Mecânica Estatística - IFUSP - 13/8/2023
segunda série de exercícios

- ... duzentos anos da equação do calor ... -

1- A equação de Fourier, ou equação do calor, introduzida por Fourier no seu texto famoso de 1822, ainda consitui um dos exemplos mais significativos de uma equação diferencial linear com derivadas parciais.

Fourier parte da "lei do resfriamento dos corpos", que pode ser escrita com a notação moderna do cálculo vetorial,

$$\overrightarrow{J} = -\kappa \overrightarrow{\nabla} T,$$

em que $\overrightarrow{J}$ é um vetor fluxo do calor, a constante κ é o coeficiente de transmissão térmica, e tanto $\overrightarrow{J}$ quanto a temperatura T são funções da posição $\overrightarrow{r}$ e do tempo t.

Considerando um sistema contido num volume V, englobado por uma superfície fechada S, Fourier escreve a "lei da conservação do calórico", que é dada pela expressão matemática

$$\oint_{S(V)} \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt} \int_V u \, dV,$$

em que $u = c\rho T$ é uma densidade de calórico, escrita em termos do calor específico c e da densidade de massa do material ρ, que são duas outras constantes.

Utilize teoremas do cálculo vetorial para obter a equação de Fourier,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \, \overrightarrow{\nabla}^2 T.$$

Qual a forma da constante k? Escreva essa equação em coordenadas cartesianas, com a notação moderna para as derivadas parciais, que não era usada por Fourier ....

2- Utilize as propostas de Maxwell e Clausius sobre a teoria cinética de um gás diluído para deduzir a lei do resfriamento,

$$J = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

aplicada a um sistema contido dentro de um cilindro de paredes isolantes, em que J é o fluxo de calor e $T = T(x,t)$ é a temperatura em função da posição x ao longo do eixo do cilindro e do tempo t.

Em particular, verifique a relação

$$\kappa = \frac{1}{3} n \, \overline{v} \, \lambda \, c,$$

em que $n = V/N$ é a densidade de partículas, $\overline{v}$ é uma velocidade típica, λ é o livre caminho médio, e c é o calor específico. Considerando partículas de raio a e usando as expressões conhecidas da teoria cinética, verique a relação

$$\kappa = \frac{c\overline{v}}{12\pi a^2} \propto T^{1/2},$$

mostrando que a condutividade do gás aumenta com a raiz da temperatura e não depende da pressão!

Maxwell obteve um resultado análogo para o coeficiente de viscosidade de um gás diluído, que também aumenta com a raiz da temperatura e não depende da pressão. Nesse caso o resultado não é nada intuitivo, pois seria natural esperar que a viscosidade diminuísse com a temperatura e aumentasse com a pressão. Conta-se que o próprio Maxwell tratou de realizar experiências com gases (suficientemente diluídos) para verificar essa relação.

revisão de 12/8/2023