo, toda proposição da geometria Euclidiana pode ser expressa por meio dos seguintes predicados básicos:

$$
\begin{array}{ll}
 & P(x) : x \text{ é um ponto} \\
 & R(x) : x \text{ é uma reta} \\
(1) & E(x,y,z) : y \text{ está entre } x \text{ e } z \\
 & I(x,y) : x \text{ é igual a } y \\
 & M(x,y) : x \text{ é membro de } y \ (x \text{ pertence a } y) \\
 & C(u,v,x,y)\text{: o seg } uv \text{ é congruente ao seg } xy \\
 & D(u,v,w,x,y,z)\text{: o ang } uvw \text{ é congruente ao ang } xyz
\end{array}
$$

Teoria dos conjuntos como veremos pode ser formulada inteiramente em termos de um predicado $\in (x,A)$ ou $x \in A$ ou x pertence a A.

Somente predicados não são suficientes para expressar todas as proposições da matemática, do mesmo modo que somente substantivos seriam inadequados para escrever sentenças em Português. Por exemplo, podemos dizer que: se "x é perpendicular a y" e "y é perpendicular a z" então "x é perpendicular a z". Tais proposições são compostas por predicados unidos por meio de conectivos lógicos. Assim se P e Q são proposições em nossa linguagem, então as seguintes também são:

$$
\begin{array}{l}
\neg F : \text{não } F \\
P \vee Q : P \text{ ou } Q \\
P \wedge Q : P \text{ e } Q \\
P \rightarrow Q : P \text{ implica } Q \text{ ou se } P \text{ então } Q \\
P \leftrightarrow Q : P \text{ se e somente se } Q
\end{array}
$$

Finalmente, podemos desejar falar por exemplo que se "x é um ponto" e "y é um ponto" então **existe** um ponto z tq "z está entre x e y". Isto requer o uso de quantificadores. Assim se $P(x)$ é uma proposição com uma variável x então os seguintes são também proposições:

$$
\begin{array}{l}
\forall\, x\ P(x) : \text{para todo } x,\ P(x) \\
\exists\, x\ P(x) : \text{existe } x,\ P(x)
\end{array}
$$

Isto completa nossa linguagem matemática formal. Todo conhecimento matemático pode ser expresso em termos de predicados elementares, conectivos lógicos e quantificadores. Para ilustrar como esta linguagem é usada, tomemos um exemplo simples. A sentença

"Se x e y são pontos distintos, então existe um ponto z entre x e y" pode ser simbolizada como

$$(2) \quad (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg\, I(x,y)) \;\rightarrow\; (\exists z\; P(z) \wedge E(x,z,y))$$

onde o significado dos predicados é dado por (1) acima.

Um dos benefícios, entre os muitos que podem ser derivados do uso de uma linguagem formal, é ser possível descrever precisa e explicitamente o processo de dedução nesta linguagem, definir regras não ambíguas que decidam quando uma sentença T pode ser inferida de uma sentença S. Algumas de tais regras são as seguintes:

(3)
Regra A: De P e $P \rightarrow Q$ inferir Q
Regra B: De P e Q inferir $P \wedge Q$
Regra C: De $\neg(\neg P)$ inferir P
Regra D: De $P(c)$ inferir $\exists\, x\; P(x)$

Estas, e algumas outras, são chamadas de "regras de inferências" da nossa linguagem (As 4 regras dadas no (3) acima, juntamente com 7 regras adicionais compõem o sistema de dedução natural, descrito por Slupecki e Borkowski. Estas 11 regras são suficientes para qualquer argumento lógico válido. Outros sistemas são descritos por Quine e Suppes). Uma dedução formal a partir de premissas dadas é uma sequência de expressões da linguagem formal, onde cada expressão ou é uma premissa ou é derivada de expressões precedentes aplicando uma das regras de inferências.

Exemplo: Consideremos uma linguagem formal com um predicado $L(x,y)$; concordaremos em escrever $x < y$ para $L(x,y)$. O que se segue é uma dedução formal bastante simples nesta linguagem.

Premissas

i) $a < b$
ii) $b < c$
iii) $(a < b) \wedge (b < c) \rightarrow (a < c)$

Teorema: $\exists\, x[(a < x) \wedge (b < x)]$

Prova:

Passos	**Expressão**	**Justificação**
1	$a < b$	Premissa (i)
2	$b < c$	Premissa (ii)
3	$(a < b) \wedge (b < c)$	Passos 1, 2 e Regra B
4	$((a < b) \wedge (b < c)) \rightarrow (a < c)$	Premissa (iii)
5	$a < c$	Passos 3, 4 e Regra A
6	$(a < c) \wedge (b < c)$	Passos 5, 2 e Regra B
7	$\exists x((a < x) \wedge (b < x))$	Passo 6 e Regra D

O leitor notaria que as regras de inferência são aplicadas às expressões de maneira perfeitamente mecânica. Para qualquer intenção ou propósito, as expressões podem ser observadas como sequências de símbolos destituídos de significado; o fato de que eles têm um significado para nós é irrelevante à tarefa de levar a cabo a prova. Assim intuição está totalmente ausente de uma prova matemática formal.

Diz-se que uma teoria axiomática é formalizada se seus axiomas são transcritos em uma linguagem formal (por exemplo, fórmula (2) na pág. 6 é um axioma da geometria plana de Hilbert) e todas as suas provas são provas formais. Mesmo sendo comumente aceito como um ideal, que toda teoria axiomática possa ser desenvolvida formalmente, seria por demais monótono fazer isto sempre. Proposições simbólicas são difíceis de decodificar e provas formais tendem a ser excessivamente longas. Assim os matemáticos, usualmente, satisfazem-se com o fato de que uma teoria axiomática possa ser formalizada e então procedem a desenvolvê-la de maneira informal. Este será nosso procedimento neste curso.

TEORIA AXIOMÁTICA DOS CONJUNTOS

Para a grande maioria dos matemáticos, por volta de 1900, a resposta ao problema apresentado pelos paradoxos foi suprir a teoria dos conjuntos de uma base axiomática. O termo "conjunto" e a relação "é um elemento de" seriam as noções indefinidas de uma tal teoria, do mesmo modo que "ponto" e "reta" são noções indefinidas na geometria; seus significados seriam irrelevantes e suas propriedades seriam dadas formalmente pelos axiomas. Em particular, os axiomas seriam escolhidos de tal maneira que todos os resultados úteis da teoria de Cantor pudessem ser provados, enquanto que os paradoxos não.

A primeira axiomatização da teoria dos conjuntos foi dada por Zermelo em 1908. O sistema de Zermelo, com algumas modificações, devidas a Skolem e a Fraenkel, é amplamente usado até hoje em dia. Zermelo escreveu seu trabalho, antes que os métodos formais tivessem sido amplamente entendidos e aceitos, assim sua teoria não foi escrita em uma linguagem formal, mas é parecida em estilo aos mais velhos tratamentos axiomáticos de geometria.

No sistema de Zermelo, existe uma relação primitiva, denotada pelo símbolo "$\in$"; a expressão "$x \in Y$" é lida "x é um elemento de Y". As variáveis x, y, X, Y, Z, etc., que ocupam lugar do lado direito ou esquerdo do símbolo $\in$ representam objetos que concordamos chamar "conjuntos".

O leitor pode pressentir aqui que existem duas espécies de objetos, a saber, conjuntos e elementos. De fato, esta distinção é desnecessária, pois, por um lado, a relação de pertinência entre elemento e conjunto é uma relação relativa (de fato, a relação elemento-conjunto é precisamente $\in$). Por outro lado, a maioria dos conjuntos em matemática é um conjunto de conjuntos. Por exemplo, na geometria plana analítica, uma reta é um conjunto de pontos, um ponto é um par de números reais (suas coordenadas), um número real é considerado como uma sequência (isto é, um conjunto) de números racionais (ou um corte de Dedekind: um par de subconjuntos de racionais), etc. Assim uma simplificação proveitosa que é feita em teoria axiomática dos conjuntos é considerar elementos de todo conjunto como sendo eles próprios conjuntos; em outras palavras, todo conjunto é considerado como um conjunto de CONJUNTOS. Esta simplificação não tem efeitos prejudiciais, e tem o mérito de reduzir o número de noções primitivas e axiomas da teoria dos conjuntos.

Isto sugere um comentário sobre a notação. Embora seja costume o uso de letras minúsculas e maíusculas como em $x \in Y$, isto não é necessário. De fato, algumas vezes escrevemos coisas como, $x \in y$ e $X \in Y$. Todas as variáveis nestas espressões denotam conjuntos.

Quase todo conjunto que vem ao nosso pensamento é um conjunto constituído por todos os objetos de um tipo especificado - isto é, consistindo de todos os objetos que satisfazem uma dada condição. Este é o caminho mais natural no qual conjuntos aparecem: estamos aptos a descrever uma condição sobre x - simbolizaremos esta condição por $S(x)$ - e somos levados a falar do conjunto de todos os objetos x que satisfazem $S(x)$.

Exemplos:

O conjunto de todos os objetos x que satisfazem a condição "x é um número irracional e $0 \leq x \leq 1$" (isto é, conjunto de todos os números irracionais entre 0 e 1). O conjunto de todos os objetos x que podem ser descritos pela sentença "x é um homem". (Isto é, o conjunto de todos os homens).

Desde que este é o caminho mais natural para o surgimento de conjuntos, é desejável ter um princípio na teoria dos conjuntos, que torne isto possível: dada qualquer condição $S(x)$, formar o conjunto de todos os objetos x que satisfazem $S(x)$. No entanto, como observamos na seção 2, se um tal princípio for dado sem qualquer restrição, somos levados a paradoxos (por exemplo, podemos formar o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos). Então, precisamos engendrar restrições sobre o princípio de forma a eliminar os paradoxos. Zermelo concebeu a seguinte restrição: seja $S(x)$ uma condição sobre x; não podemos formar o conjunto de todos os conjuntos x que satisfazem $S(x)$; mas se A é um dado conjunto nós podemos formar o conjunto de todos os x em A que satisfazem $S(x)$. Então, grosseiramente falando, uma propriedade não pode ser usada para formar um "novo" conjunto, mas somente "separar", de um conjunto A cuja existência já tenha sido assegurada, todos os elementos que satisfazem a dada propriedade.

Zermelo introduziu este princípio como um axioma em seu sistema. Pelo fato de que esta regra separa elementos de um dado conjunto, ela foi chamada de axioma da separação e diz o seguinte:

Seja A um conjunto e $S(x)$ uma propriedade sobre x, que está definida para todo objeto x em A. Então existe um conjunto consistindo exatamente dos elementos x em A satisfazendo $S(x)$.

O conjunto cuja existência é estabelecida pelo axioma da separação é normalmente denotado por

$$\{x \in A \mid S(x)\}.$$

(lê-se: "O conjunto de todos x em A, tal que $S(x)$".)

O leitor deve notar que o sistema de Zermelo não admite formar $\{x \mid S(x)\}$ (o conjunto de todos x tal que $S(x)$) mas para qualquer conjunto A, podemos formar $\{x \in A \mid S(x)\}$.

Como o axioma da separação evita os paradoxos? Vejamos primeiro o que acontece com o paradoxo de Russel. O conjunto crucial no argumento de Russel é o "conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos", que pode ser simbolizado por $\{x \mid x \notin x\}$. Como notamos, este conjunto não pode ser formado no sistema de Zermelo; o melhor que podemos fazer é produzir $\{x \in A \mid x \notin x\}$, onde A é qualquer conjunto, cuja existência possa ser assegurada. Se substituirmos $\{x \mid x \notin x\}$ por $\{x \in A \mid x \notin x\}$ no argumento de Russel, o resultado muda completamente. Assim, se percorrermos os passos do argumento, com S denotando $\{x \in A \mid x \notin x\}$: $S \in S$

é impossível, pois $S \in S$ implica $S \notin S$, uma contradição. Então $S \notin S$. Segue então que $S \notin A$, pois se S estiver em A então (do fato que $S \notin S$) temos $S \in S$ que seria outra contradição. Assim o argumento de Russel meramente prova que se A é qualquer conjunto dado, então o conjunto $\{x \in A \mid x \notin x\}$ não pode ser um elemento de A.

Os outros paradoxos lógicos desaparecem de maneira análoga. Os conjuntos decisivos em todos os paradoxos lógicos têm um tratamento comum: eles são demasiadamente solidários - isto é, são "muito grandes", incluem muita coisa. No paradoxo de Russel é o "conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo"; no paradoxo de Cantor é "o conjunto de todos os conjuntos". O axioma da separação não pode contribuir para a formação destes conjuntos "excessivamente grandes", desde que somente pode formar subconjuntos de conjuntos já existentes.

O problema de evitar os paradoxos semânticos é um tanto mais difícil.

Os conjuntos decisivos nos paradoxos tais como o de Berry não são "tão grandes". A preocupação parece, antes, ser inerente à condição $S(x)$, a qual determina o conjunto. Mesmo a restrição imposta pelo axioma da separação não é uma barreira efetiva. Então, se $S(x)$ designa a sentença "x pode ser descrito com menos que vinte palavras do português", então o conjunto controverso no paradoxo de Berry é $\{x \in I\!N \mid S(x)\}$, onde $I\!N$ denota o conjunto dos números naturais. Este conjunto pode ser formado no sistema de Zermelo, se admitimos $S(x)$ como uma condição permissível sobre x.

Então para evitar os paradoxos semânticos precisamos fazer restrições sobre o tipo de "condições" $S(x)$ que são permissíveis para determinar conjuntos. Zermelo tentou fazer isto estipulando no axioma da separação, que $\{x \in A \mid S(x)\}$ pode ser formado somente se $S(x)$ está definido para todo elemento x em A. No entanto, ao fazer isto, ele somente levantou nova questão: como compreendemos "definido", como determinamos se $S(x)$ está definido? Somos forçados, finalmente, a encarar a questão a qual o leitor atento pode já ter perguntado a si mesmo: o que nós entendemos por uma "condição" $S(x)$, por uma "proposição a respeito de um objeto x"? Não podemos nos contentar em observar o conceito de uma "proposição a respeito de x" como conhecido intuitivamente desde que nosso objetivo agora é axiomatizar a teoria dos conjuntos, isto é, livrá-la de toda dependência da intuição. Zermelo falhou em dar uma resposta satisfatória à esta questão porque não construiu seu sistema em uma linguagem formal. No entanto, em 1922 Skolem e Fraenkel, ambos trabalhando em axiomatizações formais da teoria dos conjuntos, viram um caminho natural para sair do dilema: a "proposição a respeito de x" deve ser simplesmente uma sentença na linguagem formal com uma variável "livre" $x_\circ$.

No sistema de Zermelo existe somente um predicado elementar, denotado por $\in$. Então uma sentença na linguagem formal é uma expressão que pode ser escrita usando somente predicados $x \in Y$, $u \in V$, etc., conectivos lógicos e quantificadores.

Se nós restrigirmos a "propriedade" $S(x)$ que pode ser usada no axioma da separação àquelas que sejam expressáveis na linguagem formal, imediatamente eliminamos todos os paradoxos semânticos. Por exemplo, não existe maneira de escrever a sentença "x pode ser descrito com menos que vinte palavras do português" em termos da linguagem formal. Esta solução - esta maneira de aceitar os paradoxos semânticos - é aceitável de um ponto de vista matemático, não obstante está longe de uma solução filosoficamente ideal. Podemos, com ela, tranquilamente formar todos os conjuntos essenciais para a Matemática. De um ponto de vista mais geral, no entanto, não podemos formar qualquer coisa como o "conjunto de todos os homens", o "conjunto de todos os verbos latinos", etc. Nenhuma solução melhor foi imaginada até o presente. Para a teoria dos conjuntos, conjunto é sempre uma coleção de "entes matemáticos".

Vimos como o sistema de Zermelo, com as modificações devidas a Skolem e Fraenkel, fizeram para evitar os paradoxos. Os axiomas restantes do sistema de Zermelo são análogos àqueles que serão desenvolvidos nos capítulos que seguem. Essencialmente eles garantem a existência do conjunto de todos os números naturais (do qual podemos construir os outros sistemas de números da Matemática) e garantem a reunião, intersecção e produto de conjuntos. Antes de continuarmos, vejamos rapidamente outro modo de axiomatizar a teoria dos conjuntos que é de crescente interesse em nossos dias; as idéias essenciais são devido a von Neumann.

Von Neumann notou que dois fatos combinam-se para produzir os paradoxos lógicos: em primeiro lugar, como vimos, os conjuntos cruciais (por exemplo, o conjunto S no paradoxo de Russel) são "muito grandes"; em segundo lugar, permite-se a estes "grandes" conjuntos serem elementos de conjuntos. (Por exemplo, admite-se ser o conjunto de Russel S um elemento dele mesmo). Destes dois fatos Zermelo usou o primeiro; ele evitou os paradoxos tornando impossível formar conjuntos "muito grandes". Von Neumann propôs o uso do segundo fato. Permitiremos a existência de conjuntos "grandes" mas sem admitir serem elementos de conjuntos.

Brevemente, o sistema de von Neumann pode ser descrito como segue. Como na teoria de Zermelo, existe somente um predicado elementar, a saber, o predicado $x \in Y$. As variáveis x, y, X, Y, etc., percorrem objetos que concordamos sejam chamados de <u>classes</u>. Entretanto distinguiremos entre duas espécies de classes, a saber, <u>elementos</u> - que são definidos como aquelas classes que são elementos de classes - e <u>classes</u> que não são elementos de qualquer classe. O axioma da separação é aqui substituído pelo princípio chamado de <u>axioma de classes</u> ou <u>axioma da classificação</u> ou <u>axioma da formação de classes</u>, a seguir descrito.

Se $S(x)$ é qualquer proposição sobre x existe uma classe que consiste de todos aqueles <u>elementos</u> que satisfazem $S(x)$.

Em outras palavras, se $S(x)$ é qualquer proposição sobre x, podemos formar a classe.

$$\{x \mid x \text{ é um elemento } \wedge \ S(x)\}.$$

Para verificar que o paradoxo de Russel não "funciona" neste sistema, percorramos os passos do argumento de Russel, com S denotando $\{x \mid x \text{ é um elemento e } x \notin x\}$.

$S \in S$ é impossível, pois $S \in S$ implica $S \notin S$ que é uma contradição. Então $S \notin S$. Assim segue que S não é um elemento, pois se S fosse um elemento então teríamos $S \in S$, que seria uma contradição. Então o argumento de Russel simplesmente prova que a classe S definida acima, não é um elemento.

Os paradoxos semânticos são evitados como no já visto sistema de Zermelo, admitindo no axioma de classes somente aquelas "sentenças" que podem ser escritas na linguagem formal.

Variantes do sistema de von Neumann foram desenvolvidos por Gödel e Bernays. Eles têm uma vantagem sobre o sistema de Zermelo: o <u>axioma de classes</u> está mais próximo do espírito da teoria dos conjuntos intuitivo do que o axioma da separação. De fato, se $S(x)$ é uma proposição sobre x, o axioma de classes garante a existência de uma <u>classe</u> contendo todos os elementos x que satisfazem $S(x)$. Em Matemática, os sistemas do tipo de von Neumann têm a conveniência de nos pemitir falar da "classe de todos os elementos", e permitem-nos operar com classes que não são elementos (tais classes tendem a ocorrer em vários pontos em matemática superior; elas podem ser evitadas, mas somente pagando um certo preço). A desvantagem central destes sistemas é a distinção entre classes que são elementos e classes que não são elementos - altamente artificial. Precisamos sempre ter isso em mente. Entretanto, esta desvantagem indubitavelmente pesou menos pela grande flexibilidade e naturalidade dos sistemas do tipo de von Neumann. Neste texto usaremos uma forma um pouco modificada do sistema de axiomas de von Neumann.

OBJEÇÕES À ABORDAGEM AXIOMÁTICA. OUTRAS PROPOSTAS.

Qual é o mérito central da teoria axiomática dos conjuntos e em que medida esse mérito tem atingido sucesso total?

Para responder a esta pergunta precisamos lembrar as circunstâncias que levaram matemáticos, nos princípios do século XX a procurar pôr uma base axiomática para a Teoria dos conjuntos. As idéias de Cantor já tinham permitido completamente a fábrica da Matemática moderna e tinham se tornado ferramentas indispensáveis do trabalho matemático. Álgebra e Análise foram formuladas tendo por base a teoria dos conjuntos, e alguns dos mais elegantes e potentes novos resultados nestes campos foram estabelecidos usando métodos introduzidos por Cantor e seus seguidores. Então, quando os paradoxos foram descobertos e com êles surgiu a dúvida quanto à validade básica do sistema de Cantor, a maioria dos matemáticos acreditava que algum caminho seria encontrado para contornar as contradições e preservar, se não todos, ao menos a maioria dos resultados de Cantor. Hilbert uma vez escreveu em relação a isto: "Não seremos expulsos do paraíso que Cantor nos legou".

Com a descoberta dos novos paradoxos e com o fracasso de todas as tentativas iniciais para evitá-los, tornou-se cada vez mais claro que não seria possível preservar a teoria intuitiva dos conjuntos em sua integridade. Algo - possivelmente uma parte - teria que ser abandonado. O melhor que se poderia esperar era reter tanto quanto fosse necessário da teoria intuitiva dos conjuntos para salvar os novos resultados da Matemática moderna e prover uma base adequada para a Matemática clássica.

Em resumo, teoria axiomática dos conjuntos foi criada para conseguir uma limitação e para fornecer um fundamento firme para um sistema de teoria dos conjuntos que, no entanto, não necessitaria ser tão compreensivo quanto a teoria intuitiva dos conjuntos era. Seria necessário incluir todos os resultados básicos de Cantor assim como as construções (tais como o sistema de números, funções e relações) necessários para a Matemática clássica.

Os sistemas de ambos, Zermelo e von Neumamm, foram bem sucedidos nesta pretensão limitada. Mas a parte de teoria intuitiva dos conjuntos que tiveram que sacrificar foi considerável. Por exemplo, no sistema de Zermelo, como já vimos, o caminho intuitivo de determinar conjuntos - por nomear uma propriedade de objetos e formar o conjunto de todos os objetos que têm aquelas propriedades - é substituído pelo axioma de separação no qual propriedades são usadas somente para determinar subconjuntos de dados conjuntos. Além do mais, as únicas "propriedades" permissíveis são aquelas que podem ser expressas totalmente em termos dos sete símbolos $\in$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, e as variáveis x, y, z ... . Como resultado, muito daquilo que normalmente pensamos como conjuntos - como, o "conjunto de todas as maçãs", "o conjunto de todos os átomos no universo" - não são admissíveis como "conjuntos" na teoria axiomática dos conjuntos. Na realidade, os únicos conjuntos que os axiomas garantem são, primeiro, o conjunto vazio $\emptyset$, e então construções como, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc., que podem ser obtidas a partir do conjunto vazio. É um fato notável que toda a Matemática possa ser baseada sobre tais conceitos de conjunto, tão pobres.

Conquanto os vários sistemas axiomáticos de teoria dos conjuntos tenham salvado a Matemática deste perigo imediato, eles falharam em satisfazer um grande número de pessoas. Em particular, muitos daqueles que são sensíveis à elegância e universalidade da Matemática observaram que as criações de Zermelo e von Neumann precisam ser observadas como soluções provisórias, como expediente para resolver um problema temporário. Terão que ser substituídos, cedo ou tarde, por uma teoria matemática de escopo mais amplo, que trate o conceito de "conjunto" em sua totalidade, em sua generalidade intuitiva.

Estes argumentos contrários à teoria axiomática dos conjuntos - que trata apenas com uma versão mutilada de nossa concepção intuitiva de um conjunto - têm importantes ramificações filosóficas. Fazem parte de um longo e amplo debate sobre a natureza da "verdade" matemática. O debate gira em torno da seguinte questão: os conceitos matemáticos são noções (isto é, invenções) da mente humana, ou eles existem independentemente de nós em um universo platônico de conceitos, meramente sendo <u>descobertos</u> pelos matemáticos? A última opinião é muitas vezes referida como "realismo platônico" e é o ponto de vista dominante na Matemática clássica. Ilustraremos estes dois pontos de vista opostos mostrando como se aplicaram a um conceito particular - a noção de número natural. Do ponto de vista do realismo platônico, os conceitos "um", "dois", "três" e assim por diante, existem na natureza e existiam antes do primeiro homem começar a contar. Se seres inteligentes existem em outra parte do Universo então, não importa quão diferente sejam de nós, eles sem dúvida descobriram os números naturais e encontraram neles as mesmas propriedades que têm para nós. Por outro lado, de acordo com o ponto de vista oposto, conquanto três vacas, três pedras, ou três árvores existam na natureza, o número natural <u>três</u> é uma criação das nossas mentes. Inventamos um processo para construir os números naturais (começando com o zero e adicionando <u>um</u> de cada vez e assim produzindo 1, 2, 3, etc.) e temos deste modo construído um instrumento conceitual ao nosso próprio feitio.

Como o realismo platônico afeta o estudo da teoria axiomática dos conjuntos? Do ponto de vista do realismo platônico, objetos matemáticos nos são dados prontos, com todos seus semblantes e todas suas propriedades. Segue disto que dizer que um teorema matemático é "verdadeiro" significa que ele expressa uma proposição correta a respeito de objetos matemáticos relevantes. (Por exemplo, $2 + 2 = 4$ não é meramente uma proposição formal provável na matemática; mas apenas um <u>fato real</u> sobre números). Ora, se admitimos que objetos matemáticos nos são dados com todas as suas propriedades, então segue, em particular, que a noção de <u>conjunto</u> está fixada, conceito bem definido o qual não estamos livres para alterar de acordo com nossa conveniência. Então os "conjuntos" criados por Zermelo e von Neumann não existem, e teoremas que insinuam que estes objetos existem, são falsos! Concluindo, se aceitamos a interpretação estrita do realismo platônico, estaríamos forçados a rejeitar os sistemas de Zermelo e von Neumann como matematicamente válidos.

Felizmente, a tendência de algum tempo para cá tem sido vir do platonismo para uma atitude mais flexível, mais "agnóstica", para com a "verdade" matemática. Por um lado o desenvolvimento em Matemática tem se tornado cada vez menos de acordo com o padrão ditado pela filosofia platônica; por outro, a exigência essencial do platonismo - que todo objeto matemático corresponda a um objeto definido, distinguido de nossa intuição espacial (do mesmo modo que "pontos" e "retas"referem-se a objetos bem definidos de nossa intuição espacial) - tornou-se um peso quase insustentável no trabalho de matemáticos criativos por volta do séc. XIX. Eles estavam tratando de uma porção de novos conceitos (tais como números complexos, leis abstratas de composição e a noção geral de função) que não retiraram de uma simples interpretação em termos concretos. O caso dos números complexos é uma boa ilustração do que acontecia. A matemática clássica nunca se sentiu à vontade com os números complexos, pois lhe faltava uma "interpretação" adequada para os mesmos e, como resultado, haviam dúvidas inoportunas de como saber se tais coisas realmente "existiam". Números reais podem ser interpretados como medidas ou quantidades, mas a raiz quadrada de um número real negativo - esta não parecia corresponder a alguma coisa no mundo real ou em nossa intuição sobre os números. Ainda que o sistema de números complexos tenha surgido de modo bastante natural - como o menor sistema de números que contém os números reais e inclui as raízes de toda equação algébrica com coeficientes reais, decidir ou não se os números complexos tenham uma contrapartida física ou psicológica parece irrelevante.

O caso dos números complexos estabele um paralelo com o problema da teoria axiomática dos conjuntos. Pois os "conjuntos" criados por Zermelo e von Neumann geram naturalmente um contexto matemático. Eles nos dão a mais simples noção de conjunto a qual é adequada para a Matemática e produzem uma teoria axiomática dos conjuntos consistente. Se sim ou não podemos interpretá-los intuitivamente, pode ser relativamente sem importância.

Seja como for, muitos matemáticos no começo de 1900 relutavam em romper violentamente com a tradição, como a teoria axiomática dos conjuntos parecia exigir. Além disso desistiam, no campo estético, que uma teoria matemática de conjuntos pudesse descrever todas as coisas - e somente aquelas coisas - que nossa intuição reconhece como conjunto. Entre eles estava Bertrand Russel. Em seus esforços para reestabelecer a teoria intuitiva dos conjuntos, Russel foi levado pela idéia de que podemos considerar os conjuntos ordenados em uma hierarquia de "níveis", onde, se A e B são conjuntos e A é um elemento de B, então B está "num nível maior" que A. Por exemplo, na geometria plana, um <u>círculo</u> (considerado como um conjunto de pontos) está um nível abaixo do nível de uma família de círculos, que por sua vez está um nível abaixo do nível de um <u>conjunto de família de círculos</u>.

Esta idéia básica foi criada por Russel numa teoria chamada a <u>teoria dos tipos</u> que pode ser descrita em essência como segue.

Associa-se a cada conjunto um número natural, chamado seu "nível". Os conjuntos mais simples, de nível 0, são chamados <u>indivíduos</u> - eles não possuem elementos. Uma coleção de indivíduos é um conjunto de nível 1; uma coleção de conjuntos de nível 1 é um conjunto de nível 2 e assim por diante. Na teoria dos tipos, a expressão $a \in B$, somente tem significado se para algum número $\underline{n}$, $\underline{a}$ é um conjunto de nível $\underline{n}$ e B é um conjunto de nível $n + 1$. Segue-se que a sentença $x \in x$ não tem significado na teoria dos tipos e como resultado, o paradoxo de Russel desaparece pela simples razão de que não pode nem mesmo ser formulado.

A teoria dos tipos de Russel, é construída sobre uma idéia simples muito bonita. Infelizmente, para faze-la "funcionar" Russel foi forçado a acrescentar uma porção de novas hipóteses, e finalmente a teoria resultante tornou-se incômoda demais para trabalhar-se com ela e também complicada para ser agradável. Por um lado, correspondendo à hierarquia de "níveis" de conjuntos, foi necessário fazer uma hierarquia de "níveis" de predicados lógicos. Então - como um modo de evitar os paradoxos semânticos - conjuntos em um mesmo nível foram também divididos em "ordens". Finalmente Russel teve que admitir o assim chamado <u>axioma de Redutibilidade</u> que era tão arbitrário quanto sem fundamento na intuição, como qualquer das hipóteses <u>ad hoc</u>

feita por Zermelo. Como resultado destas insuficiências, a teoria dos tipos não ganhou uma ampla aceitação entre os matemáticos, embora seja ainda uma interessante (e talvez promissora) área de pesquisa.

Uma abordagem mais radical foi feita por um grupo de matemáticos, que se chamavam intuicionistas. Para os intuicionistas a maior parte da Matemática mo- derna, incluindo quase tudo da teoria dos conjuntos de Cantor, está baseada no uso não crítico de regras lógicas que se consideravam inválidas. A atitude intuicionista perante a teoria dos conjuntos pode no entando ser recapitulada facilmente: ela é de uma quase total rejeição.

Para se compreender adequadamente a filosofia do intuicionismo, é necessário primeiro entender sua atitude perante a lógica. Vistas pelos intuicionistas, as regras lógicas usadas pelos matemáticos têm um caráter empírico.

Certos métodos de provas tornam-se comumente usados pelos matemáticos, e através dos anos foram codificadas em um conjunto de regras. Estas regras eram notadamente corretas em seu contexto original, mas, depois que foram codificados, tornaram-se indiscriminadamente usadas em contextos totalmente diferentes nos quais não se aplicavam. Sejamos mais específicos: na geometria Euclidiana que é a origem da maior parte da Matemática antes do século XV, qualquer teorema envolvia apenas um número finito de objetos e cada um destes objetos (figuras geométricas) é dado por uma construção explícita. As regras lógicas usadas por Euclides são perfeitamente válidas neste contexto, segundo os intuicionistas. Elas são incorretas apenas quando transpostas a problemas envolvendo um domínio infinito de objetos, ou nos quais os objetos não são dados por uma construção explícita.

Como exemplo, tomemos a lei do terceiro excluído. Esta é uma regra que diz que se S é qualquer proposição, então S é verdadeira ou a negação de S é verdadeira. Em particular, tome A sendo um conjunto e $P(x)$ uma proposição que tenha significado para todo elemento x de A. Pela lei do terceiro excluído, ou existe um x em A tal que $P(x)$ é verdadeiro, ou para todo x em A, $P(x)$ é falso. Os intuicionistas aceitariam estas regras se A fosse um conjunto finito e se cada um de seus elementos x pudesse ser testado para determinar se $P(x)$ é verdadeiro ou falso. De fato, segundo os intuicionistas, é aqui que a regra se originou. Nossa experiência nos diz que se examinarmos todos os elementos x em A para determinar se $P(x)$ é verdadeira ou não (para fazer isto A deve ser um conjunto finito), podem existir somente duas saídas: ou encontramos um x para o qual $P(x)$ é verdadeira, ou para todo x em A verificamos que $P(x)$ é falsa. Nossa experiência, assim, confirma a Lei do terceiro excluído no caso de conjuntos finitos. Mas, segundo os intuicionistas, assumí-la verdadeira no caso de conjuntos infinitos - nesta área onde é impossível qualquer experiência - é totalmente sem fundamento. Nestes campos os intuicionistas negaram a Lei do terceiro excluído. Outras regras da lógica clássica são analogamente rejeitadas, pois, escapam ao domínio de nossa experiência.

Os intuicionistas afirmam que a Matemática se originou como um estudo de certas construções mentais - principalmente de figuras geométricas - e construções simples envolvendo todos os meios. Os teoremas da Matemática antiga são essencialmente proposições que afirmam que, se certas construções são levadas a cabo, então certos resultados são obtidos. Por exemplo, considere-se o seguinte teorema da geometria: dados dois triângulos, se dois lados e o ângulo formado por eles são iguais respectivamente, a dois lados e o ângulo formado por esses do outro triângulo, então os triângulos são congruentes. O fato expresso aqui é que se construirmos dois triângulos como estabelecido acima então seremos capazes de verificar (por exemplo, usando um compasso) que o lado restante de um é igual ao lado restante do outro triângulo. Os passos da geometria Euclidiana e da Matemática antiga em geral, têm um caráter construtivo. Exemplificando, o teorema de Pitágoras é provado construindo uma figura na qual as correspondentes partes são congruentes e portanto de mesma área. Uma vez que a construção está completa resta somente medir as partes congruentes e deste modo atingir a conclusão desejada. Então, segundo os intuicionistas, estas regras da lógica estavam originalmente destinadas a descrever situações que surgiram no contexto de tais construções e determinações. Por exemplo, a regra do terceiro excluído estava destinada simplesmente a notar o fato de que se nos é dado um conjunto (finito) de objetos e um método (por exemplo, régua e compasso) para testar cada objeto para alguma propriedade P então, se executamos o teste sobre cada objeto, ou um objeto passará no teste ou todos os objetos falharão para o exigido.

Recapitulando, os intuicionistas, mantém que um teorema matemático nada mais é que uma afirmação factual, de que uma dada construção mental levará a um certo resultado. Toda prova precisa ser construtiva. Se pretendemos que um objeto matemático exista, precisamos prová-lo dando um método para construir realmente o objeto. Se afirmamos que uma relação vale entre pares de objetos, nossa prova precisa incluir um método de testar todo par de objetos em questão. As "regras da lógica" nada mais são que simples observação sobre o processo de executar construções matemáticas. Não temos fundamentos para acreditar que estas regras aplicam-se fora do contexto da Matemática construtiva - na realidade é ininteligível aplicá-los fora deste contexto. Lógica é incidental e não essencial para a Matemática.

É óbvio que a noção intuicionista de conjuntos precisa ser completamente diferente da nossa. Consideremos, por exemplo, o princípio de Cantor que diz: se podemos nomear uma propriedade de objetos, então existe o conjuntos dos objetos que têm esta propriedade. Este princípio - assim como as versões restritas deste sugerida por Zermelo e von Neumann - é pecaminosa para os intuicionistas. Um objeto existe somente se pode ser construído; portanto um conjunto existe somente se somos capazes de descrever um processo para edificá-lo.

Uma discussão completa do intuicionismo está fora do escopo deste livro. No entanto é digno de menção uma espécie particular de conjuntos que é importante na Matemática intuicionista: estes são chamados "spread". Um "spread" é uma regra para produzir todos os seus elementos. Assim, um "spread" não é visto como uma totalidade "já formada" mas sim como um "processo de formação", cada um de seus elementos pode ser formado, se aplicamos a regra um número de vezes suficientemente grande. Os paradoxos não ocorrem na Matemática intuicionista pelo fato de que os conjuntos cruciais nos paradoxos não podem ser produzidos na Matemática intuicionista e os argumentos essenciais não podem ser executados usando a lógica intuicionista.

CONCLUSÃO (Observações Finais)

Durante a primeira parte do séc. XX, como vimos, várias maneiras para construir uma teoria dos conjuntos não contraditórias foram propostas e desenvolvidas por diferentes "escolas" de Matemática. Revimos os princípios básicos da teoria axiomática dos conjuntos, teoria dos tipos de Russel e o intuicionismo (ou "construtivismo). Junta-se a estas muitas outras ideias propostas, não descritas nesta rápida introdução.

De todos os modos de tratamento dos conjuntos, o método axiomático pareceu o mais adequado para satisfazer as necessidades da Matemática moderna. A noção de "conjunto" incorporada no sistema de Zermelo e von Neumann é suficientemente ampla para os propósitos da Matemática e, entretanto, em contexto matemático é virtualmente indistinguível da noção Cantoriana de conjuntos. Os métodos de provas, o simbolismo, o rigor - todos correspondem ao rigor matemático corrente. O mais importante é que a teoria axiomática dos conjuntos parece "natural" para a maioria dos matemáticos.

Aqueles que rejeitam a teoria axiomática dos conjuntos o fazem com base em alguma inclinação filosófica. Estas posições filosóficas que receiam aceitar a teoria axiomática dos conjuntos também negam a validade de uma grande parte da moderna Matemática. Assim, a escola intuicionista rejeita a maior parte da análise contemporânea porque esta está fundamentada sobre princípios não construtivos. Conquanto os argumentos destes críticos ofereçam um desafio, e certamente dão-nos motivos para pensar, eles não são suficientemente fortes para destruir as descobertas de três brilhantes gerações de matemáticos. Nos primeiros setenta anos do século XX, ou mais, a teoria dos conjuntos tem sido amplamente reconhecida como a parte "unificadora" fundamental da Matemática. Já vimos como os números naturais podem ser construídos dentro do contexto da teoria dos conjuntos; daqui é fácil desenvolver os números racionais, reais e complexos, assim como sistemas notáveis tal como "os cardinais transfinitos" de Cantor. As noções de função, relação, operação e assim por diante são facilmente definidas por meio de conjuntos e, como resultado, todo conhecimento matemático pode ser formulado na teoria dos conjuntos. É portanto legítimo - e de fato vital - perguntar: "Como garantir um fundamento para a teoria dos conjuntos que sustenta todo o edifício da Matemática. Em particular, estamos absolutamente certos da consistência da Teoria Axiomática dos Conjuntos (TAC), está ela livre de contradições?" Se for, tudo o que desenvolvemos dentro dela - em outras palavras, toda Matemática - é consistente, e, se não, então o que construimos sobre ela será sem valor.

Na realidade não existe nenhuma prova conhecida da consistência da teoria axiomática dos conjuntos. Isto não é tão surpreendente em vista de alguns resultados da moderna lógica. Por exemplo, em 1931. K. Gödel provou que é impossível dar uma prova finitista da consistência da teoria dos números naturais. A situação em quase todas as partes da Matemática é muito parecida. O melhor que podemos assegurar no momento sobre a consistência da TAC é que as contradições formuladas não podem ser obtidas pelos caminhos usuais. Não podemos esperar algo melhor no momento.

Resultados de consistência relativa são de algum interesse. Foi provado recentemente que se o sistema de Zermelo for consistente então assim o é o de von Neumann.

É provável que, numa análise final, qualquer certeza da consistência da Matemática seguirá de alguma combinação de intuição básica com evidência empírica.