MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2023

1a. lista de exercícios

1. Dado um conjunto X denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, o conjunto formado por todos os subconjuntos de X. Mostre que não existe uma aplicação $f : X \to \mathcal{P}(X)$ que seja sobrejetora. *Sugestão*: considere

$$\{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

2. Sejam Ω e I conjuntos não-vazios e $(E_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de Ω (isto é, uma função de I a valores em $\mathcal{P}(\Omega)$). Defina:

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \in \Omega : \, x \in E_i \text{ para algum } i \in I\}\,;$$

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \{x \in \Omega : \, x \in E_i \text{ para todo } i \in I\}\,.$$

Prove as leis de De Morgan:

$$\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I}(\Omega \setminus E_i); \quad \Omega \setminus \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I}(\Omega \setminus E_i).$$

3. Mostre que, em $\mathbb{N}$, os princípios da indução finita e da boa ordem são equivalentes.

4. Um número real x é irracional se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mostre que se $r \neq 0$ é racional e se x é irracional então $x + r$ e xr são irracionais.

5. Mostre que não existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r^2 = 12$.

6. Se $x, y \in \mathbb{R}$ defina $x \vee y = \max\{x, y\}$ e $x \wedge y = \min\{x, y\}$. Mostre que, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$,

- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- $x \wedge y + x \vee y = x + y$;
- $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$;
- $x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z)$;
- $z(x \vee y) = (zx) \vee (zy)$ se $z \geq 0$;
- $|x| = x \vee (-x)$;
- $x \vee y = (x + y + |x - y|)/2.3$

7. Mostre que

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Interprete geometricamente.

8. Um número real x é <u>algébrico</u> se existem $a_0, a_1 \ldots, a_m$ inteiros, com $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$, tais que

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Mostre que o conjuntos dos números algébricos é infinito e enumerável.

9. Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e considere, para $z, w \in D$,

$$\rho(z,w) = \begin{cases} |z-w| & \text{se } z = 0 \text{ ou } w = 0; \\ |z-w| & \text{se } z \neq 0,\ w \neq 0 \text{ e } \arg z = \arg w; \\ |z| + |w| & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Mostre que (D, ρ) é um espaço métrico, chamado de o *espaço da ferrovia francesa*. Faça um esboço para apreciar a razão deste nome.

10. Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$. Defina o *interior de A* como sendo

$$A^{\mathrm{o}} = \{x \in A : \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset A\}\,.$$

Mostre que A^{o} é aberto em X e que A é aberto em X se, e só se, $A = A^{\mathrm{o}}$. Mostre também que se $B \subset A$ é aberto em X então $B \subset A^{\mathrm{o}}$. Conclua que

$$A^{\mathrm{o}} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B\,,$$

onde $\mathcal{A}$ é a família de todos os subconjuntos de A que são abertos em X.