MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 1

1. Preliminares

1. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n : X \to \mathbb{K}$ funcionais lineares.

a) Mostre que φ é combinação linear de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se, e somente se, $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$.

b) Mostre que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é LI se, e somente se, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Mostre também que, neste caso, $X = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \oplus \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

2. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e H um subespaço vetorial de X. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) H é um hiperplano[1] de X.

b) Existe $x_0 \in X$ tal que $X = H \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$.

c) Existe um funcional linear não nulo $\varphi : X \to \mathbb{K}$ tal que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

3. Seja X um espaço normado.

a) Mostre que se H é um hiperplano de X, então ou H é fechado, ou H é denso.

b) Dado $\varphi : X \to \mathbb{K}$ um funcional linear, mostre que φ é contínuo se, e somente se, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ é fechado. Conclua que ou φ é contínuo, ou $\operatorname{Ker}(\varphi)$ é denso.

4. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado de dimensão finita e fixe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de X. Defina $|||\cdot||| : \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$ por

$$|||(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)||| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|.$$

Mostre que $|||\cdot|||$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$ equivalente[2] à norma euclidiana. Conclua que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ e $(X, \|\cdot\|)$ são isomorfos. Em particular, $(X, \|\cdot\|)$ é de Banach.

5. Seja X um espaço normado. Mostre que se X^* é separável, então X também é separável. A recíproca é verdadeira?

6. Sejam X e Y espaços normados, $J_X : X \to X^{**}$, $J_Y : Y \to Y^{**}$ as aplicações canônicas e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo.

a) Mostre que $(J_X)^* \circ J_{X^*} = \operatorname{Id}_{X^*}$.

b) Mostre que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$.

c) Mostre que T é isomorfismo de X sobre Y, então T^* é isomorfismo de Y^* sobre X^*.

d) Mostre que se X é de Banach e T^* é isomorfismo de Y^* sobre X^*, então T é isomorfismo de X sobre Y.

e) Conclua que se X é reflexivo e Y é isomorfo a X, então Y também é reflexivo.

---

[1] Um subespaço vetorial próprio H de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é um *hiperplano* se H é maximal com respeito à inclusão, isto é, se para todo subespaço vetorial Y de X tal que $H \subset Y \subset X$, tem-se $Y = H$ ou $Y = X$.

[2] Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X são *equivalentes* se existem constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tais que $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ para todo $x \in X$.

7. Dados X um espaço normado e A um subconjunto de X, o *anulador de* A é o conjunto

$$A^{\perp} = \left\{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\right\}.$$

Mostre que um subespaço Y de X é denso se, e somente se, $Y^{\perp} = \{0\}$.

8. Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathscr{L}(X,Y)$ que converge pontualmente para uma função $T : X \to Y$. Mostre que T é um operador linear contínuo satisfazendo $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$. Mostre, através de um exemplo, que a desigualdade pode ser estrita.

9. Considere $X = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (nx_n)_{n1} \in \ell_1\right\}$ munido da norma $\|\cdot\|_1$ e o operador linear $T : \ell_1 \to X$ dado por $T((x_n)_n) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_n$. Mostre que T é contínuo e bijetor, mas T^{-1} não é contínuo. Por que isto não viola o Teorema da Aplicação Aberta?

10. Considere $C^1[0,1] = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ é de classe } \mathscr{C}^1 \text{ em } [0,1]\right\}$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ e o operador linear $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ dado por $T(f) = f'$. Mostre que o gráfico de T é fechado, mas T não é contínuo. Por que isto não viola o Teorema do Gráfico Fechado?

11. Sejam X um um espaço normado e $P : X \to X$ um operador linear contínuo.

a) Mostre que P é uma projeção[3]se, e somente se, P^* é uma projeção.

b) Mostre que se P é uma projeção, então $\mathrm{Id} - P$ também é projeção e o núcleo e a imagem de P são fechados.

12. Dados X um espaço normado e Y um subespaço de X, dizemos que Y é *complementado em* X se Y é fechado e existe um subespaço fechado Z de X tal que $X = Y \oplus Z$.

a) Mostre que se $P : X \to X$ é uma projeção contínua, então $P(X)$ é complementado em X.

b) Mostre que se X é de Banach e Y é complementado em X, então existe uma projeção contínua $P : X \to X$ com imagem Y.

13. Considere o operador linear $P : c_{00} \to c_{00}$ dado por

$$P((x_n)_n) = (x_1 + x_2, 0, x_3 + 2x_4, 0, x_5 + 3x_6, 0, \ldots).$$

a) Mostre que

$$P(c_{00}) = \left\{(x_n)_n \in c_{00} : x_{2n} = 0 \text{ para todo } n \geq 1\right\}$$

e que

$$\mathrm{Ker}(P) = \left\{(x_n)_n \in c_{00} : x_{2n-1} + nx_{2n} = 0 \text{ para todo } n \geq 1\right\}.$$

Conclua que $P(c_{00})$ e $\mathrm{Ker}(P)$ são fechados e $c_{00} = P(c_{00}) \oplus \mathrm{Ker}(P)$.

b) Mostre que P é uma projeção descontínua.

14. Seja X um espaço de Banach e sejam Y e Z subespaços fechados tais que $X = Y \oplus Z$. Considere o espaço $Y \times Z$ munido da norma

$$\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\|, \forall (y,z) \in Y \times Z.$$

Mostre que $(Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ é completo. Conclua que X e $Y \times Z$ são isomorfos.

15. Mostre que se X é um espaço normado e F é um subespaço de dimensão finita de X, então existe uma projeção contínua $P : X \to X$ com imagem F.

16. Mostre que se X é um espaço de Banach de dimensão infinita, então toda base algébrica de X é não enumerável. (*Sugestão:* use o Teorema de Baire.)

[3]Uma *projeção* em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é uma aplicação linear $P : X \to X$ tal que $P \circ P = P$.