VARIÁVEIS, CONSTANTES, INCÓGNITAS, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES: Significados e relevâncias da linguagem algébrica para a formação geral dos estudantes da Educação Básica na área de Matemática

Profa. Dra. Iole de Freitas Druck (MAT/IME/2018)

Generalizações e abstrações de noções e procedimentos são motores da produção de conhecimentos matemáticos, fruto da racionalidade, da curiosidade e de certo senso estético próprios da mente humana. Assim, o emprego de letras como indicação de situações genéricas emergiu da busca de expressões sintéticas para expressar ideias como: propriedades operatórias, regularidades de padrões em sequências numéricas e nos cálculos de áreas e volumes de figuras geométricas; registrar o comportamento da dependência funcional entre grandezas, etc. Ou seja, a linguagem algébrica é fruto de um longo e complexo processo histórico que envolveu racionalização, generalização e simplificação de registros para expressar regularidades, fenômenos, propriedades, representar funções e fornecer modelos algébricos para figuras geométricas (na Geometria Analítica). Essa linguagem também é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas, sendo muito utilizada em todos os campos da Matemática e nas demais áreas do conhecimento. Tudo isso torna relevante que a escola garanta uma efetiva alfabetização algébrica aos alunos.

A própria linguagem da aritmética foi desenvolvida pela humanidade ao longo de cerca de quatro milênios. Descobertas arqueológicas permitiram identificar diversos registros deixados por civilizações antigas, com diferentes notações simbólicas para os números naturais e distintos sistemas de numeração. Hoje utilizamos universalmente o sistema decimal de numeração. Também foram criados, ao longo da história, símbolos para as operações e sinais para indicar seus resultados (atualmente o =). Na busca de expressar claramente a percepção de regularidades, por exemplo, de propriedades operatórias ou de padrões em sequências numéricas ou mesmo nos cálculos de áreas e volumes de figuras geométricas, acabou por emergir o emprego de letras como indicação do fato de ser generalizável a regularidade, eventualmente observada em casos numéricos particulares. Assim, por exemplo, escreve-se:

1 - ($x + y = y + x$) para expressar a validade da propriedade comutativa da adição para quaisquer pares de números somados, onde se subentende que x e y são números genéricos;

2 - ($2n + 1$) como a expressão geral de um número ímpar, onde n é imaginado como um número natural arbitrário;

3 - ($A = \frac{b \times h}{2}$) para comunicar o mesmo que a sentença – "a medida da área de qualquer triângulo pode sempre ser obtida como o resultado do cálculo da metade do produto da medida do comprimento de sua base pelo comprimento de sua altura". Vale observar que a informação sobre o valor da área do triângulo é bem mais concisa na expressão dada pela "sentença matemática" que do que na sentença (entre aspas logo a seguir) que expressa, em português, o mesmo fato genérico!

Tal concisão da linguagem algébrica é uma vantagem preciosa para o desenvolvimento da Matemática, devido à característica cumulativa dessa ciência: tipicamente os conhecimentos matemáticos vão construindo-se tendo por base conhecimentos já desenvolvidos anteriormente, o que vai tornando mais complexa a formulação e o domínio de conteúdos posteriores. Mas tal concisão das expressões algébricas também costuma representar um grande obstáculo cognitivo para o iniciante, na dependência de como essa linguagem é introduzida na escola. Se o estudante não for exposto a experiências pessoais, gradativas e recorrentes, capazes de fazê-lo de fato entender certas formulações matemáticas como afirmações com significado preciso, acabará por tomá-las apenas como regras práticas, no máximo sugestivas, que servem para obter repostas a exercícios repetitivos. A linguagem perderá assim qualquer sentido, e a Matemática passará a representar, para ele, um amontoado de regras sem nexo, a serem decoradas para "passar na prova" e esquecidas posteriormente. Ou seja, tal abordagem no ensino da álgebra, bastante presente em livros didáticos e em salas de aula, não contribui em nada à formação geral nem ao desenvolvimento pessoal que devem ser assegurados aos alunos na Educação Básica.

A hoje chamada linguagem algébrica é muito utilizada em todos os campos da Matemática e também nas demais áreas do conhecimento, o que torna relevante que a escola garanta uma efetiva alfabetização algébrica. Prossigamos na análise de dificuldades conceituais inerentes à alfabetização nessa nova linguagem. Iniciemos por considerações sobre os usos e significados das letras nas formulações matemáticas que, ao longo do tempo foram se diversificando e expandindo. Hoje elas são utilizadas em expressões matemáticas para representar "elementos genéricos" de alguma coleção (como nos dois primeiros exemplos do segundo parágrafo deste texto), e nesse caso são chamadas de variáveis. No caso do terceiro exemplo, é distinto o significado do uso das letras *A, b* e *h*, pois estão a serviço de expressar uma relação funcional entre grandezas. No entanto também são chamadas de variáveis, mas ganham qualificativos: *b* e *h* são ditas independentes enquanto que *A* é referida como dependente (por seu valor numérico depender dos valores escolhidos para as demais). Já, ao comparecerem em equações, algumas letras são chamadas de incógnitas, mas outras podem ser chamadas de constantes ou parâmetros. Assim, por exemplo, as mesmas letras têm conotações linguísticas distintas, por um lado na expressão genérica de uma equação do segundo grau ($ax^2 + bx + c = 0$), e, por outro lado, na conhecida fórmula de Bháskara ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) utilizada para determinar suas raízes. Na primeira, o *x* é chamado de incógnita, enquanto que na segunda, ele é empregado como variável dependente. Já as letras a, b e *c* são chamadas de constantes genéricas (ou parâmetros) na equação do 2º grau, mas são usadas como variáveis independentes na fórmula de Bháskara. Ou seja, em expressões distintas de um mesmo contexto matemático, as mesmas letras podem assumir papéis linguísticos distintos. E o contexto aqui escolhido como exemplo, reconhecidamente faz parte de um repertório de matemática escolar elementar e indispensável, não?

A discussão do parágrafo anterior teve por intenção explicitar o alto grau de complexidade, ou mesmo de sutilezas, embutido no emprego de letras na linguagem simbólica da álgebra. E isso se reflete necessariamente no nível elevado de dificuldades que têm os alunos, em geral, para uma apropriação adequada, significativa e fluente dessa linguagem formal. Trata-se, no entanto, de instrumento imprescindível para a continuidade dos estudos e também para uma melhor compreensão de informações, pois é utilizada largamente pela mídia. Como toda nova linguagem escrita, essa também demanda uma nova alfabetização, exige o tempo do amadurecimento e da introjeção dos símbolos com seus significados e das "regras gramaticais" para a sua correta utilização. Linguagens servem para a comunicação de ideias, e isso vale também para a linguagem formal. Portanto a utilização desta pelos estudantes não pode ser esvaziada dos significados que ela comunica – o que ocorre com muita frequência, infelizmente! O domínio com compreensão da linguagem algébrica, por parte dos alunos, dependerá das vivências com seu uso que, gradativamente, lhes possibilitem incorporá-la aos seus repertórios pessoais. Isso feito, com consciência e intencionalidade por parte do professor, é o que poderá resultar no desenvolvimento, pelos estudantes, das capacidades de ler com compreensão e de compor "frases matemáticas" (afirmações em linguagem formal algébrica), para comunicar suas ideias matemáticas com exatidão. Assim como em qualquer processo de alfabetização, não é tanto a tomada de consciência das "regras gramaticais" pelos alunos que está em jogo, mas antes o desenvolvimento das habilidades de leitura e escrita na nova linguagem algébrica, com a devida atribuição de significados.

Dispor apenas de letras, assim como no português, não é suficiente para a composição de afirmações matemáticas. Na Matemática, as letras são usadas para fazer referência a objetos genéricos (números, figuras geométricas, funções, variáveis estatísticas, por exemplo). Mas outras "expressões algébricas" também conotam ou representam objetos, igualmente genéricos, utilizando adicionalmente símbolos de operações para especificar objetos mais complexos ou elaborados. Assim, expressões como "$2n+1$" e "$ax^2 + bx + c$" se referem, usualmente, aos seguintes objetos genéricos respectivamente: o n-ésimo número ímpar e a um trinômio genérico do segundo grau.

É necessário ainda dispor de verbos, ou predicados, para possibilitar a composição de "frases matemáticas" (sem sujeito e predicado, e talvez um complemento, não se formula uma sentença em português tampouco). Na linguagem algébrica são as relações de igualdade (=) e de ordem ($<, \leq, >, \geq$) que cumprem o papel de predicados, **e apenas esses símbolos**. Eles servem, nas formulações algébricas, para indicar relações entre objetos matemáticos, representados por suas notações simbólicas. Assim ao escrevermos "*3 = 1 + 2*" ou “$2n + 1 < 3m$” estamos fazendo afirmações em linguagem algébrica, sendo a primeira verdadeira na aritmética usual. Porém, quanto à segunda, não se pode decidir se é verdadeira ou falsa devido à presença de variáveis – será verdadeira para alguns pares de números naturais atribuídos como valores para n e m, e será falsa para outros. Mas nem sempre foi assim. Por exemplo, mesmo empregando uma variável, a frase “$2n > 3n$” é considerada falsa entre os números naturais (pois o dobro de um número natural qualquer nunca é maior do que o triplo do mesmo número). Já as formulações simbólicas “$3 = 2x + 1$” ou “$3 < 2x + 1$”, também, como afirmações, não podem ser ditas verdadeiras ou falsas em si mesmas, por se referirem a um número x genérico. Nesses dois casos, o que é verdadeira é a **existência** de valor(es) numérico(s) para x satisfazendo as afirmações, porém é falso que elas sejam válidas **para todos** os valores numéricos possíveis de x. Assim, resolver uma equação ou uma inequação, como sabemos, é determinar, quando existem, o(s) valor(es) numérico(s) para sua(s) incógnita(s) que torna(m) verdadeira a afirmação expressa em sua formulação simbólica, ou decidir que não existem valores nessa condição – caso em que dizemos não haver soluções para a equação ou inequação.

Todas essas noções, subjacentes ou contidas nas “frases da álgebra”, ficam em geral obscurecidas aos iniciantes, pela dificuldade natural da absorção e domínio, com compreensão, dos significados dos símbolos como componentes de uma afirmação. Dificuldade essa que advém, por um lado, do fato das “frases” serem “muito sintéticas” ou concisas em sua formulação e, por outro lado, expressarem abstrações, em maior ou menor grau. Depois que dominamos esta linguagem, torna-se desnecessário “ler por extenso” uma expressão matemática para apreender seu sentido – elas, ao serem visualizadas, já nos transmitem suas mensagens, de forma bastante sugestiva (como também é o caso da leitura visual de gráficos). Essa é uma vantagem do emprego de tal linguagem sintética (e também dos gráficos), mas costuma representar uma grande dificuldade para o iniciante. Principalmente se ele apenas memoriza regras de manipulação para a resolução de equações, sem ter percebido o verdadeiro significado da “pergunta” que traz consigo a “frase” que é a equação. Não é pouco frequente que tais regras, memorizadas sem compreensão da questão embutida na equação a ser resolvida, sejam simplesmente transferidas para a resolução de inequações, acarretando em erros graves de procedimento e de soluções obtidas no novo contexto. Os procedimentos se tornam mecânicos e arbitrários, o que impede a possibilidade da comprovação, pelos próprios alunos, de serem ou não pertinentes os resultados obtidos. Isso pode gerar no estudante uma sensação de falta de nexo nos procedimentos. Mais ainda, isso certamente, não contribui em nada para a formação e o desenvolvimento de pensamento crítico e autônomo dos estudantes, algo que as atuais Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB/2013) postulam ser um dos papéis fundamentais da Educação Básica no Brasil.