# Contribuição Complementar para Resolução da 2ª Questão da 2ª Série de Problemas

A figura da página seguinte mostra a representação geométrica do problema introdutório de programação linear no plano das variáveis $(x_1, x_2)$. A forma canônica deste problema com relação as variáveis básicas $x_3$, $x_4$ e $x_5$ é mostrada ao lado da figura.

Considere-se uma solução viável do problema, $x'$, arbitrariamente escolhida, com 5 componentes positivas. Arbitrando-se $x_1' = 2$ e $x_2' = 2$, resulta do sistema de equações: $x_3' = 2$, $x_4' = 3$ e $x_5' = 11/6$. No plano $(x_1, x_2)$ a solução $X'$ é representada pelo ponto P.

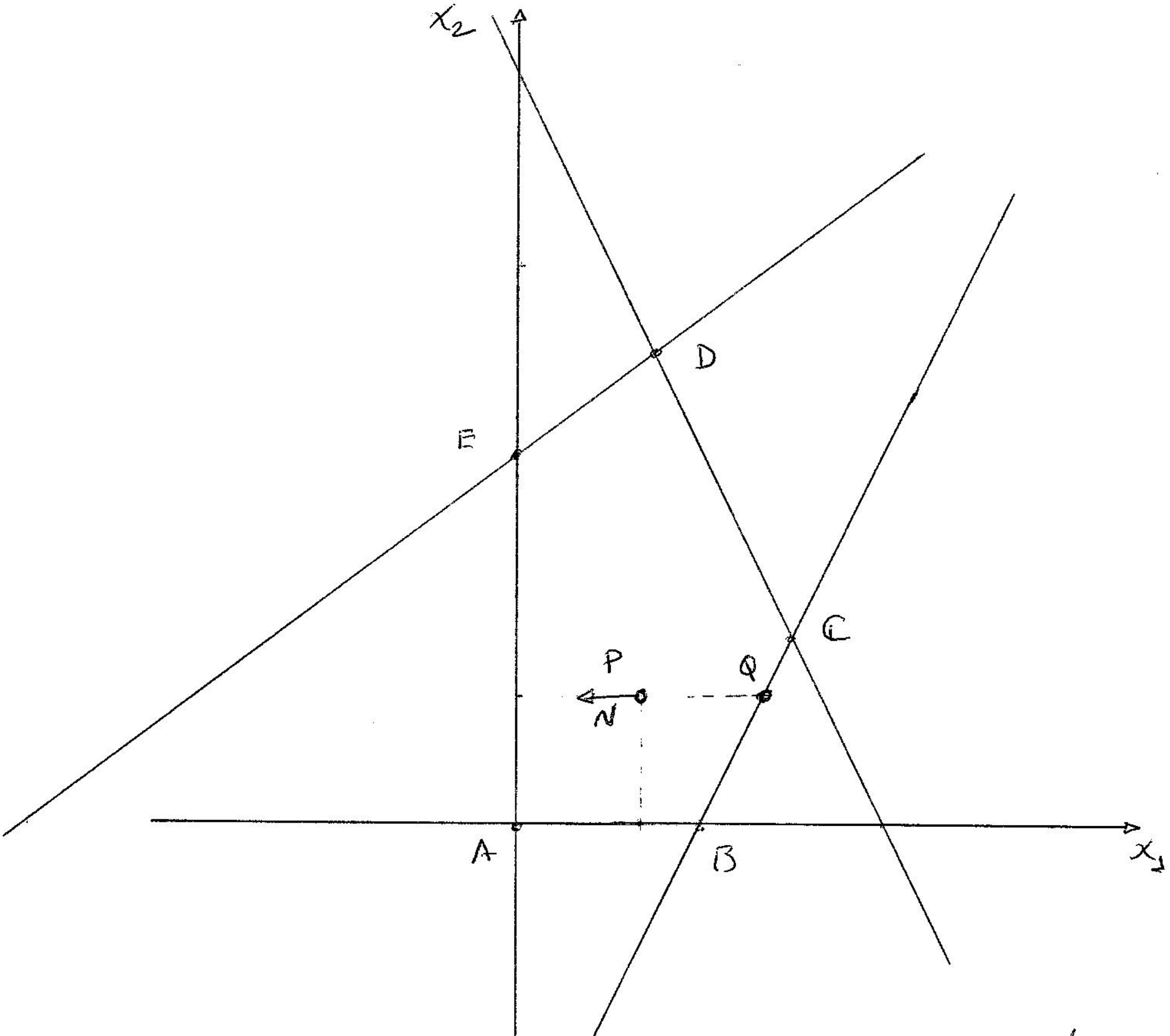
Como o sistema do problema introdutório é constituído por 3 equações independentes com 5 variáveis, as colunas $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ e $A_5$ associadas as 5 componentes positivas da solução $x'$ são linearmente dependentes. Isto é,

$$A_5 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$$

ou

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 + 5/6\,\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 4 \\ -2\alpha_1 + 23/6\,\alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 &= 4 \\ -7/2\,\alpha_1 + 7\alpha_2 + 6\alpha_3 - 4\alpha_4 &= 6 \end{aligned}$$

Este sistema possui infinitas soluções. Arbitrando-se $\alpha_2 = 0$, obtém-se $\alpha_1 = -4$, $\alpha_3 = 8/3$ e $\alpha_4 = 6$




Forma Canônica com relação às variáveis básicas $x_3$, $x_4$ e $x_5$

minimizar z

$$z = 15 - 7/8\,x_1 - 1/2\,x_2$$

$$2/3\,x_1 + 1/3\,x_2 + x_3 = 4$$
$$3/2\,x_1 - 3/4\,x_2 + x_4 = 9/2$$
$$-1/4\,x_1 + 1/3\,x_2 + x_5 = 2$$
$$x_j \geq 0$$

Forma Padrão

minimizar z

$$z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 9/2\,x_5$$

$$4x_1 + 5/6\,x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 29$$
$$-2x_1 + 23/6\,x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 11$$
$$-7/2\,x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 18$$
$$x_j \geq 0$$

Assim o vetor $v$, mencionado na Questão 2 da 2ª Série de Problemas para obtenção da solução $y$, tem a seguinte composição:

$$v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8/3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como $\alpha_2 = 0$ (valor arbitrado) e $\alpha_1 = -4$, em sua representação no plano $(x_1, x_2)$, o vetor $v$, paralelo ao eixo de $x_1$, aponta no sentido decrescente desta variável, conforme mostrado na figura da página anterior.

Para uma solução $y$ da reta $y = x' + \theta v$, o valor da função objetivo é dado por

$$cy = cx' + cv = cx' + \theta(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 +$$

$$+ \alpha_4 c_4 - c_5) = cx' +$$

$$+ \theta(-4\times(-4) + 0\times 6 + 8/3\times 6 + 6\times(-4) - 9/2) = cx' + 7/2\,\theta$$

Desta forma, para se obter uma solução $y$ melhor que $x'$ escolhe-se $\theta < 0$. Cabe agora definir qual é o valor de $\theta < 0$ que anula uma das componentes do vetor $y$, mantendo não negativos os valores das demais componentes.

$$y_1 = x'_1 + \theta\alpha_1 = 2 - 4\theta \geq 0$$

$$y_2 = x'_2 + \theta \times 0 = 2$$

$$y_3 = x'_3 + \theta\alpha_3 = 2 + 8/3\,\theta \geq 0$$

$$y_4 = x'_4 + \theta\alpha_4 = 3 + 6\theta \geq 0$$

$$y_5 = x'_5 - \theta = 11/6 - \theta \geq 0$$

Dado que $\theta < 0$, para que o valor da função objetivo na solução $y$ seja menor que em $x'$, conclui-se pelas equações acima que:

$y_1$ nunca vai se anular;

$y_2$ nunca vai se anular

$y_3$ se anula para $\theta = -3/4$

$y_4$ se anula para $\theta = -1/2$

$y_5$ nunca se anula.

Portanto, escolhe-se $\theta = -1/2$, valor para o qual $y_4$ se anula e as demais componentes assumem valores positivos: $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2/3$ $y_4 = 0$ e $y_5 = 7/3$.

A solução $y$, assim obtida, é melhor que $x'$, pois $cy = cx' + 7/2\,\theta = cx' - 7/4$, e tem uma componente positiva a menor que a solução $x'$. (como mencionado na Questão 2 da segunda série de problemas. A esta solução $y$, com $y_1 = 4$ e $y_2 = 2$ corresponde o ponto $G$ sobre o lado $BC$ do polígono viável.

Agora, vocês estão preparados para dar um passo adiante. Como a solução $y$ tem 4 componentes positivas, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2/3$ e $y_5 = 7/3$, e as colunas a elas associadas são linearmente independentes, é possível escrever:

$$A_5 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

Depois de calculados os valores de $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$, busca-se uma solução $z$

$$z = y + \theta\mu$$

$$\text{com } \mu^T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, -1]$$

tal que $cz \le cy$ e que tenha apenas 3 componentes positivas. Como no caso anterior, escolhe-se, primeiro, o sinal de $\theta$ para que $cz < cy$ e, depois, o valor de $\theta$ que anule uma das componentes de $z$, deixando os valores das demais variáveis não negativos (Obviamente, pela construção $z_4 = \cancel{y_4} = 0$ ; ao se caminhar pelo lado $BC$, em que $x_4 = 0$, o ponto encontrado será o vértice $C$. )