Evidências Experimentais da Natureza Quântica

Radiação Térmica e Emissão de Corpo Negro

Aula 02

Rosangela Itri itri@if.usp.br

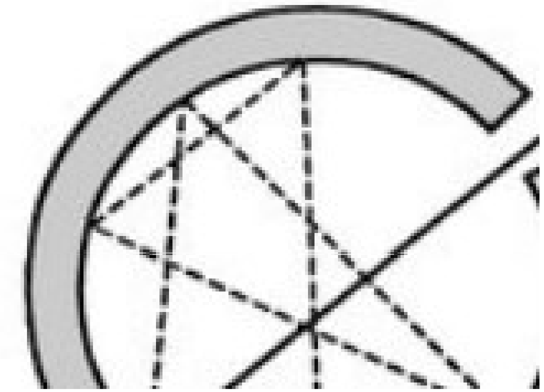
Contribuições: profa Márcia Rizzuto e prof Marcelo Munhoz

2023

Radiação de corpo negro

Caso + simples

Corpo Negro



Corpo ideal que absorve toda a radiação e não reflete nada. **A radiação vinda do exterior entre na cavidade e é refletida várias vezes na parede até ser absorvida totalmente.**

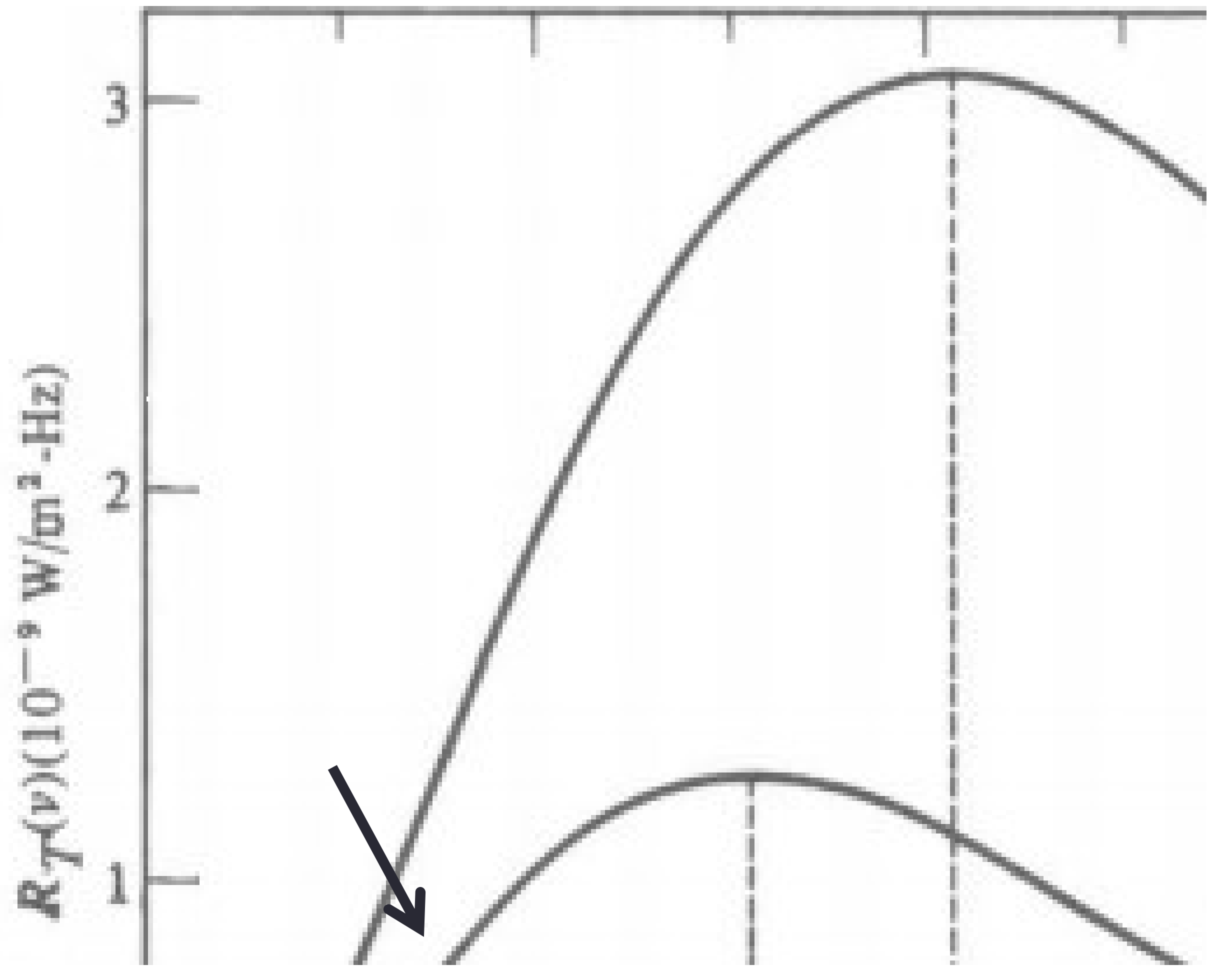
Verifica-se que todos os corpos negros à mesma temperatura emitem radiação térmica com o mesmo espectro

Radiação de corpo negro

- A Radiância espectral: $R_T(\nu)$ de um corpo em função da frequência ν da radiação.

A frequência em que a radiância é máxima varia linearmente com a temperatura.

Potência total emitida por metro quadrado (área sob a curva) aumenta rapidamente com a temperatura



Potência irradiada é máxima em $\nu = 1{,}1\times10^{14}$Hz

Radiação de corpo negro

- **A Radiância espectral $R_T(\nu)$** : função de distribuição da potência irradiada por unidade de área, em um intervalo de frequência ν, em função de ν e T.

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu)\,d\nu$$

Esta equação nos diz que a **potência emitida, por unidade de área por unidade de frequência**, por um corpo negro depende somente da temperatura e da frequência da luz e não da constituição física e química do corpo negro

O crescimento rápido de R_T com a temperatura é chamada de Lei de Stefan anunciada em 1879

$$R_T = \sigma T^4$$

σ= $5{,}67\times10^{-8}$ W/m^2K^4 (**constante de Stefan-Boltzman**) medida experimental

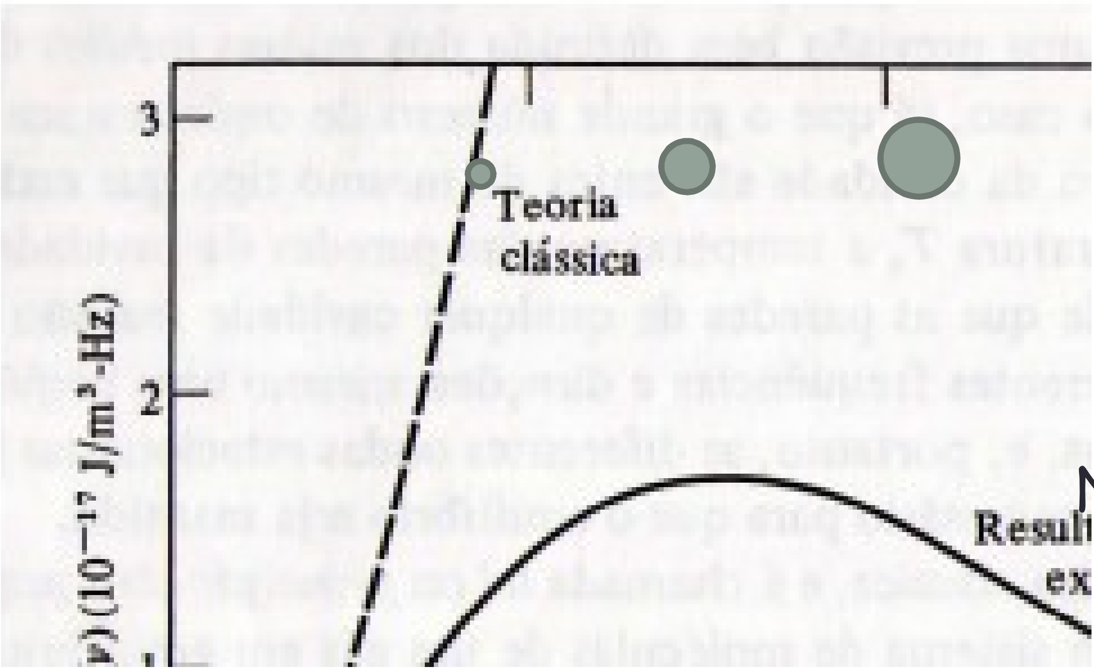
Radiação de corpo negro

Resultado-Lei de deslocamento de Wien (1893)

$$\nu_{\max} \approx T$$

$\boxed{\lambda_{max}.\ T = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m.K}$

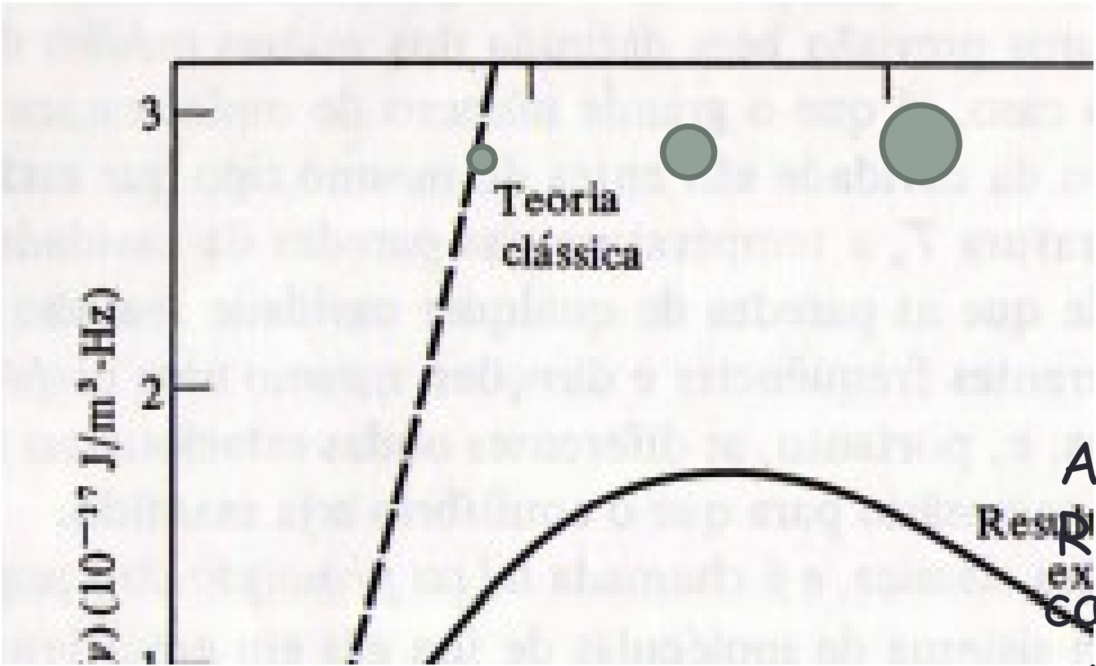
Dúvidas sobre o espectro de $R_T(\lambda)$:



Classicamente conseguimos explicar pequenos valores de ν

No início do século **Rayleigh-Jeans** fizeram cálculo **da densidade de energia da radiação** da cavidade (ou do corpo negro): **divergência entre a física clássica e os resultados experimentais**

Dúvidas sobre o espectro de $R_T(\lambda)$:



Classicamente conseguimos explicar pequenos valores de ν

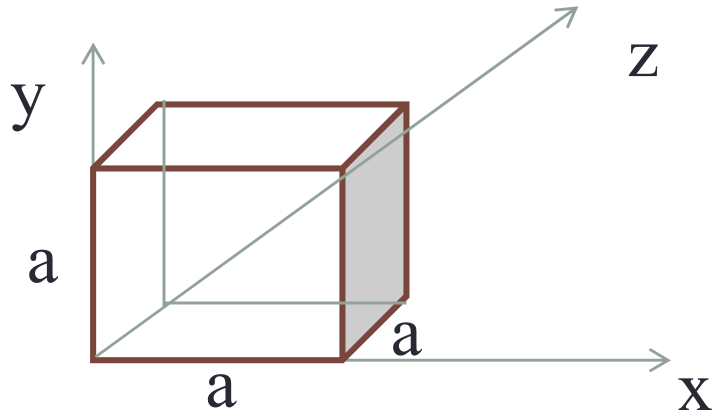
A função de distribuição espectral $R(\nu)$ para um corpo negro envolve o calculo da **densidade de energia** de ondas eletromagnéticas no interior da cavidade

$$\rho_T(\nu) \propto R$$

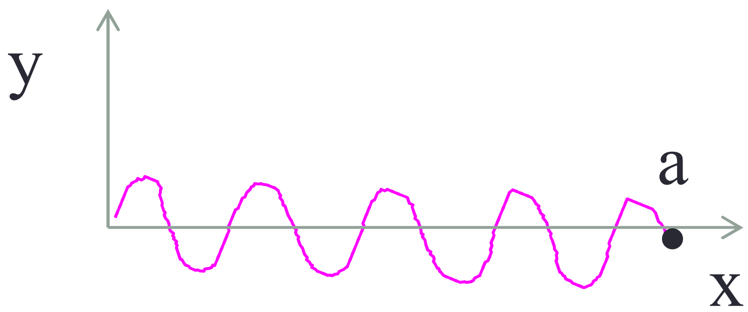
Na realidade $R(\lambda) = 1/4\ c\rho(\lambda)$

Suposições:

1) Cavidade com paredes metálicas contendo radiação eletromagnética (cubo com aresta a)



2) Radiação é refletida sucessivamente nas paredes e decomposta em três componentes



3) Como as paredes opostas são perpendiculares, as três componentes da radiação não se misturam e podemos tratá-las separadamente

4) Onda estacionária dentro da cavidade:

$$E(x,t) = E_o sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) sen(2\pi\nu t)$$

Como um oscilador harmônico

Nas paredes temos os nós com amplitude zero

$\boxed{x=0}$ $$sen\left(\frac{2\pi 0}{\lambda}\right) = 0$$

$\boxed{x=a}$ $$sen\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) = 0$$

Isto só é possível quando $\left(\dfrac{2\pi a}{\lambda_x}\right) = n\pi$

$$n_x = \frac{2a}{\lambda_x} \quad \text{ou} \quad n_x = \frac{2a\nu_x}{c} \qquad (\nu\lambda = c)$$

5) O que queremos é o número de frequências possíveis entre ν e ν +d ν

$$N(\nu)d\nu$$

6) O número de onda dentro da cavidade

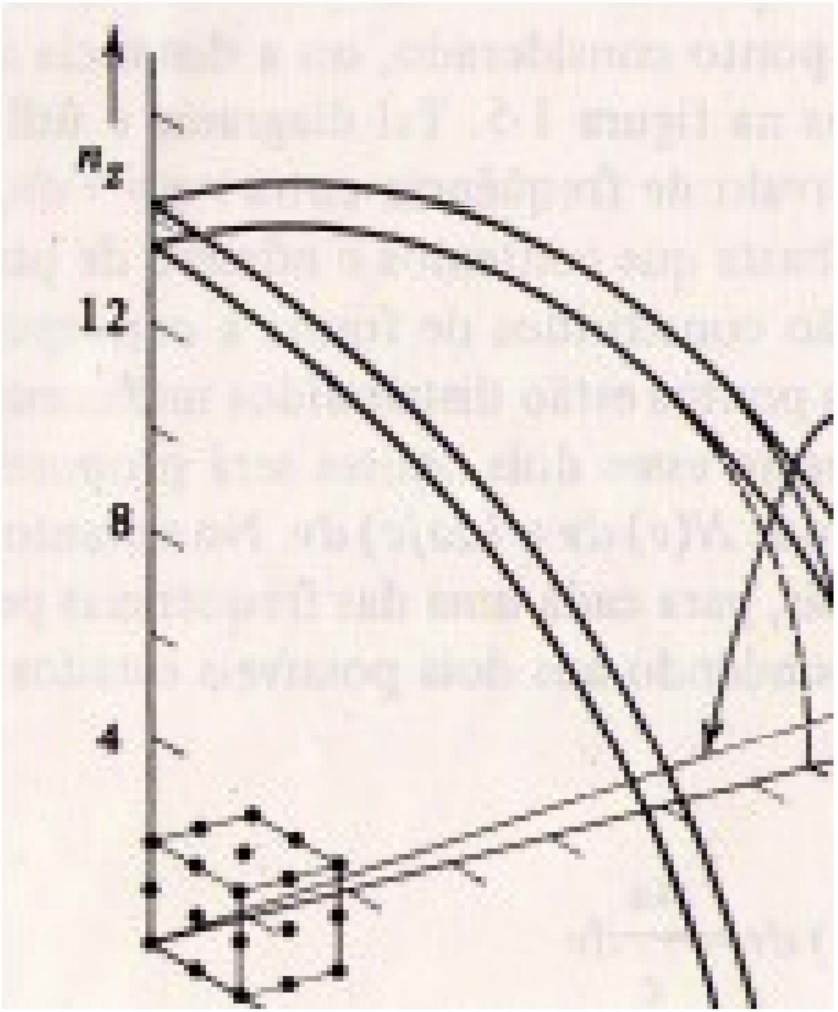
Caso tridimensional (como exercício)

$$N(\nu)d\nu = (2)\frac{\pi}{2}\left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$\boxed{N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\cdot V}$$

AREA DA SUPERFÍCIE DA ESFERA

6) O número de onda dentro da cavidade



Caso tridimensional

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{c}\nu$$

$$dr = \frac{2a}{c}d\nu$$

2 ondas possíveis para cada frequência

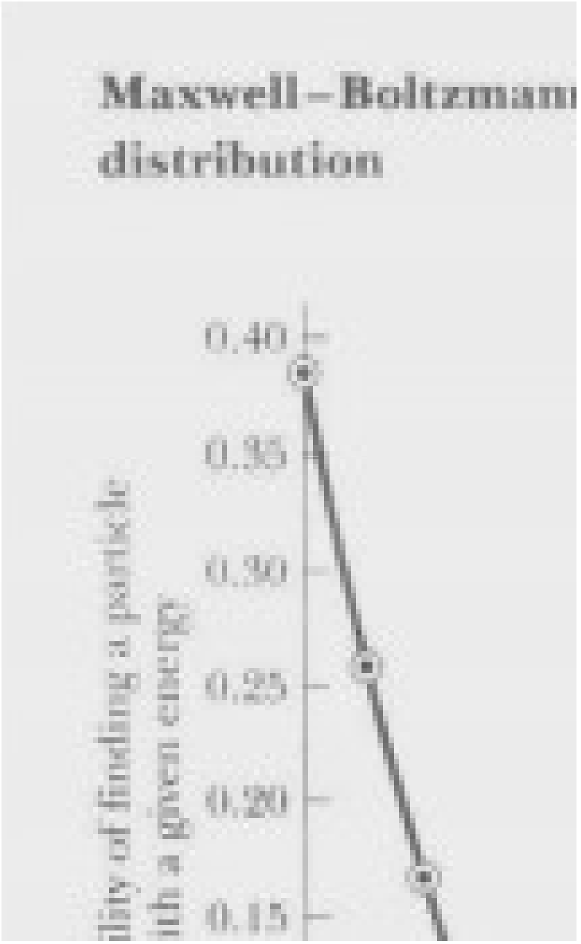
$$N(r)dr = \frac{1}{8}4\pi r^2 dr$$

$$N(\nu)d\nu = (2)\frac{\pi}{2}\left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V$$

Queremos agora calcular o valor da energia média emitida no espectro correspondente a este intervalo de frequência

Para calcularmos o valor médio da energia precisamos saber a distribuição de **energia** → **vamos usar uma abordagem estatística MAXWELL-BOLTZMANN**



$$n(\varepsilon) = Ae^{-\varepsilon / E_o}$$

O valor médio

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty A\,\varepsilon e^{-\varepsilon / E_o}\, d\varepsilon}{\int_0^\infty A e^{-\varepsilon / E_o}\, d\varepsilon} \qquad \frac{1}{E_o} = \alpha$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon\alpha}\, d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\varepsilon\alpha}\, d\varepsilon}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon\alpha} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\alpha} d\varepsilon} = \frac{1/\alpha^2}{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Como $\frac{1}{E_o} = \alpha$

$$\boxed{\overline{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} = E_0}$$

Lembrando que :

$$-\frac{d}{d\alpha}\ln\int e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon = \frac{-\int \frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon}{\int e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon} = \frac{\int \varepsilon e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon}{\int e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon}$$

como

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty A\,\varepsilon e^{-\varepsilon/E_o}\,d\varepsilon}{\int_0^\infty A e^{-\varepsilon/E_o}\,d\varepsilon}$$

Então posso escrever:

$$-\frac{d}{d\alpha}\ln\int e^{-\alpha\varepsilon}\,d\varepsilon = \overline{\varepsilon}$$

$$-\frac{d}{d\alpha}\ln\left[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha\varepsilon}\Big|_0^{00}\right] = -\frac{d}{d\alpha}\ln\left[\frac{1}{\alpha}\right] =$$

$$-\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha\left(\frac{-1}{\alpha^2}\right)$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} = E_0$$

Radiação de corpo negro - Clássico

O teorema de equipartição de energia diz que cada grau de liberdade tem 1/2kT para o oscilador harmônico ($k=1{,}38\times10^{-23}$J/K *constante de Boltzman*). Então para a energia cinética + potencial temos

$$\bar{\varepsilon} = kT$$

A densidade de energia por unidade de volume entre ν e $\nu+d\nu$

(Energia média por onda vezes o nº de ondas dividido pelo volume da cavidade)

Lembrando que:

$$\boxed{N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\cdot V}$$

$$\boxed{\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\bar{\varepsilon}\,d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kTd\nu}$$

Esta a fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro

Radiação de corpo negro - Clássico

O teorema de equipartição de energia diz que cada grau de liberdade tem 1/2KT para o oscilador harmônico ($K=1,38 \times 10^{-23}$J/K *constante de Boltzman*). Então para a energia cinética + potencial temos $\overline{\varepsilon} = kT$

A densidade de energia por unidade de volume entre ν e ν+dν

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{N(\nu)d\nu\overline{\varepsilon}}{vol}$$

Energia média por onda vezes o nº de ondas dividido pelo volume da cavidade

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2 d\nu \frac{kT}{a^3}$$

$$\boxed{\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kTd\nu}$$

Esta a fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro

Ainda podemos escrever:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda\nu = c$$

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$$

$$\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d\rho(\nu)}{d\nu}$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi kT}{c^3}\frac{c^2}{\lambda^2}\left[-\frac{c}{\lambda^2}\right]d\lambda$$

$$\boxed{\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}kT.d\lambda}$$

Lembrando que

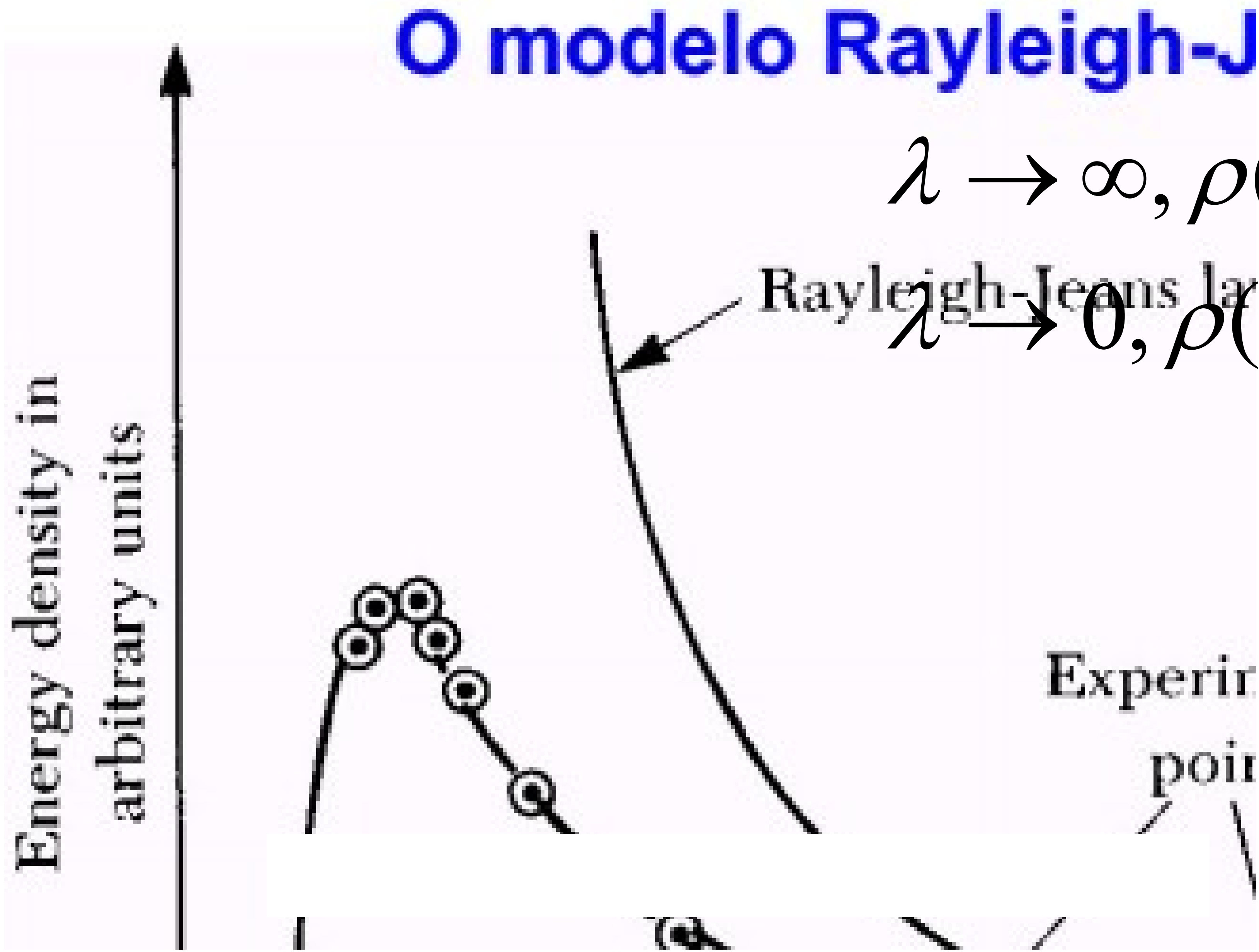
$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\boxed{\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \bar{\varepsilon}\, d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kTd\nu}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_T(\lambda)d\lambda &= -\frac{8\pi kT}{c^3}\frac{c^2}{\lambda^2}\left[-\frac{c}{\lambda^2}\right]d\lambda \\ \rho_T(\lambda)d\lambda &= \frac{8\pi}{\lambda^4}kT.d\lambda \end{aligned}}$$

Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro



$$\lambda \rightarrow \infty, \rho(\lambda) \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow 0, \rho(\lambda) \rightarrow \infty$$

catástrofe do ultravioleta

Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Discrepância entre teoria e dados experimentais, como solucionar???
- Baixas frequências o modelo é satisfatório

$$\bar{\varepsilon}_{\nu \to 0} \to kT$$

Energia total média tende a kT para baixas frequências ou altos comprimentos de onda

•Para altas frequências ou pequenos comprimentos de onda o modelo falha, gostaríamos de ter $\bar{\varepsilon}_{\nu \to \infty} \to 0$

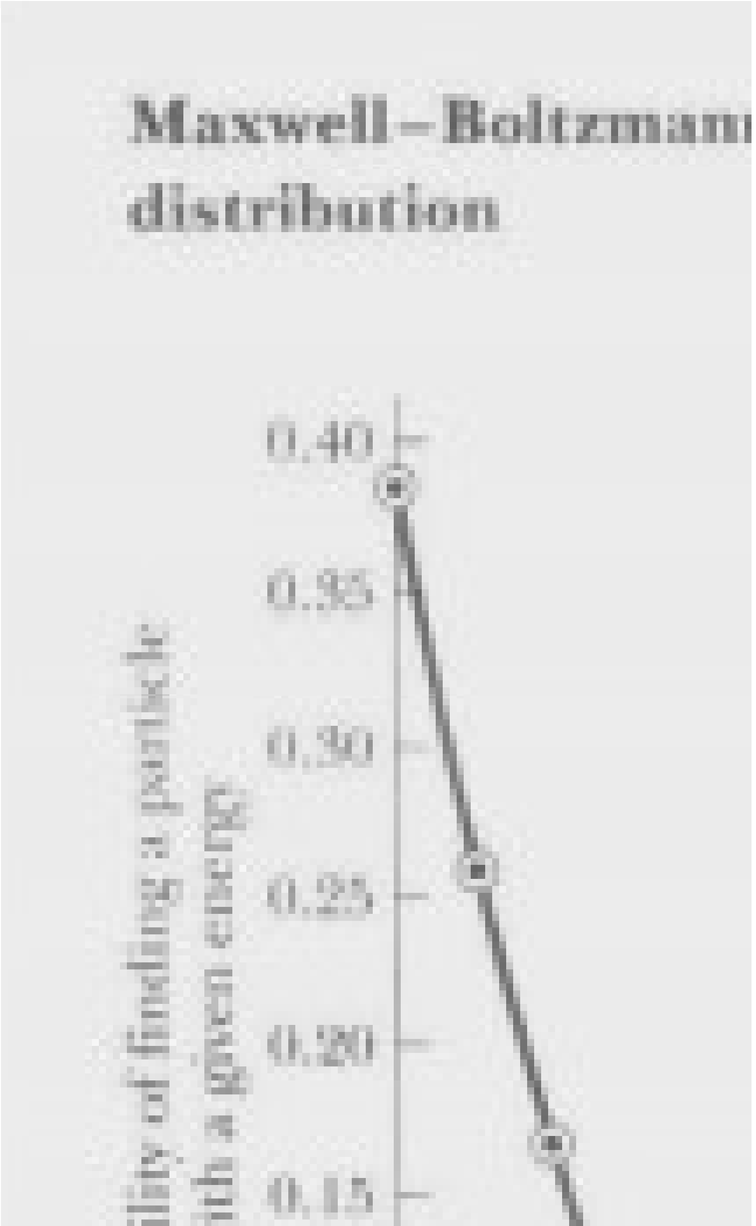
Teoria de Planck da radiação da cavidade

•Nova proposta: tratar a energia como uma variável discreta e não mais contínua (sempre considerado na física clássica). A parede aquecida do corpo negro (cavidade), possui ressonadores vibrando com várias frequências diferentes cada um emitindo luz com mesma frequência que a frequência de vibração

$$\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = \Delta\varepsilon, \varepsilon_2 = 2.\Delta\varepsilon, ...$$

Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Na abordagem da estatística clássica de Maxwell



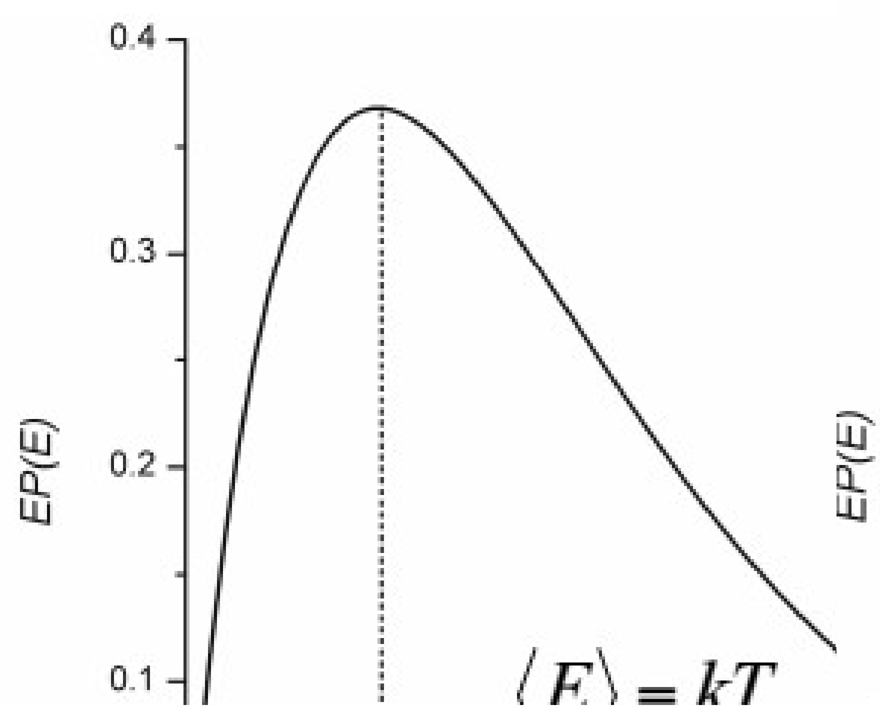
$$P(\varepsilon)d\varepsilon = Ae^{-\varepsilon / kT}d\varepsilon$$

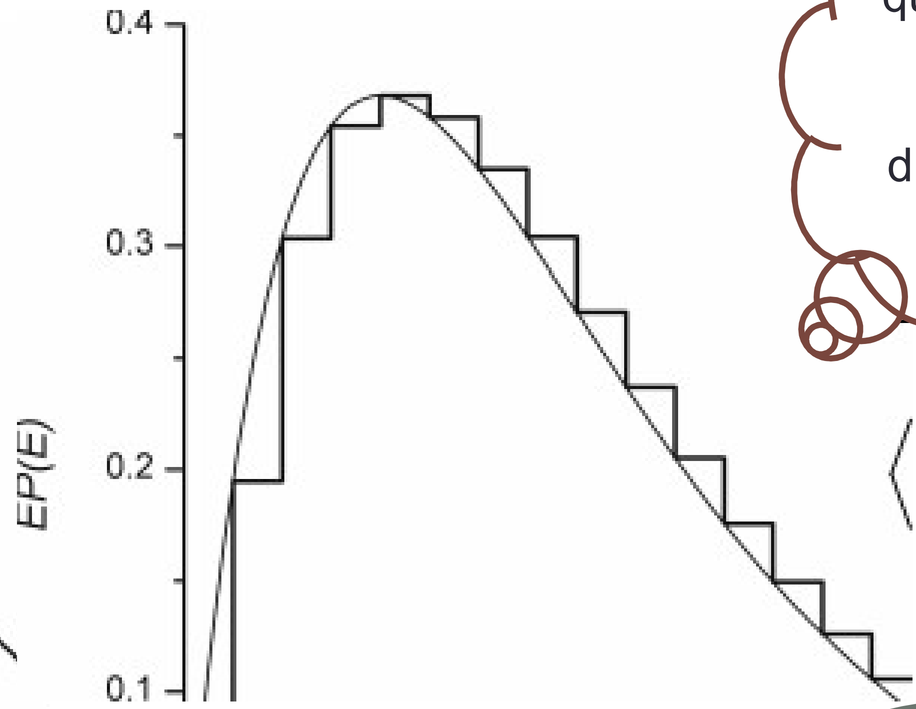
Probabilidade de encontrar um dado com energia entre ε e ε+dε

- O valor máximo desta função é 1/kT para ε=0
- P(ε)dε decresce suavemente se aproximando do zero quando

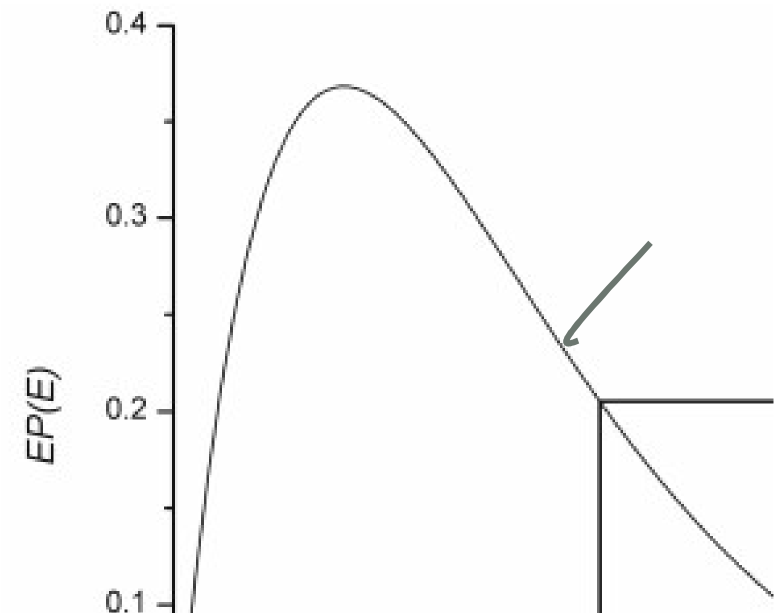
$$\varepsilon \rightarrow \infty$$

Teoria de Planck – Energia discreta





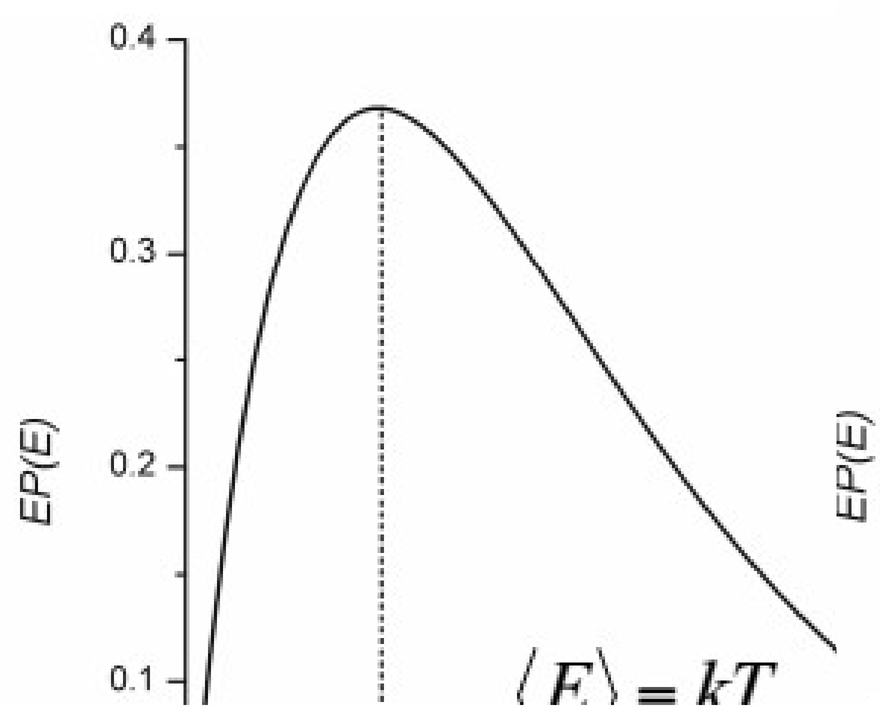
Valor de energia media quase igual ao clássico
Não faz diferença se é discreto ou contínuo

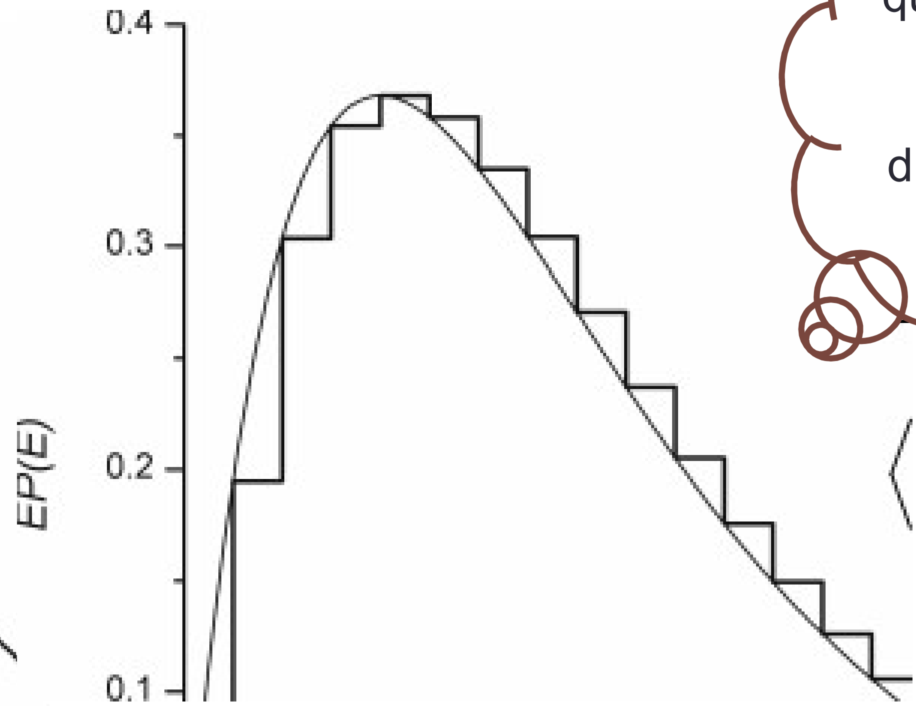


Resumindo:
E~kT quando a diferença de energia sucessiva for pequena
E~0 quando a diferença de energia sucessiva ΔE for grande

Há uma proporcionalida de entre ΔE ~ν

Teoria de Planck – Energia discreta





Valor de energia media quase igual ao clássico
Não faz diferença se é discreto ou contínuo

Teoria de Planck: matematicamente

$$\int \bar{\varepsilon} \rightarrow \sum \bar{\varepsilon}$$

• Considerando que temos n_i osciladores com ε_i e tomando as energias discretas ε_i em intervalos regulares: $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_1=\Delta\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\Delta\varepsilon$

$$n_i(\varepsilon) = n_0 e^{-\varepsilon_i / kT}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum A \varepsilon_i e^{-\varepsilon_i / E_o}}{\sum A e^{-\varepsilon_i / E_o}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{n_o \varepsilon_o + n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \ldots..}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_o 0 + n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \ldots..}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon / kT} \Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon / kT} 2\Delta\varepsilon + \ldots..}{N}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon/kT} 2\Delta\varepsilon + ...}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon(1 + 2e^{-\Delta\varepsilon/kT} + 3e^{-2\Delta\varepsilon/kT} .....)}{N}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + ...$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{N}\frac{1}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$soma = \frac{1}{(1-x)^2}$$

O que é????

$$N = \sum n_i = n_o + n_1 + n_2 + ...$$

$$N = n_o + n_o e^{-\Delta\varepsilon/kT} + n_o e^{-2\Delta\varepsilon/kT} + ...$$

$$N = n_o(1 + x + x^2 + ...) = \frac{n_o}{(1-x)}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{N}\frac{1}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$N = n_o(1 + x + x^2 + ...) = \frac{n_o}{(1-x)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\cancel{n_0} e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{1}\frac{\cancel{\left(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT}\right)}}{\cancel{n_0}}\frac{1}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})^{\cancel{2}}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon/kT}\Delta\varepsilon}{(1-e^{-\Delta\varepsilon/kT})} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1}$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT \to 0} 1+\frac{\Delta\varepsilon}{kT} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT}-1} = \frac{\Delta\varepsilon}{1+\frac{\Delta\varepsilon}{kT}-1} = kT$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT \to \infty} \infty \qquad \bar{\varepsilon} = 0$$

$\sim kT$ para ΔE peque

Teoria de Planck: matematicamente

A densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda é dada por:

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \, .d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \overline{\varepsilon} \, .d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\lambda \Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon / kT} - 1} .d\lambda$$

Teoria de Planck: matematicamente

A densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda é dada por:

Escrevendo $\Delta\varepsilon = h\nu$ e $\lambda\nu = c$

c é a velocidade da luz

h = constante de Planck

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{hc/\lambda kT}-1}.d\lambda$$

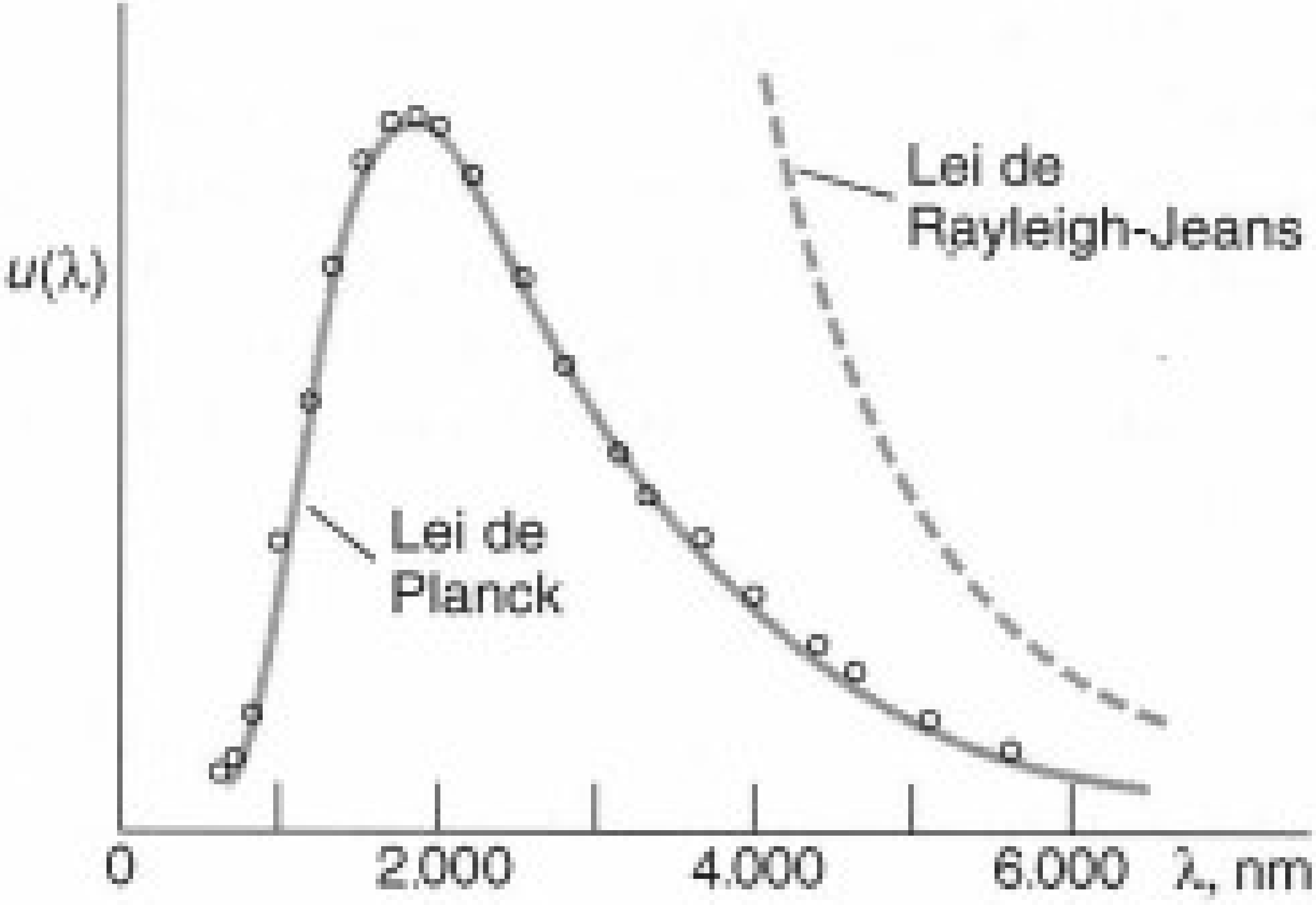
$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^5}{c^5}\frac{ch\nu}{\nu e^{h\nu/kT}-1}.\frac{c}{\nu^2}d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.d\nu$$

$h=6{,}63\times10^{-34}$J.s ou $4{,}14\times10^{-15}$eV.s

$\Delta\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$

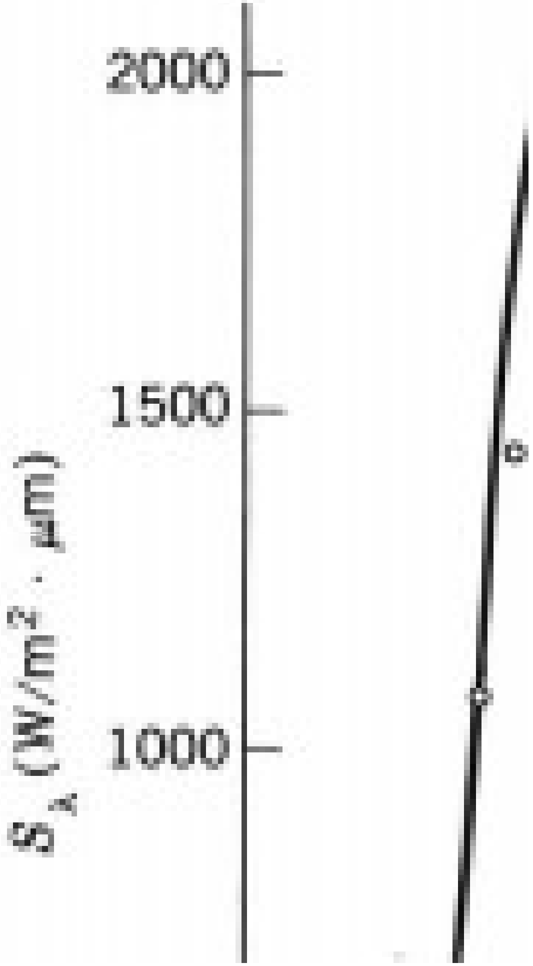
hc= $12{,}4\times10^{-7}$eV.m=1240ev.nm



Radiânci

M.P. Thekae

Appl. Opt. **8**



Comparação entre as teorias

Implicações d
resultado de Pla

- Qual o significado físico da hipótese de Planck?

- Ela impõem que os pequenos osciladores que constituem as paredes da cavidade e

Fonte: Prof. Marcelo Munhoz
Curso de Moderna I