Universidade de São Paulo
Instituto de Física

EVIDÊNCIAS EXPERIMENTAIS DA NATUREZA QUÂNTICA DA RADIAÇÃO E DA MATÉRIA

AULA 03

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

2º. Semestre de 2023

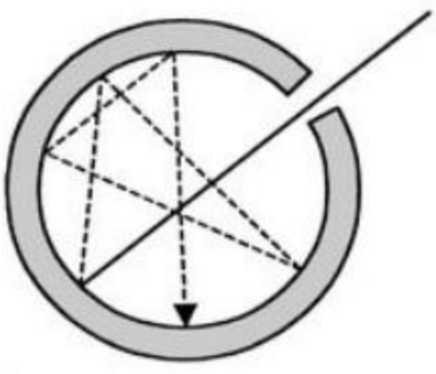
Monitores: Rodrigo Fernandes de Almeida
Samuel Pizzol

Radiação de corpo negro

Caso + simples

Corpo Negro

Objetos cuja superfície absorve toda a radiação incidente



Corpo ideal que absorve toda a radiação e não reflete nada, a radiação vinda do exterior entre na cavidade e é refletida várias vezes na parede até ser absorvida totalmente.

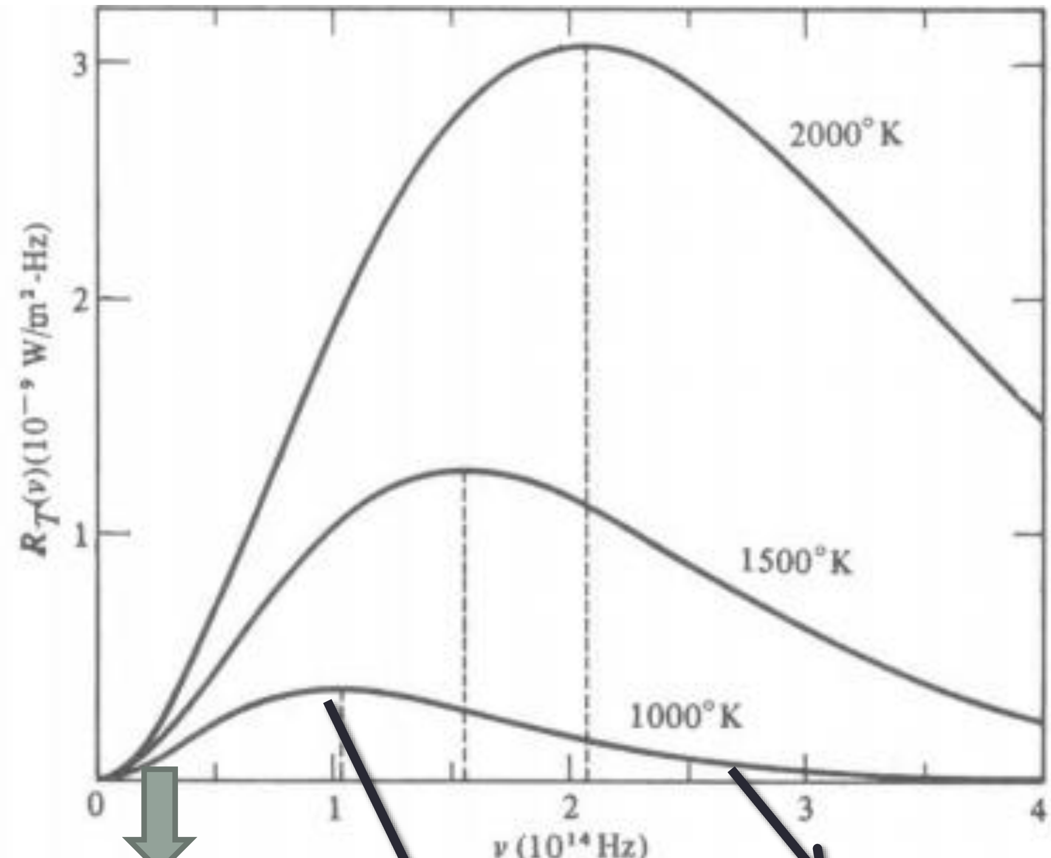
Verifica-se que todos os corpos negros à mesma temperatura emitem radiação térmica com o mesmo espectro

Todos os objetos que se comportam como um corpo negro emitem a mesma radiância espectral (universalidade) que depende da temperatura e não do material de que é feito

Radiação de corpo negro

- A Radiância espectral: $R_T(\nu)$ de um corpo em função da frequência da radiação.

A frequência em que a radiância é máxima varia linearmente com a temperatura. Potência total emitida por metro quadrado (área sob a curva) aumenta rapidamente com a temperatura



Potência irradiada é nula

Potência irradiada cai

Potência irradiada é máxima em $\nu = 1{,}1 \times 10^{14}$Hz

Radiação de corpo negro
Leis empíricas

- A Radiância espectral $R_T(\nu)$: função de distribuição da potência irradiada por unidade de área, em um intervalo de frequência, em função de ν e T.

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu)d\nu$$

Energia total emitida por unidade de tempo, por unidade de área da superfície do objeto

- Lei de Stefan anunciada em 1879

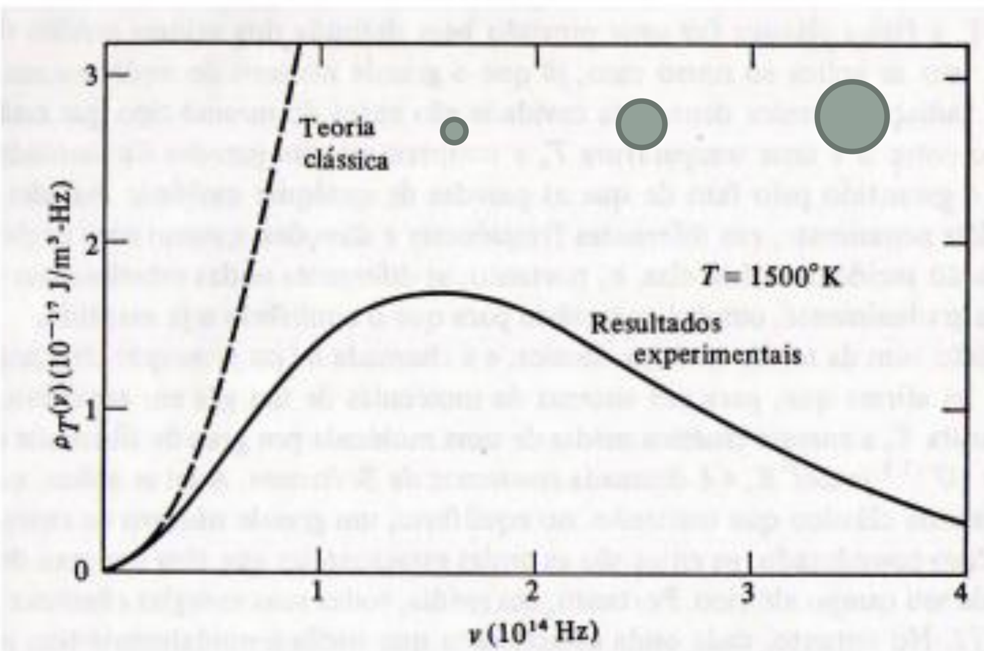
$$R_T = \sigma T^4$$

σ= 5,67x10^{-8} W/m^{2}K^4 (constante de Stefan-Boltzman) medida experimen.

- Lei de deslocamento de Wien (1893) $\nu_{\max} \approx T$

$$\lambda_{max} T = 2{,}898x10^{-3}\, mK$$

Dúvidas sobre o espectro de $R_T(\lambda)$:



Classicamente conseguimos explicar pequenos valores de ν

No início do século Ralyleigh-Jeans fizeram cálculo da densidade de energia da radiação da cavidade (ou do corpo negro) mas mostrou uma série de divergência entre a física clássica e os resultados experimentais

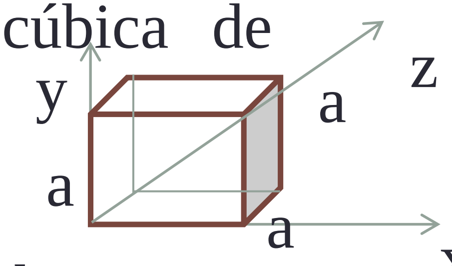
Calculo da densidade de energia usando ondas estacionárias

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$$

Na realidade $R(\lambda) = 1/4\ c\rho(\lambda)$

Aula passada: Radiação de corpo negro clássica

1) Tratamos o corpo negro como uma cavidade cúbica de superfícies metálicas contendo radiação eletromagnética



2) Radiação é refletida sucessivamente nas paredes e decomposta em três componentes

3) Ondas eletromagnéticas

$$E(x,t) = E_o sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) sen(2\pi \nu t)$$

só podem existir no interior dessa cavidade como ondas estacionárias, com nós nas paredes da cavidade :

$$sen\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) = 0 \qquad \left(\frac{2\pi a}{\lambda_x}\right) = n\pi$$

$$\lambda_x = \frac{2a}{n_x}$$

ou

$$\nu_x = \frac{n_x c}{2a}$$

$$\nu\lambda = c$$

4) número de ondas estacionárias que “cabem” dentro da cavidade com os diferentes valores de frequência ν: N(ν)dν

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$

5) Para obtermos a densidade de ondas $\rho_T(\nu)$,ecisamos multiplicar este valor pela energia média de cada onda e dividir pelo volume

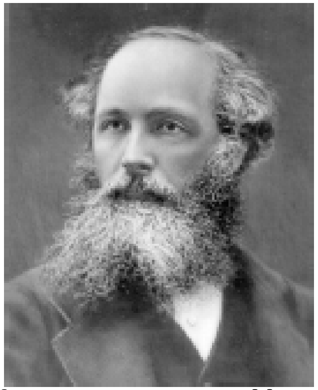
$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

Energia média de cada onda estacionária

- Vamos utilizar uma abordagem estatística para obter a energia média de cada onda estacionária
- Essa abordagem é válida pois estamos tratando de um sistema (corpo negro) que possui uma temperatura (T) bem definida

Abordagem estatística

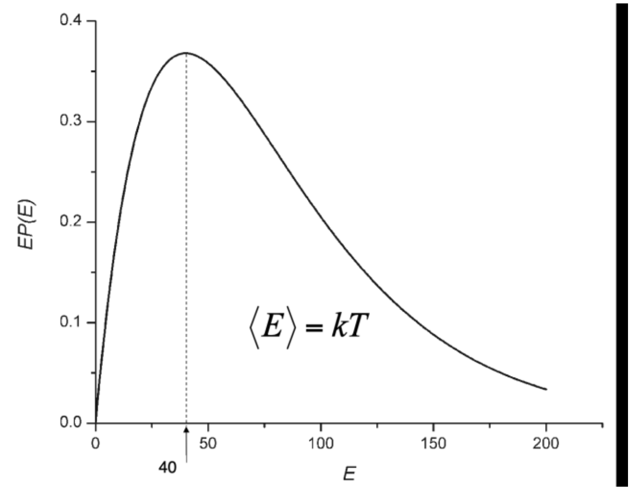
- Em meados do século XIX, assumindo que um gás é formado por pequenas unidades (moléculas), Maxwell calculou a distribuição de velocidades dessas moléculas no estado de equilíbrio
- Em seguida, ele correlacionou essa distribuição com propriedades macroscópicas do gás, como temperatura e pressão



Boltzmann e Gibbs deram continuidade ao trabalho de Maxwell, estabelecendo as bases da interpretação microscópica para propriedades macroscópicas de sistemas físicos

O teorema de equipartição de energia diz que cada grau de liberdade tem 1/2KT para o oscilador harmônico ($K=1{,}38\times10^{-23}$J/K *constante de Boltzman*). Então para a energia cinética + potencial temos $\bar{\varepsilon} = kT$

Distribuição de Maxwell-Boltzmann



Com isso, a energia média dos constituintes do sistema KT

Então a densidade de energia dentro do corpo negro devido às ondas eletromagnéticas, que é dada por:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E \rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi \cancel{a^3}}{c^3}\nu^2 d\nu \frac{kT}{\cancel{a^3}}$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT \, d\nu$$

que é a chamada lei de Rayleigh-Jeans

Lembrando que

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

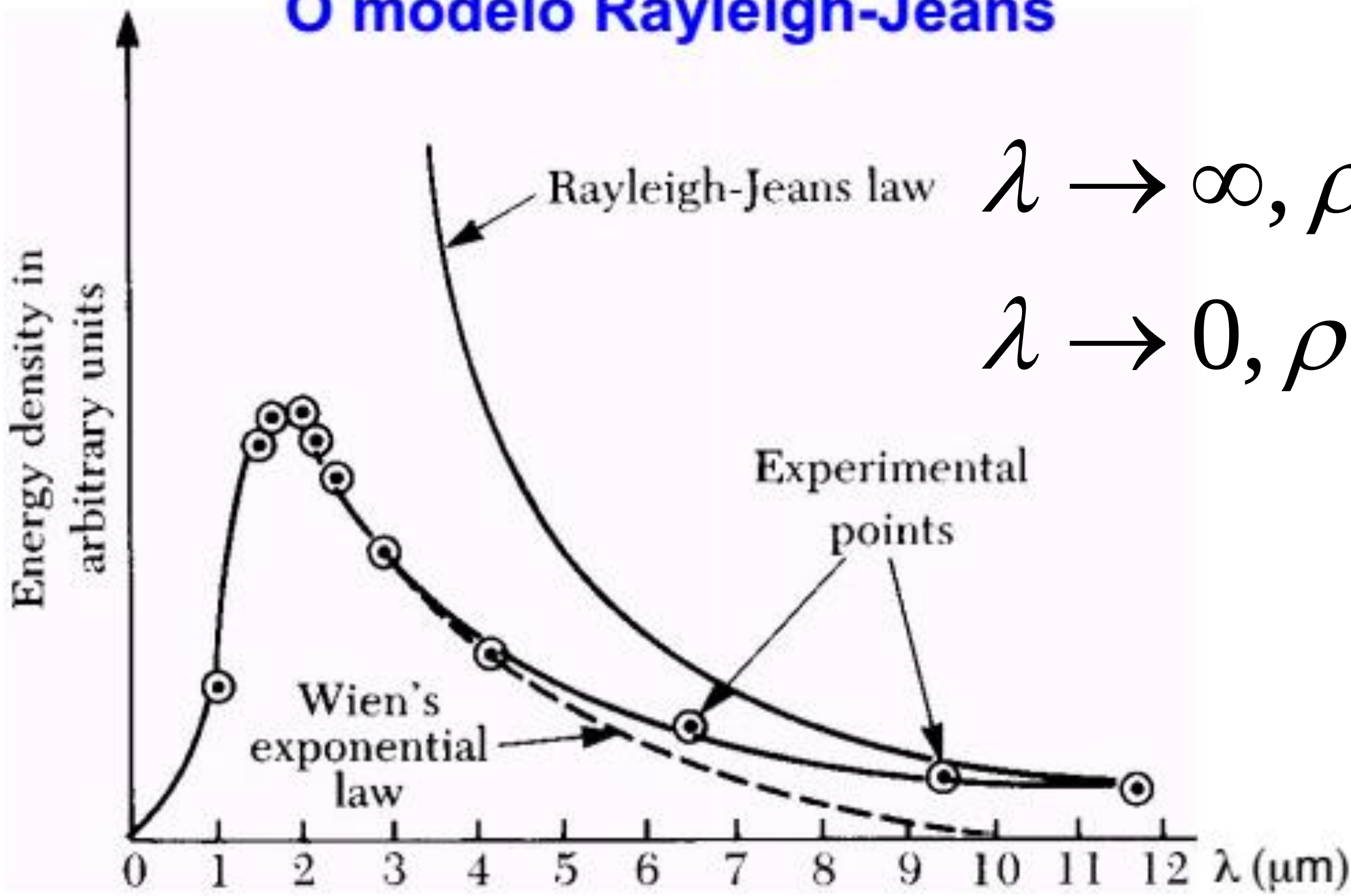
$$\boxed{\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \bar{\varepsilon}\, d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kTd\nu}$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi kT}{c^3}\frac{c^2}{\lambda^2}\left[-\frac{c}{\lambda^2}\right]d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}kT.d\lambda$$

Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro

O modelo Rayleigh-Jeans

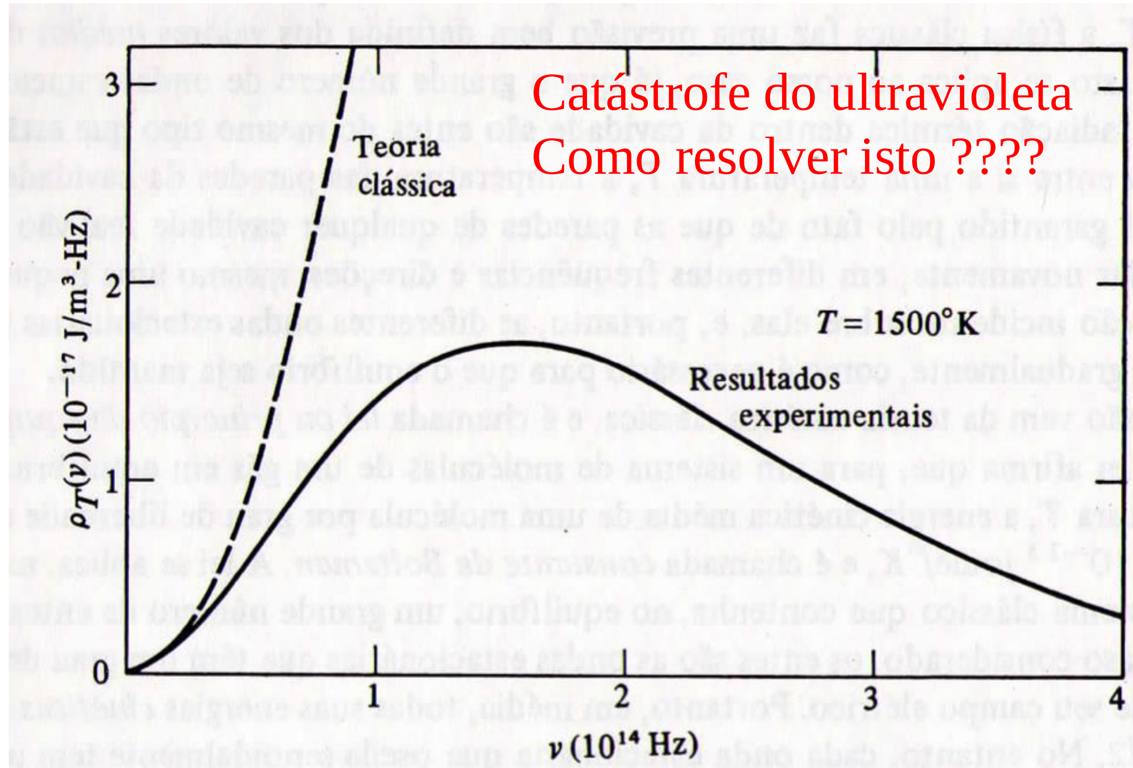


$$\lambda \to \infty, \rho(\lambda) \to 0$$

$$\lambda \to 0, \rho(\lambda) \to \infty$$

catástrofe do ultravioleta

Cálculo da densidade de energia da radiação da cavidade (ou do corpo negro) mostrou uma série de divergência entre a física clássica e os resultados experimentais



Catástrofe do ultravioleta

Como resolver isto ????

Planck notou que para $\nu \rightarrow 0$, a solução clássica é admissível:

$$\langle E \rangle = kT$$

Porém, para $\nu \rightarrow \infty$, deve-se ter:

$$\langle E \rangle \rightarrow 0$$

Em 1900, Max Planck, que tinha contato com físicos experimentais que estudavam o problema da radiação do corpo negro, propõe um equação que descreve perfeitamente os dados...

Planck inicialmente supôs que as paredes da cavidade eram constituídas de “pequenos osciladores” que trocam energia com a radiação mantendo o equilíbrio térmico

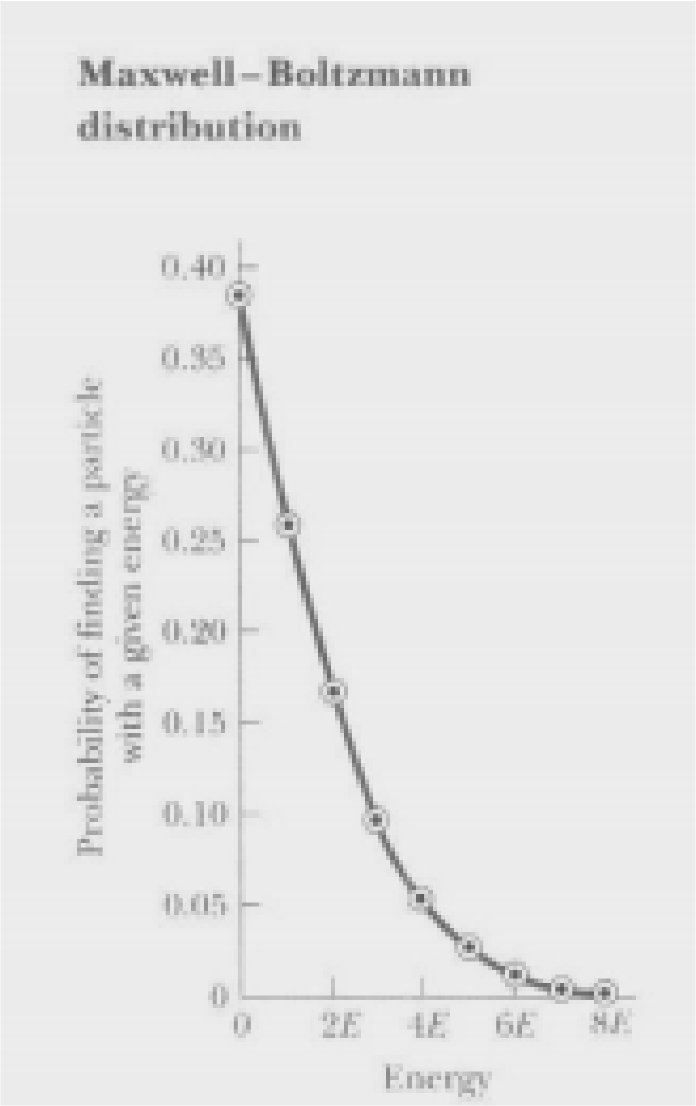
Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Nova proposta: tratar a energia como uma variável discreta e não mais contínua (sempre considerado na física clássica). A parede aquecida do corpo negro (cavidade), possui ressonadores vibrando com várias frequências diferentes cada um emitindo luz com mesma frequência que a frequência de vibração

$$\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = \Delta\varepsilon, \varepsilon_2 = 2.\Delta\varepsilon, ...$$

Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Na abordagem da estatística clássica de Maxwell Boltzmann



$$P(\varepsilon)d\varepsilon = Ae^{-\varepsilon/kT}d\varepsilon$$

Probabilidade de encontrar um dado com energia entre ε e ε+dε

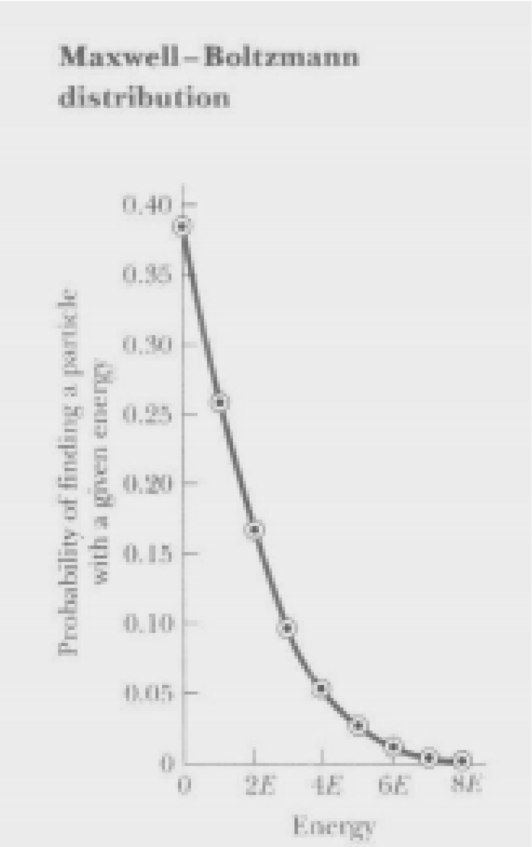
•O valor máximo desta função é 1/kT para ε=0

•P(ε)dε decresce suavemente se aproximando do zero quando

$$\varepsilon \rightarrow \infty$$

Queremos agora calcular o valor da energia média emitida no espectro correspondente a este intervalo de frequência

Para calcularmos o valor médio da energia precisamos saber a distribuição de energia ⇨ vamos usar uma abordagem estatística MAXWELL-BOLTZMANN



$$n(\varepsilon) = Ae^{-\varepsilon/E_o}$$

O valor médio

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty A\varepsilon e^{-\varepsilon/E_o}\,d\varepsilon}{\int_0^\infty Ae^{-\varepsilon/E_o}\,d\varepsilon} \qquad \frac{1}{E_o} = \alpha$$

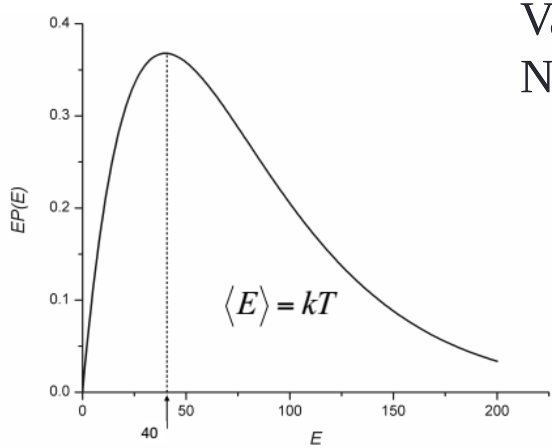
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon\alpha}\,d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\varepsilon\alpha}\,d\varepsilon} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} = E_0$$

Proposta de Planck

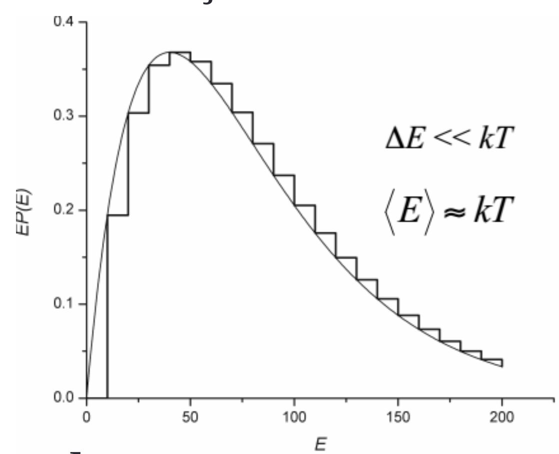
- Planck fez a suposição que esses osciladores poderiam assumir apenas alguns valores específicos de energia:

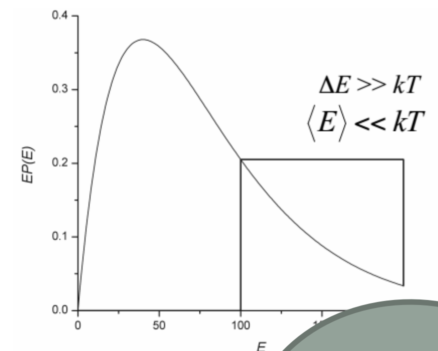
$$E_1 = 0,\ E_2 = \Delta E,\ E_3 = 2 \cdot \Delta E,\ E_4 = 3 \cdot \Delta E, \ldots$$

- tratar a energia como uma variável discreta e não mais contínua
- Sua intenção era fazer com que $\Delta E \rightarrow 0$ para recuperar a distribuição contínua de energia da física clássica



Valor de energia media quase igual ao clássico
Não faz diferença se é discreto ou contínuo





Resumindo:
E~kT quando a diferença de energia sucessiva for pequena
E~0 quando a diferença de energia sucessiva ΔE for grande

Há uma proporcionalidade entre ΔE ~ν

Teoria de Planck: matematicamente

$$\int \bar{\varepsilon} \rightarrow \sum \bar{\varepsilon}$$

- Considerando que temos n_i osciladores com ε_i e tomando as energias discretas ε_i em intervalos regulares: $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_1=\Delta\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\Delta\varepsilon$

$$n_i(\varepsilon) = n_0 e^{-\varepsilon_i / kT}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum A\varepsilon_i e^{-\varepsilon_i / E_o}}{\sum A e^{-\varepsilon_i / E_o}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{n_o\varepsilon_o + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ...}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_o 0 + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + ...}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon / kT}\Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon / kT} 2\Delta\varepsilon + ...}{N}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon/kT} 2\Delta\varepsilon + ...}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon(1 + 2e^{-\Delta\varepsilon/kT} + 3e^{-2\Delta\varepsilon/kT} .....)}{N}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + ...$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{N} \frac{1}{(1 - e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$soma = \frac{1}{(1-x)^2}$$

O que é????

$$N = \sum n_i = n_o + n_1 + n_2 + ...$$

$$N = n_o + n_o e^{-\Delta\varepsilon/kT} + n_o e^{-2\Delta\varepsilon/kT} + ...$$

$$N = n_o(1 + x + x^2 + ...) = \frac{n_o}{(1-x)}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{N}\frac{1}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$N = n_o(1 + x + x^2 + \ldots.) = \frac{n_o}{(1-x)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\cancel{n_0} e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{1}\frac{\cancel{\left(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT}\right)}}{\cancel{n_0}}\frac{1}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})^{\cancel{2}}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1}$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT\to 0} 1+\frac{\Delta\varepsilon}{kT} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1} = \frac{\Delta\varepsilon}{1+\frac{\Delta\varepsilon}{kT}-1} = kT$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT\to\infty} \infty \qquad \bar{\varepsilon} = 0$$

~ kT para ΔE pequeno ($\nu \to 0$)

~ 0 para ΔE grande ($\nu \to \infty$)

Teoria de Planck: matematicamente

A densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda é dada por:

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT.d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \overline{\varepsilon}.d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\lambda\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT} - 1}.d\lambda$$

Teoria de Planck: matematicamente

A densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda é dada por:

Escrevendo $\Delta\varepsilon = h\nu$ e $\lambda\nu = c$

c é a velocidade da luz

h = constante de Planck

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{hc/\lambda kT}-1}.d\lambda$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^5}{c^5}\frac{ch\nu}{\nu e^{h\nu/kT}-1}.\frac{c}{\nu^2}d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.d\nu$$

$h = 6{,}63\times10^{-34}$ J.s ou $4{,}14\times10^{-15}$ eV.s

$\Delta\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$

$hc = 12{,}4\times10^{-7}$ eV.m=1240ev.nm

Fórmula de Planck

estatística de Maxwell Boltzmann

Usando a proposta de Planck $P_{MB}(E) = Ae^{-E_i/k_BT}$

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_{MB}(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P_{MB}(E_n)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

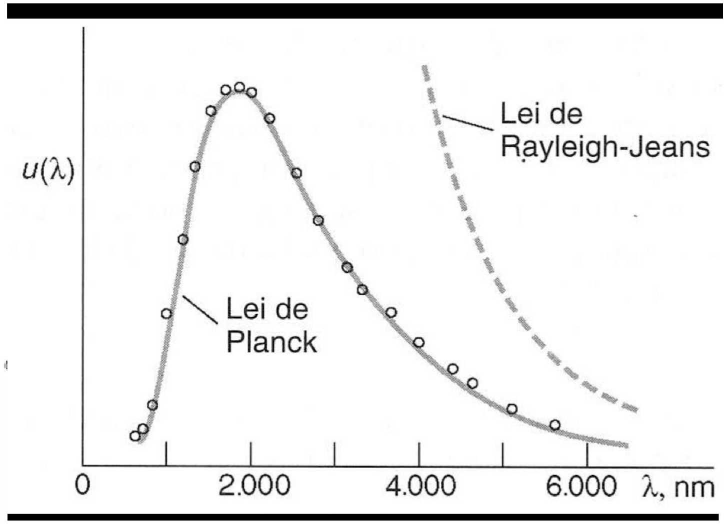
E usando que

$$\rho_T(\nu)d\nu = \langle E\rangle \frac{N(\nu)d\nu}{V}$$

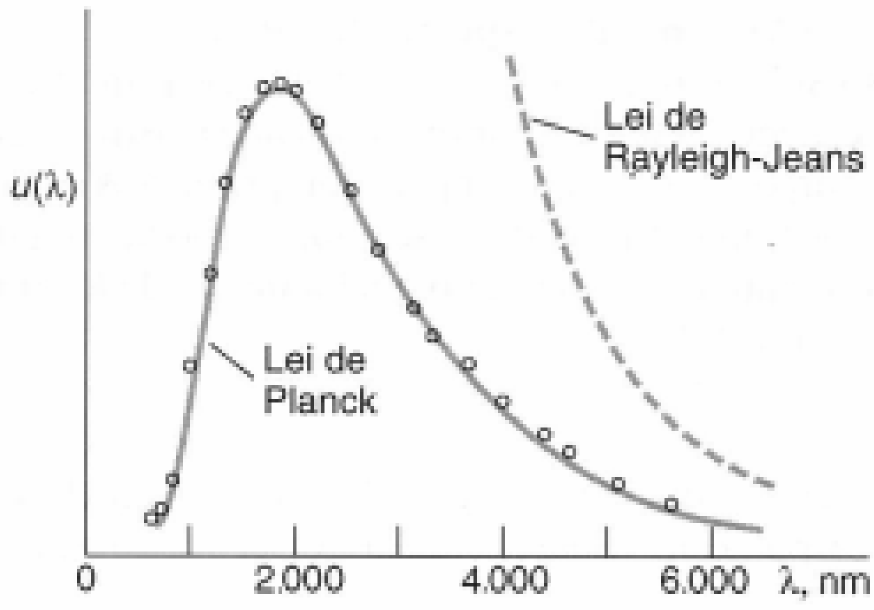
Temos:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu$$

Que reproduz os dados com grande precisão quando: $h = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$



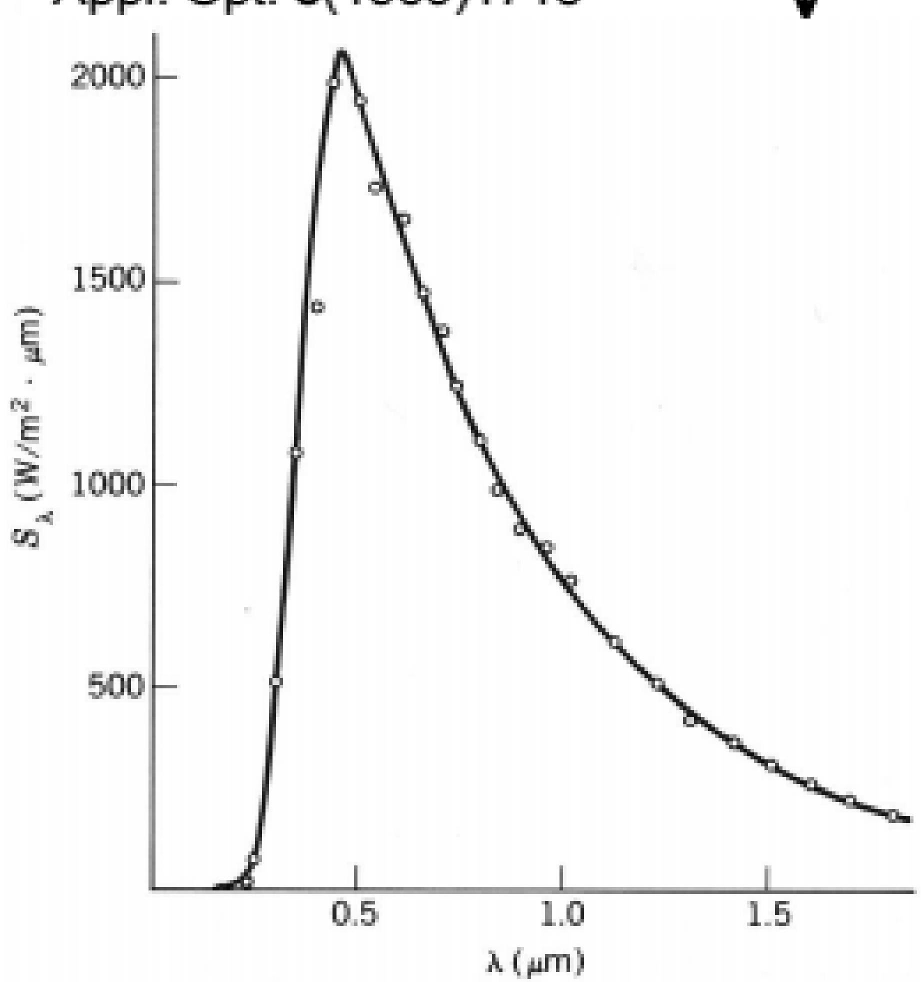
Comparação entre as teorias de Planck e de Wien e as medidas de Coblentz (~1915)



Comparação entre as teorias de Planck e de Wien e as medidas de Coblentz (~1915)

Radiância espectral do Sol

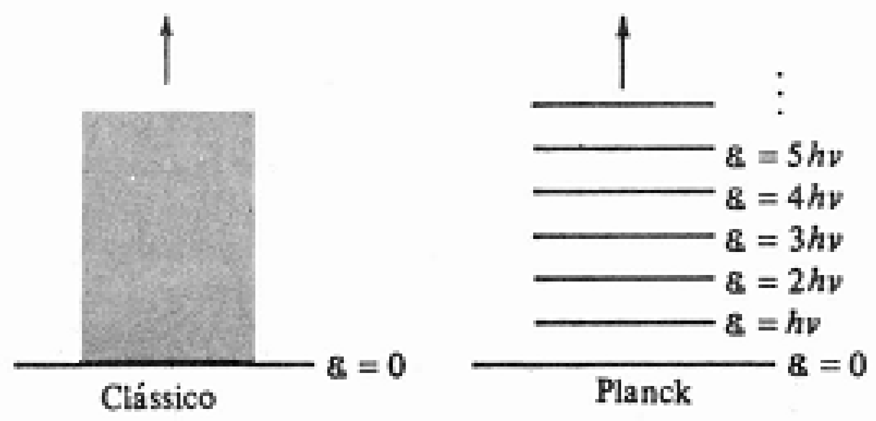
M.P. Thekaekara, *et al.*,
Appl. Opt. **8**(1969)1713



Implicações do resultado de Planck

- Qual o significado físico da hipótese de Planck?
- Ela impõem que os pequenos osciladores que constituem as paredes da cavidade e estão em equilíbrio com a radiação, só podem assumir certos valores discretos de energia:

$E = nh\nu$



Exercícios:

1) De acordo com a Lei de Planck, qual é a energia média de um oscilador cuja energia é kT?
2) Use a lei de Planck para mostrar que a densidade total de energia de um corpo negro é proporcional a T^4 como afirma a Lei de Stefan-Boltzmann

Exercícios:

1) De acordo com a Lei de Planck, qual é a energia média de um oscilador cuja energia é kT?

1) Pela Lei de Planck temos:

$$\overline{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon / KT} - 1} = \frac{KT}{e^{KT/KT} - 1} = \frac{KT}{e^{1} - 1} = 0{,}532KT$$

Classicamente o que tínhamos era eu a energia de um oscilador harmônico era E=KT para todas as frequências, e agora não é.

Exercícios:

2)Use a lei de Planck para mostrar que a densidade total de energia de um corpo negro é proporcional a T^4 como afirma a Lei de Stefan-Boltzmann

A Lei de Stefan-Boltzmann diz que:

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}6705x10^{-8} WK^4 / m$$

A densidade de energia total pode ser calculada integrando a função distribuição de densidade de energia para todos os comprimentos de onda

$$R_T = U = \int_0^\infty \rho(\lambda) d\lambda$$

$$\frac{hc}{\lambda KT} = x$$

$$\lambda \to 0, x \to \infty$$

$$\lambda \to \infty, x \to 0$$

$$\rho(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda KT} - 1} d\lambda$$

$$dx = -\frac{hc}{\lambda^2 KT}$$

muda=-se os extremos da integral

Continuar.... como exercício

Objetivo da Parte Experimental

Verificar **se** a curva de Planck de fato descreve a radiância espectral emitida por uma lâmpada de filamento (o corpo negro que utilizaremos) e, **caso isso seja observado, em que condições isso ocorre**

Lâmpada de Filamento

- Lâmpada: filamento metálico envolto por um bulbo de vidro selado que contém um gás a baixa pressão.

- O filamento é um elemento resistivo não linear, que se aquece com a passagem de uma corrente elétrica (efeito Joule).

- O filamento mais comum é o de tungstênio, pois ele se aquece a uma temperatura suficientemente elevada para que luz visível seja emitida.

Efeito fotoelétrico

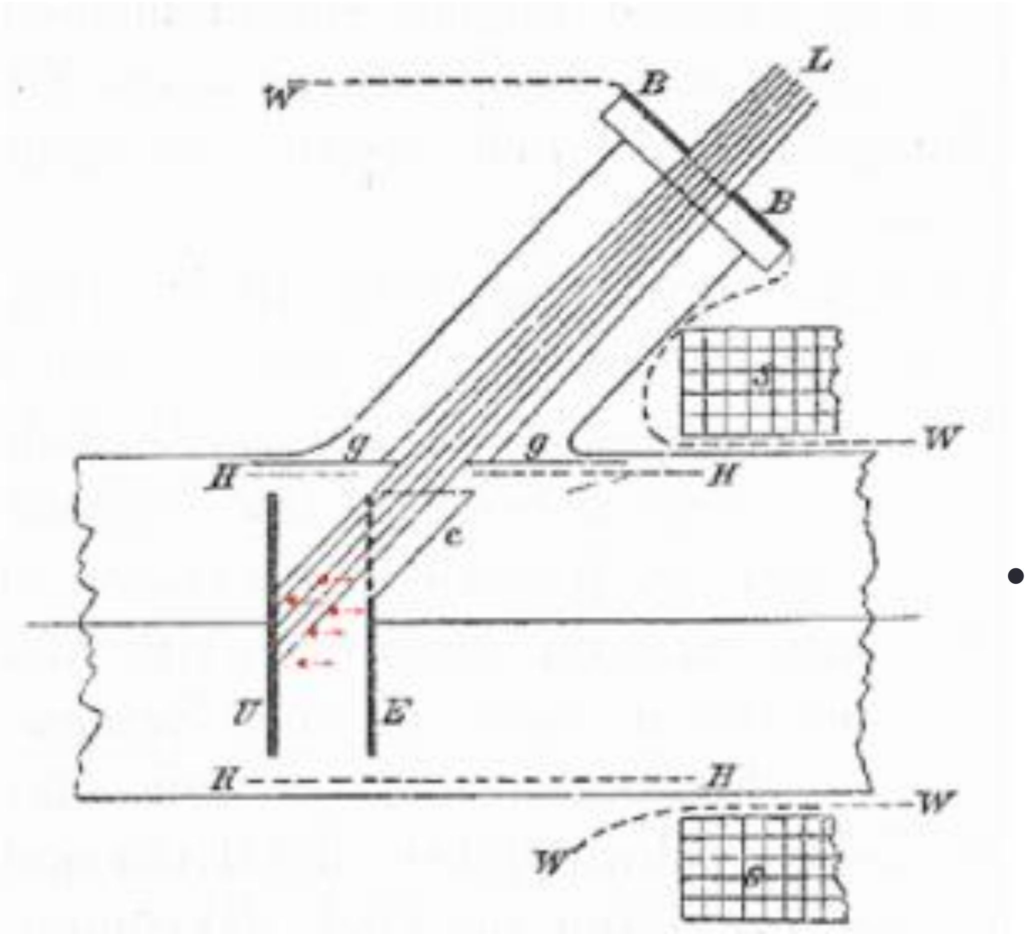
- Ponto de partida para a confirmação da existência de ondas eletromagnéticas foram os experimentos de Hertz (1886-1887).
- No entanto Hertz já havia notado em seu experimento que uma descarga elétrica entre dois eletrodos ocorria mais facilmente quando havia incidência de luz ultravioleta (UV) sobre um dos eletrodos.

- Este efeito foi utilizado por Einstein mais tarde para contradizer outros aspectos da teoria eletromagnética clássica

- Lenard (antecessor a Einstein) realizando experimentos com luz UV observou esta facilidade de descarga devido a luz e que elétrons eram emitidos da superfície do catodo

Efeito fotoelétrico

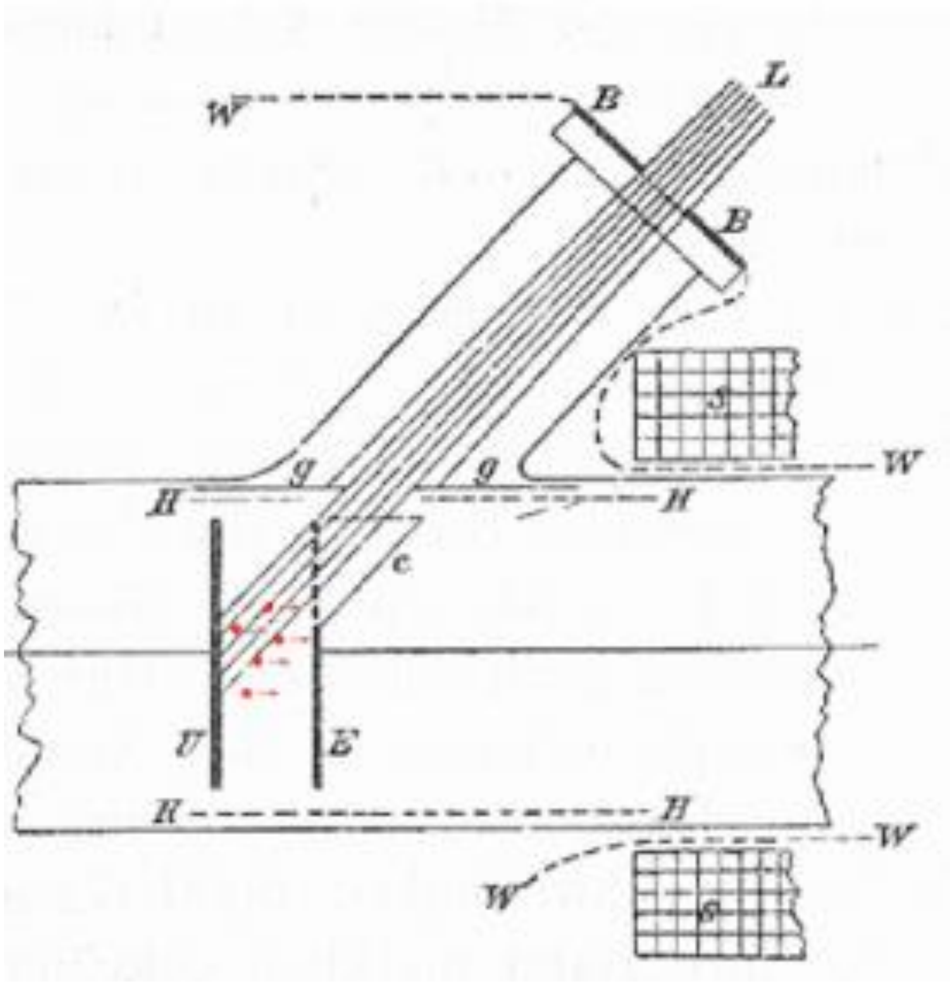
- O Experimento de Lenard, Annales de Physique, Leipzig 8, 1902 pp149,



O experimento mede a corrente gerada entre os eletrodos e a energia cinética dos elétrons (recém descobertos - 1897)

- O que podemos esperar deste experimento – física clássica explica?

Resultados experimentais



- O número de elétrons retirados é proporcional a energia da luz incidente

- A energia cinética destes é independente da intensidade de luz emitida