Análise Real

Rogério Augusto dos Santos Fajardo & Leonardo Pellegrini

11 de agosto de 2023

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos preliminares

O que são os números reais? O que significa uma função ser contínua? O que é limite de uma função ou de uma sequência?

Muitas perguntas como essas não são respondidas adequadamente nos cursos de matemática do ensino básico, e até mesmo no início do ensino superior. Mas as perguntas acima são particularmente negligenciadas. Não necessariamente por falha dos professores e autores de livros didáticos, mas porque de fato a complexidade das respostas vão muito além do que parece.

Enquanto os conceitos dos números naturais, inteiros e racionais são bem intuitivos e não muito difíceis de compreender de uma maneira razoavelmente segura, sem abrir muita margem para ambiguidades e interpretações equivocadas, a passagem dos números naturais para os números reais é bastante sutil. As definições de números reais que constam na maior parte dos materiais bibliográficos são circulares. Quando os livros falam da existência de números que não são racionais, já pressupõem a existência de um conjunto maior, e jamais explicam claramente que conjunto é esse. Na faculdade, quando em um curso de cálculo começa a se falar de limite, continuidade, derivada e integral, os problemas de imprecisão de linguagem aumentam ainda mais. As definições e argumentos se baseiam em uma noção vaga e não definida de "proximidade".

A disciplina de Análise Real é considerada um divisor de águas em qualquer curso de matemática – seja licenciatura, bacharelado ou matemática aplicada – pois é justamente o momento em que nos desprendemos desses conceitos vagos e imprecisos e começamos a aprender a enxergar a matemática e escrevê-la na maneira como os fazem os matemáticos profissionais. Em um curso de bacharelado, é imprescindível para que os alunos aprendam a escrever dissertações, teses e artigos acadêmicos. Em um curso de licenciatura, é imprescindível para que os futuros professores aprendam a usar a linguagem matemática da maneira correta.

1.1 Motivação histórica

1.2 O que é uma demonstração matemática?

Uma das maiores dificuldades que os estudantes encontram em um curso de Análise Real é saber demonstrar os resultados e, frequentemente, entender quando sua demonstração está correta ou não.

O conceito de demonstração evoluiu no decorrer da História da Matemática, e os cursos de graduação em Matemática (bacharelado ou licenciatura) reproduzem esses passos históricos. Isso pode causar uma certa confusão nos estudantes, porque a cada etapa de aprendizagem muda-se a noção de prova matemática. O primeiro impacto que os estudantes sofrem nesse aspecto é quando ingressam no curso superior e descobrem que os argumentos que os professores de ensino médio aceitavam como "demonstração" são muitas vezes marcados como errados pelos professores de Cálculo ou de outras matérias de primeiro ano. O impacto é maior em disciplinas como Álgebra e Análise em que os mesmos argumentos que os próprios professores usavam em Cálculo deixam de ser aceitos até pelos mesmos docentes. Novos patamares de rigor matemático surgem em disciplinas mais avançadas, como Teoria dos Conjuntos e Lógica.

Essa inconstância na ideia de demonstração no decorrer de um curso universitário não é uma falha didática, nem do nível superior nem do nível básico. Pelo contrário, repetir a ordem histórica na aprendizagem, começando pelo intuitivo e pouco a pouco galgando os passos até o domínio da linguagem rigorosa e moderna da matemática tem se mostrado a melhor abordagem, em contrapartida ao fracassado movimento didático nos meados do século XX de ensinar a matemática axiomática e rigorosa desde o curso ginasial (atual ensino fundamental).

O nível de rigor nas demonstrações e linguagem cobrado nos cursos de Análise Real não é o mais baixo nem o mais alto, mas um importante divisor de águas na formação universitária em Matemática. A escrita que se aprende nessa disciplina é a que serve de parâmetro para a redação de artigos, dissertações e teses. E até mesmo para a elaboração de livros didáticos e notas de aula de ensino básico, pois, apesar de o nível de rigor nesses materiais ser menor do que o visto na disciplina de análise, é nela que se vê os fundamentos da boa redação matemática e dos cuidados com a linguagem que devem ser observados inclusive em textos elementares.

Mas, afinal, o que é uma demonstração matemática? A resposta simplificada, que engloba desde Tales até Hilbert, é a seguinte: uma sequência de enunciados matemáticos – escritos em uma linguagem precisa e sem ambiguidades – em que cada um deles ou é uma afirmação já aceita como verdadeira ou é uma consequência lógica das proposições anteriormente enunciadas nessa mesma demonstração.

Até certo ponto essa definição é aceita por matemáticos de milênios atrás – como Tales de Mileto e Euclides – e também por matemáticos modernos do século XX, como Hilbert e Russell, que discordavam fortemente dos primeiros.

O problema dessa definição é a imprecisão dos termos adotados. O que é um enunciado matemático? Quem julga que eles estão "escritos em uma linguagem precisa e sem ambiguidades"? Como decidir se cada afirmação deve ser aceita como verdadeira, dispensando demonstração? Como saber se uma frase é, de fato, consequência lógica de outras, sem que essa análise dependa do julgamento subjetivo de quem elabora ou lê a demonstração?

Nessas quatro perguntas residem as diferenças entre os tipos de demonstrações e formalizações da matemática, que têm sido causa de infindáveis embates filosóficos, especialmente no século passado. A grosso modo, sem entrar em detalhes nas diferentes abordagens que podem ocorrer em cada uma dessas categorias, podemos separar as demonstrações matemáticas (e a sistematização por trás de cada uma delas) em três tipos, que descreveremos a seguir.

Demonstração ingênua. Nesse tipo de demonstração a argumentação é feita na linguagem materna, utilizando noções intuitivas de lógica, e não há uma lista clara pré-estabelecida do que pode ser usado sem necessidade de provar.

Mas isso não significa que em uma teoria ingênua da matemática "vale tudo" na argumentação. A aceitação da prova deve ser universal, de modo que tanto a interpretação dos enunciados quanto a análise dos argumentos deve procurar ser objetivo, evitando que pessoas diferentes façam julgamentos diferentes desse significado.

Demonstração axiomática informal.

Demonstração axiomática formal.

Elementos de uma demonstração

Axioma:

Definição:

Proposição:

Teorema:

Lema:

Corolário:

1.3 Por que axiomatizar?

1.4 Por que construir?

1.5 Conjuntos, relações e funções

Trabalharemos com a chamada *teoria ingênua dos conjuntos*. Ou seja, usaremos a noção intuitiva de conjuntos, fixando algumas notações e definições.

Um conjunto é formado por objetos matemáticos. Se x é um objeto matemático que faz parte de um conjunto y, dizemos que x *pertence* a y, ou que x *elemento* de y. Usamos a notação $\in$ para pertence. Por exemplo, 0 é um número natural. Ou seja, 0 *pertence* ao conjunto dos números naturais. Escrevemos $0 \in \mathbb{N}$.

Propositalmente evitamos a notação costumeira de usar letras minúsculas para "elementos" e letras maiúsculas para conjuntos. Isso porque – ao contrário do que acontece na geometria, em que temos uma distinção do que é ponto e do que é reta – não há na teoria dos conjuntos essa distinção entre elementos e conjuntos. Um conjunto é formado por qualquer tipo de objeto matemático. Em particular, pode ser conjunto. Ou seja, *um elemento de um conjunto pode ser, ele próprio, conjunto.* Veremos exemplos de conjuntos de conjuntos mais à frente. Na verdade, veremos na disciplina de Teoria dos Conjuntos, que na matemática *tudo é conjunto.* Então, ao contrário do que diz um mito do ensino básico, *o símbolo $\in$ pode ser usado entre dois conjuntos.*

Usamos $\notin$ como símbolo para "não pertence".

Há basicamente três tipos de notações matemáticas para representar conjuntos, todas elas usando os símbolos $\{$ e $\}$ (chaves).

Notação 1: descrever todos os elementos entre as chaves, separando-os por vírgulas. Exemplo: o conjunto $\{0, 1, 3, 4\}$ tem como elementos os números naturais 0, 1, 3 e 4. Ou seja, podemos escrever $0 \in \{0, 1, 3, 4\}$, $1 \in \{0, 1, 3, 4\}$ e assim por diante.

Com essa notação podemos explicar através de exemplos como os elementos de conjuntos podem, eles próprios serem conjuntos. Compare os conjuntos $\{0\}$ e $\{\{0\}\}$. Ambos têm apenas um elemento. O elemento do primeiro é o 0, e do segundo é o $\{0\}$. Ou seja, podemos escrever $0 \in \{0\}$, mas **não** $\{0\} \in \{0\}$. Por outro lado, é verdade que $\{0\} \in \{\{0\}\}$, mas **não** é verdade que $0 \in \{\{0\}\}$. Se considerarmos o conjunto $\{0, \{0\}\}$, formado por dois elementos – a saber, 0 e $\{0\}$ – então podemos escrever tanto $0 \in \{0, \{0\}\}$ quanto $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$.

Notação 2: escrever uma propriedade matemática que caracteriza os elementos. Essa é a concepção de conjuntos elaborada pelo matemático alemão Gottlob Frege. Um conjunto estaria diretamente relacionado a uma fórmula que descreve seus elementos, como "*o conjunto dos números naturais que são divisíveis por 2*" para designar o conjunto dos números pares.

Na notação matemática, escrevemos da seguinte forma: entre chaves, escrevemos primeiro a variável usada para representar os elementos, escrevemos dois pontos ou um traço vertical (significando "tal que") e em seguida escrevemos a propriedade matemática que caracteriza os elementos desse conjunto. Ou seja, escrevemos

$$\{x : P(x)\}$$

ou

$$\{x|P(x)\},$$

onde $P(x)$ é uma fórmula referente à variável x. Exemplo:

$$\{x : \text{ existe } n \text{ natural tal que } \ x = 2n\}$$

Essa forma de definir conjunto gerou inconsistência na teoria de conjuntos de Frege, pois permite a construção do *conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo* (isto é, $\{x : x \notin x\}$). Chame de X esse conjunto. Pergunta: X pertence a si mesmo? Se $X \in X$, então X não satisfaz a condição de ser elemento de X e, portanto, $X \notin X$. Se $X \notin X$, então por definição de X temos que X é um elemento de si próprio, isto é $X \in X$. Chegamos numa inevitável contradição. Esse argumento, criado pelo matemático inglês Bertrand Russell, é conhecido como *paradoxo de Russell*.

Uma das maneiras de corrigir esse paradoxo é pré-fixando um conjunto do qual *separamos* aqueles elementos com a propriedade desejada. Escrevemos genericamente da seguinte forma:

$$\{x \in y : P(x)\}$$

ou

$$\{x \in y | P(x)\}.$$

Leia-se "o conjunto dos x pertencentes a y tais que $P(x)$ é verdadeira." No exemplo dos números pares, podemos escrever

$$\{x \in \mathbb{N} : \text{ existe } n \text{ natural tal que } \ x = 2n\}$$

Ou, mudando a variável x para n (como costumamos fazer quando trata-se de um número natural) e introduzindo símbolos lógicos ($\exists$ para "existe" e $\wedge$ para "e")

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists m((m \in \mathbb{N}) \wedge (n = 2m))\}$$

Também usamos uma notação abreviada da seguinte forma:

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}(n = 2m))\}$$

Leia-se: "o conjunto dos n pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que existe m pertencente a $\mathbb{N}$ tal que $n = 2m$".

Na axiomática de Zermelo e Frankel para a teoria dos conjuntos, chama-se *axioma da separação* aquele que para cada conjunto y e cada fórmula $P(x)$ garante a existência do conjunto $\{x \in y : P(x)\}$. Esse axioma evita que o paradoxo de Russell leve o sistema a uma contradição, mas, em vez disso, de tal paradoxo apenas segue que “não existe conjunto de todos os conjuntos” (o porquê deixamos como exercício).

Na teoria axiomática precisamos justificar, através dos axiomas, a existência de cada conjunto que apresentamos. Como já dissemos não ser esse o propósito da disciplina de análise real, trabalharemos com a chamada *teoria ingênua* (ou *intuitiva*) dos conjuntos, e não faremos a construção (isto é, justificativa da existência a partir dos axiomas) de cada conjunto que definirmos.

Notação 3: escrever os elementos em função de uma ou mais variáveis. Essa forma de escrita é semelhante à anterior e também muito utilizada, mas convém chamar a atenção às suas diferenças.

Lembremo-nos da diferença entre oração e sujeito (e objeto), na língua portuguesa, e de seus correspondentes na matemática. Uma oração precisa possuir um verbo, o sujeito e o objeto, não. Uma oração é uma afirmação, passível a ser julgada como verdadeira ou falsa, enquanto o sujeito e o objeto correspondem a seres do universo. Na matemática, o correspondente às orações são as *fórmulas*, e o correspondente aos sujeitos e objetos são os *termos*.

Aprendemos um “verbo” novo na matemática: $\in$. A expressão $x \in y$ é uma fórmula, passível a ser julgada como verdadeira ou falsa, uma vez que conhecemos quem é x e quem é y. Já a expressão $x^2 + y^2$ é um termo. Se atribuirmos valores a x e a y obtemos um número, não uma fórmula que podemos julgar como verdadeira ou falsa.

Assim, se $T(x)$ é um termo dependente da variável x e se $P(x)$ é uma fórmula dependendo da variável x podemos definir o conjunto

$$\{y : \exists x(y = T(x) \text{ e } P(x))\},$$

que escreveremos como

$$\{T(x) : P(x)\}$$

Olhando assim parece um pouco estranho, mas vejamos como isso funciona num exemplo. Escrevemos

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

para o conjunto de todos os quadrados perfeitos, em vez de escrevermos, na maneira mais extensa,

$$\{m \in \mathbb{N} : \exists n(m = n^2 \text{ e } n \in \mathbb{N})\}.$$

Ou seja, n^2 corresponde ao termo $T(x)$ (ou, no caso, $T(n)$), e $n \in \mathbb{N}$ a $P(n)$. Usamos muito esse tipo de notação para representar imagem de função.

Eventualmente podemos ter mais variáveis, como no exemplo:

$$\{x + y : x^2 + y^2 = 1\}$$

De modo geral podemos escrever

$$\{T(x_1, \dots, x_n) : P(x_1, \dots, x_n)\}$$

Assim como no axioma da separação, aqui também é necessário que as variáveis estejam limitadas a um conjunto. Por exemplo:

$$\{x + y : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 + y^2 = 1)\}$$

Um abuso de notação comum é esscrevermos $x, y \in \mathbb{R}$ em vez de $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Mas usualmente apenas omitimos esse conjunto $\mathbb{R}$ quando está claro no contexto. Mais uma vez deve prevalecer o bom senso, no lugar de regras estritas.

Inclusão de conjuntos.

Dizemos que um conjunto x *está contido* em um conjunto y se todo elemento de x também é elemento de y. Isto é, se vale a implicação

$$(z \in x) \rightarrow (z \in y),$$

para todo z. Escrevemos $x \subset y$ se x está contido em y.

Este é um ponto delicado. Muitos estudantes secundaristas – por vezes, ou quase sempre, instigados pelos professores – tendem a decorar um "macete" em vez de compreender a definição acima. O tal "macete" equivocado é: "o símbolo $\in$ só é usado entre elemento e conjunto, nunca entre dois conjuntos; o símbolo $\subset$ só é usado entre dois conjuntos."

Ora, já vimos exemplos de que podemos usar $\in$ entre dois conjuntos. A segunda parte do "macete" é verdadeira: só se usa $\subset$ entre dois conjuntos. Mas, na realidade, também só se usa $\in$ entre dois conjuntos, já que, na teoria dos conjuntos, tudo é conjunto.

Considere, como exemplo, x o conjunto $\{0\}$ e y o conjunto $\{\{0\}\}$. Já vimos que $x \in y$ (e são ambos conjuntos!). Mas será que podemos afirmar que $x \subset y$? Vejamos. Temos que verificar se todo elemento de x também é elemento de y. O conjunto x só tem um elemento: 0. Ele pertence a y? Vimos que não. O número 0 é um *elemento de um elemento* de $\{\{0\}\}$, mas não é ele próprio um elemento desse. Logo, **não** é verdade que $x \subset y$.

Mas pode um conjunto ao mesmo tempo pertencer e estar contido em algum outro? Sim. Veja, por exemplo, que $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$ e também $\{0\} \subset \{0, \{0\}\}$.

Quando x está contido em y, também dizemos que x é um *subconjunto* de y.

Igualdade entre conjuntos

Um conjunto é caracterizado pelos seus elementos. Tal propriedade é formalizada no sistema de Zermelo e Frankel pelo *axioma da extensão*, que diz o seguinte:

> Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.

Usando o símbolo da inclusão, podemos escrever a frase acima na linguagem matemática como

$$(x = y) \leftrightarrow (x \subset y \wedge y \subset x)$$

para todos conjuntos x e y.

Uma das consequências desse axioma é o seguinte ditado (esse é correto): *em um conjunto não importa a ordem dos elementos nem contamos repetições.*

Por exemplo, os conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{2, 1, 4, 5, 3\}$ são iguais – isto é, são duas representações diferentes para o mesmo conjunto – e também são iguais a $\{1, 2, 1, 4, 3, 5, 2\}$ e a $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5\}$.

Vazio, partes, união e intersecção

Há um conjunto especial que não tem elemento algum: o conjunto vazio. Sim, podemos dizer "o" conjunto vazio porque, pelo axioma da extensão, se ele existe, é único (não existem dois conjuntos vazios diferentes). E a existência é garantida pelo *axioma do vazio*. Sendo ele único, podemos introduzir, sem risco de ambiguidade, um símbolo específico para o conjunto vazio, que é $\emptyset$.

Note que $\emptyset \subset x$, para todo conjunto x. De fato, todo elemento de $\emptyset$ pertence a x. "Como podemos dizer isso se $\emptyset$ não tem elemento?", perguntaria o leitor. Bom, se $\emptyset$ não estivesse contido em x, haveria um y pertencente a $\emptyset$ que não pertence a x. Mas isso é impossível, pois não existe y pertencente a $\emptyset$. Logo, $\emptyset \subset x$, pelo que chamamos de *argumento de vacuidade*.

Chamamos de *conjunto das partes* de x – e denotamos por $\mathcal{P}(x)$ – o conjunto dos subconjuntos de x. Isto é,

$$\mathcal{P}(x) = \{y : y \subset x\}$$

Observe que estamos usando aquela "versão de Frege", do axioma da separação, que pode gerar contradição. Há uma axioma específico – o axioma das partes – que garante a existência do conjunto das partes.

Exercício: verifique que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

A *união* de dois conjuntos A e B – denotada por $A \cup B$ – é o conjunto de todos os objetos que pertencem a A ou a B. Isto é, $x \in A \cup B$ se, se somente se, $x \in A$ **ou** $x \in B$. Já a *intersecção* de A e B – denotada por $A \cap B$ é o conjunto de todos os objetos que pertencem simultaneamente a A e a B. Isto é, $x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ **e** $x \in B$.

Observe que a união está relacionada ao operador lógico **ou**, enquanto a interseção está relacionada ao operador lógico **e**. Por isso a semelhança do símbolo $\cup$ (união) com $\vee$ (o símbolo lógico usado para "ou"), e do símbolo $\cap$ (intersecção) com $\wedge$ (o símbolo lógico usado para "e").

Exemplos: $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$, e $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

Se X é um conjunto de conjuntos – também usualmente chamado de *família de conjuntos* – chamamos de *união de* X – denotada por $\bigcup X$ – o conjunto de todos os objetos que pertencem a **algum** elemento de X. Isto é, $x \in \bigcup X$ se, e somente se, existe $y \in X$ tal que $x \in y$.

A *intersecção de* X – denotada por $\bigcap X$ – é o conjunto de todos os objetos que pertencem simultaneamente a **todos** os elementos de X. Isto é, $x \in \bigcap X$ se, e somente se, para todo $y \in X$ temos $x \in y$.

Por exemplo, se $X = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$, temos que $\bigcup X = \{1,2,3,4\}$ e $\bigcap X = \{1\}$.

Não existe intersecção do conjunto vazio, pois, pelo argumento de vacuidade, isso daria o conjunto de todos os conjuntos, o que já vimos, pelo paradoxo de Russell, que não existe. Não há qualquer outra restrição para união ou intersecção de uma família de conjuntos.

Observe que $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Assim como a união de dois conjuntos está relacionada a "ou" e a intersecção de dois conjuntos a "e", a união de família corresponde ao quantificador existencial $\exists$ (existe), e a intersecção de família corresponde ao quantificador universal $\forall$ (para todo).

Por último, introduzimos a notação de *subtração de conjuntos*. Denotamos por $A \smallsetminus B$ o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Isto é,

$$A \smallsetminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

1.6 Relações e funções

Vimos que em um conjunto a ordem dos elementos não importa. Às vezes precisamos considerar a ordem dos objetos, e para isso introduzimos a noção de *pares ordenados*. Dados dois objetos matemáticos a e b, denotamos por (a, b) o *par ordenado* [1] cuja primeira coordenada é a e segunda coordenada é b. A propriedade principal que caracteriza os pares ordenados é a seguinte:

$$(a, b) = (c, d) \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Ou seja, nos pares ordenados, a ordem dos elementos importa. Por exemplo, temos $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, mas $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Podemos analogamente definir uma *tripla ordenada* (a, b, c). De modo geral, uma *n-upla ordenada* – onde n é um número natural maior do que 1 – é uma sequência $(a_1, \ldots, a_n)$, e esta só será igual a uma outra n-upla ordenada $(b_1, \ldots, b_n)$ se tivermos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, e assim por diante.

Sejam A e B dois conjuntos. Definimos o *produto cartesiano de A e B* o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que a é um elemento de A e b um elemento de B. Na notação matemática:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Quando $A = B$, usualmente escrevemos A^2 no lugar de $A \times A$. Da mesma forma, denotamos por A^n o conjunto de todas as n-uplas ordenadas em que todas as coordenadas pertencem a A.

[1] Na teoria dos conjuntos até os pares ordenados são conjuntos. Embora não faça parte da presente disciplina construir todos os objetos como conjuntos, fica a título de curiosidade a definição de (a, b) como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. A quem se interessar, fica como exercício provar a propriedade dos pares ordenados de acordo com essa definição.

Uma *relação* entre os conjuntos A e B (ou *relação binária em* A, caso tenhamos $A = B$) é qualquer subconjunto de $A \times B$. Se $R \subset A \times B$ é uma relação, escrevemos, eventualmente, aRb como abreviatura de $(a, b) \in R$.

Por exemplo, a relação de desigualdade $\leq$ em $\mathbb{N}$ pode ser vista como o conjunto de todos os pares ordenados (n, m) em $\mathbb{N}^2$ tais que n é menor ou igual a m. Mas quando queremos dizer que 1 é menor ou igual a 2, escrevemos simplesmente $1 \leq 2$, em vez de $(1, 2) \in \leq$.

Uma *relação n-ária* em A é qualquer subconjunto de A^n. Definimos A^1 como A, de modo que uma relação unária (ou 1-ária) é qualquer subconjunto de A. Por exemplo, "ser número primo" pode ser considerado uma relação unária em $\mathbb{N}$, identificada pelo conjunto dos números primos.

Uma *função* é uma relação f tal que, se (x, y) e (x, z) são ambos elementos de f, então $y = z$.

Definimos o *domínio* de uma função f como o conjunto

$$\{x : \exists y(x, y) \in f\}$$

e a *imagem* de f é o conjunto

$$\{y : \exists x(x, y) \in f\}$$

.

Uma *função de* A *em* B é uma função cujo domínio é A e cuja imagem *está contida* em B. Observe que, a partir da definição de função como conjunto de pares ordenados, não é possível determinar o *contradomínio* de uma função. Qualquer conjunto que contém a imagem pode ser considerada um contradomínio da função. Por exemplo, a função $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ pode tanto ser considerada uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$.

Observe, pelas definições acima, que, se f é uma função de A em B, para cada x pertencente a A existe um único y pertencente a B tal que $(x, y) \in f$. Por esse motivo, para cada x pertencente ao domínio de f podemos introduzir a notação $f(x)$ para o único y tal que $(x, y) \in f$.

Notação: se escrevemos $f : A \longrightarrow B$, estamos dizendo, implicitamente, que f é uma função de A em B.

Uma *operação binária* em um conjunto A é uma função de A^2 em A. No lugar de $f((x, y))$ escrevemos simplesmente $f(x, y)$ (exercício: por que, de acordo com a nossa notação até agora, seria $f((x, y))$?).

Uma *operação n-ária* em A é qualquer função de A^n em A. Novamente, omitimos os duplos parênteses que surgiriam se aplicássemos a notação rigorosamente.

Função injetora. Dizemos que uma função f é *injetora* quando, para todos x, y pertencentes ao domínio de f, se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$, com domínio $\mathbb{R}$, *não* é injetora, pois se tomarmos $x = 2$ e $y = -2$, temos $x \neq y$ mas $x^2 = y^2$, pois ambos são iguais a 4.

Função sobrejetora. Dizemos que uma função f é *sobrejetora* em relação a um conjunto B se a imagem de f é B. Ou seja, se para todo $y \in B$ existe algum x pertencente ao domínio da f tal que $f(x) = y$. Quando está claro no contexto quem estamos considerando como contradomínio, podemos omitir a menção ao conjunto B. Por exemplo, se escrevemos que uma determinada função de A em B é sobrejetora, significa *sobrejetora em relação a B*. Do mesmo modo, se dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora, significa ser sobrejetora em relação a B.

Função bijetora. Dizemos que uma função f é *bijetora* em relação a um conjunto B se f é injetora e é sobrejetora em relação a B. Valem as mesmas observações anteriores para omitirmos, quando possível, a menção ao contradomínio B.

Note que toda função é sobrejetora em relação à sua imagem, assim como toda função injetora é bijetora em relação à sua imagem.

Uma função bijetora também é chamada de *bijeção*.

Inversa de função. Se R é uma relação binária, definimos a *inversa* de R – que denotaremos por R^{-1} – o conjunto $\{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Dizemos que uma função f é *inversível* se sua inversa (como relação) é uma função. Dizemos que f é *inversível em relação a B* se ela é inversível e se o domínio da inversa é B. Quando especificamos um contradomínio, ser inversível passa a significar ser inversível em relação a esse contradomínio. Por exemplo, se dizemos que uma função f de A em B (ou uma função $f : A \longrightarrow B$) é inversível, queremos dizer inversível em relação a B.

Exercício 1.1. *Prove que uma função f é inversível em relação a B se, e somente se, ela é bijetora em relação a B.*

Composição de funções. Antes de definirmos composição de funções, façamos um exercício.

Exercício 1.2. *Sejam f e g duas funções, e suponha que a imagem de g está contida no domínio da f. Mostre que o conjunto*

$$\{(x, z) : \exists y((x, y) \in g \wedge (y, z) \in f)\}$$

é uma função.

A função definida no exercício acima é chamada de *composição de f e g*, e é denotada por $f \circ g$. Verifique que, para todo x pertencente ao domínio da g, temos

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Pela condição do exercício, observe que se g é uma função de A em B, e f é uma função de B em C, então $f \circ g$ existe e é uma função de A em C.

Exercício 1.3. *Sejam $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$ funções. Prove que:*

(a) *Se f e g são injetoras, então $f \circ g$ é injetora.*

(b) *Se f e g são sobrejetoras, então $f \circ g$ é sobrejetora.*

(c) *Se f e g são bijetoras então $f \circ g$ é bijetora.*

(d) *No caso do item (c), prove que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Exercício 1.4. *Valem as recíprocas nos itens (a) e (b) do exercício anterior? Por que? Qual "parte" da recíproca é verdadeira? Por exemplo, se $f \circ g$ é injetora, podemos concluir que alguma das funções f ou g é injetora? Qual? Justifique suas respostas, sempre provando ou dando contra-exemplos.*

Função identidade. A *função identidade no conjunto A* é a função $\{(x, x) : x \in A\}$. Ou seja, é a função $f(x) = x$. Denotamos a identidade no conjunto A por I_A.

Exercício 1.5. *Prove que uma função $f : A \longrightarrow B$ é inversível em B se, e somente se, existe uma função $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = I_B$ e $g \circ f = I_A$. Prove, ainda, que quando existir tal g, necessariamente vale $g = f^{-1}$.*

Restrição de função. Seja f uma função de A em B e seja X um subconjunto de A. Definimos a *restrição de f a X* – e denotamos por $f|X$ (ou $f|_X$) – o conjunto $\{(x, y) \in f : x \in X\}$.

Exercício 1.6. *Nas condições acima, prove que:*

(a) *$f|X$ é uma função de X em B.*

(b) *Se f é injetora, então $f|X$ é injetora.*

(c) *Se $f|X$ é sobrejetora em relação a B, então f é sobrejetora em relação a B.*

Exercício 1.7. *Seja f uma função de A em B sobrejetora em relação a B. Prove que f é injetora se, e somente se, para todo X contido propriamente em A (isto é, $X \subset A$ e $X \neq A$) temos que $f|X$ não é sobrejetora em relação a B.*

1.7 Números naturais

Capítulo 2

Dos naturais aos racionais

A abordagem axiomática dos números reais previne erros que a intuição pode ocasionar e torna mais rigoroso o processo de demonstração matemática, pois estabelecemos exatamente quais são as propriedades que assumimos como verdadeiras. No começo, as demonstrações axiomáticas parecem muito complicadas e contra-intuitivas, visto que muitas coisas que consideramos óbvias precisam ser demonstradas. Porém, rapidamente conseguimos provar esses fatos mais elementares e passamos a usar praticamente tudo que já sabíamos, mas com muito mais rigor.

Os exercícios aqui apresentados estão organizados de forma a servir de roteiro para as demonstrações. Isto é, cada exercício pode ser resolvido de maneira bem simples utilizando os anteriores.

2.1 Axiomas de corpo

Um corpo é uma tripla $(X, +, \cdot)$ tal que

- X é um conjunto não-vazio;
- $+$ e $\cdot$ são operadores binários em X, isto é, funções de $X \times X$ em X;
- Existe um elemento de X que chamaremos de 0 (zero);
- Existe um elemento de X que chamaremos de 1 (um);
- Para todos x, y, z pertencentes a X valem os seguintes axiomas:

A0 $0 \neq 1$;

A1 (Comutatividade da adição) $x + y = y + x$;

A2 (Associatividade da adição) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

A3 (Elemento neutro aditivo) $x + 0 = x$;

A4 (Elemento oposto) existe $w \in X$ tal que $x + w = 0$;

M1 (Comutatividade da multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x$;

M2 (Associatividade da multiplicação) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

M3 (Elemento neutro multiplicativo) $x \cdot 1 = x$;

M4 (Elemento inverso) se $x \neq 0$, existe $w \in X$ tal que $x \cdot w = 1$;

D (distributividade) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$;

O conjunto X é chamado de *domínio* do corpo $(X, +, \cdot)$. Repare que sobre um mesmo conjunto X podemos colocar operações diferentes e formar corpos diferentes. Todavia, mesmo sendo errado chamar o conjunto X de corpo, por um abuso de notação – isto é, para facilitar a escrita, mesmo perdendo um pouco do rigor – iremos nos referir ao domínio do corpo como o próprio corpo, quando ficar claro quais são as operações que estamos considerando. Por exemplo, podemos escrever "o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo", mesmo quando o certo seria "$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo". Da mesma forma, iremos eventualmente escrever "elemento de um corpo" quando, na verdade, nos referimos a um elemento do *domínio* de um corpo.

O axioma $0 \neq 1$ previne que definamos um corpo com um único elemento (e, dessa forma, satisfaz trivialmente todos os axiomas). Optamos neste texto por deixar esse axioma, mas a maioria dos livros não o utiliza. A quem se interessar, fica como exercício extra que, se tirarmos o axioma A0, o único corpo que satisfaz $0 = 1$ é aquele cujo domínio tem um único elemento.

Observação importante: Para simplificar a apresentação dos axiomas, introduzimos 0 e 1 como símbolos primitivos. Nessa abordagem, o mais correto seria introduzir esses símbolos na definição de corpo. Isto é, deveríamos definir um corpo como uma quíntupla ordenada $(X, +, \cdot, 0, 1)$ satisfazendo os axiomas. Para consertar isso sem precisar incluir os símbolos 0 e 1 na definição de corpo, poderíamos substituir o axioma A3 e M3 respectivamente pelas seguintes asserções:

A3' Existe $y \in X$ tal que, para todo $x \in X$, vale $x + y = x$.

M3' Existe $y \in X$ tal que, para todo $x \in X$, vale $x \cdot y = x$.

A partir dos axiomas A3 e M3 reescritos como A3' e M3', podemos definir 0 como o elemento do corpo que satisfaz $x + 0 = x$, para todo $x \in X$, e podemos definir 1 como o elemento do corpo que satisfaz $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in X$. Porém, isso requer uma atenção especial: para definirmos 0 como *o* elemento do corpo que satisfaz A3', precisamos provar que exite *um único* elemento nessas condições, para evitar ambiguidade na definição.

De fato, suponha que y e y' são dois elementos de X satisfazendo $x+y = x$ e $x + y' = x$, para todo $x \in X$. Em particular, $y + y' = y$ e $y' + y = y'$. Pela comutatividade (A1), $y + y' = y' + y$. de onde concluímos que $y = y'$.

O mesmo raciocínio prova também a unicidade do elemento neutro multiplicativo, justificando que definamos tal elemento como o número 1.

Dessa forma, tendo sido 0 e 1 definidos univocamente a partir das versões modificadas dos axiomas, não precisamos introduzir como símbolos primitivos na definição de corpo, de modo que apenas as operações $+$ e $\cdot$ são os símbolos primitivos necessários.

O primeiro exercício desta apostila começa com um exemplo simples de corpo.

Exercício 2.1. *Sejam* $a = \emptyset$ *e* $b = \{\emptyset\}$*. Considere* $X = \{a, b\}$*. Definimos uma operação binária* $+$ *em* X *como:* $a + a = a$*;* $a + b = b$*;* $b + a = b$ *e* $b + b = a$*. Definimos outra operação binária* $\cdot$ *em* X *como:* $a \cdot a = a$*;* $a \cdot b = a$*;* $b \cdot a = a$ *e* $b \cdot b = b$*. Prove que* $(X, +, \cdot)$ *é um corpo. Diga quem é 0 e quem é 1.*

Observe que no exemplo acima pouco ou nada importa quem como definimos a e b. A única coisa a ser levada em consideração é que $a \neq b$. Esse é um dos exemplos mais simples – o outro seria tomar X com um único elemento – de corpo. Mas há muitos outros, diversos deles infinitos, como os conjuntos (com as operações usuais) dos números racionais, dos números reais e dos números complexos. O foco desta disciplina será axiomatizar e construir o corpo dos números reais.

O próximo exercício é consequência imediata da distributividade e da comutatividade.

Exercício 2.2 (Distributiva pela direita)**.** *Seja* $(X, +, \cdot)$ *é um corpo. Prove que, para todos* $x, y, z \in X$*, vale* $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$*;*

O próximo exercício justifica o famoso jargão "corta dos dois lados", usado no ensino básico.

Exercício 2.3 (Leis de cancelamento)**.** *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo e tome* $x, y, z \in X$*. Prove que:*

(a) *Se* $x + z = y + z$ *então* $x = y$*;*

(b) *Se* $z \neq 0$ *e* $x \cdot z = y \cdot z$ *então* $x = y$*.*

Usando o exercício anterior e o axioma A3 podemos resolver o exercício:

Exercício 2.4. *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo. Prove que, para todos* $x, y \in X$*,*

(a) $x \cdot 0 = 0$ *e* $0 \cdot x = 0$*;*

(b) *Se* $x \cdot y = 0$ *então* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*

Com as leis de cancelamento também podemos provar a unicidade dos elementos neutros aditivo e multiplicativo. Ou seja, se $x + y = x$, para todo x, então y necessariamente é 0, e se $x \cdot y = x$, para todo x, então x necessariamente é 1. O elemento oposto e o elemento inverso também são únicos. Ou seja, se temos dois números y e z fazendo o papel de oposto de x – isto é, $x + y = 0$ e $x + z = 0$ – então ambos são iguais. Isto é, $y = z$. O análogo vale para o elemento inverso.

Exercício 2.5. *Seja* $(X, +, \cdot)$ *um corpo. Prove que para todos* $x, y, z \in X$ *temos:*

(a) *Se* $x + y = x$ *então* $y = 0$*;*

(b) *Se* $x \neq 0$ *e* $x \cdot y = x$ *então* $y = 1$*;*

(c) *Se* $x + y = 0$ *e* $x + z = 0$ *então* $y = z$*;*

(d) *Se* $x \cdot y = 1$ *e* $x \cdot z = 1$ *então* $y = z$*.*

Notações: Como para cada x existe um único y tal que $x + y = 0$, então podemos introduzir uma notação para tal y que depende de x. Denotaremos o oposto de x por $-x$. Ou seja, $-x$ é o único elemento de X tal que $x+(-x) = 0$. Da mesma forma, para cada $x \neq 0$ podemos escrever como x^{-1} o inverso multiplicativo de x. Isto é, o único elemento de X tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Usaremos ainda a notação $x - y$ no lugar de $x + (-y)$. Também eventualmente escreveremos $\frac{x}{y}$ em vez de $x \cdot y^{-1}$.

Em várias ocasiões omitiremos o excesso de parênteses quando tal omissão não ocasionar prejuízo à clareza da linguagem. Por exemplo, por causa da associatividade, poderemos escrever $x + y + z$ no lugar de $(x + y) + z$ ou de $x + (y + z)$, visto que ambos são iguais. O mesmo valendo para o produto. Seguiremos a convenção de priorizar o produto numa sequência de operações, quando omitimos parênteses. Ou seja, $x \cdot y + z$ é o mesmo que $(x \cdot y) + z$, e não $x \cdot (y + z)$.

Também eventualmente omitiremos o sinal da multiplicação. Ou seja, escreveremos xy no lugar de $x \cdot y$.

Denotaremos $x \cdot x$ por x^2.

Exercício 2.6. *Seja $(X, +, \cdot)$ um corpo. Prove que, para todos $x, y \in X$ temos:*

(a) $-x = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(b) $(-1)x = -x$;

(c) $-(-x) = x$;

(d) $x(-y) = -(xy)$;

(e) $(-x)y = -(xy)$;

(f) $(-x)(-y) = xy$;

(g) $-(x - y) = y - x$;

Exercício 2.7. *Seja $(X, +, \cdot)$ um corpo. Prove que, para todos $x, y \in X \setminus \{0\}$ temos:*

(a) $(x^{-1})^{-1} = x$

(b) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$;

(c) $(xy)^{-1} = (x^{-1})(y^{-1})$.

(d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = \dfrac{y}{x}$.

O próximo exercício apresenta algumas propriedades de frações que costumamos usar.

Exercício 2.8. *Sejam* $(X, +, \cdot)$ *um corpo e* a, b, c, d *elementos de* X *tais que* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$*. Prove que.*

(a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}$;

(b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

(c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$;

(d) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$;

(e) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$;

(f) $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$.

2.2 Axiomas de corpo ordenado

Um corpo ordenado é uma quádrupla $(X, +, \cdot, <)$ onde $(X, +, \cdot)$ é um corpo e $<$ é uma relação binária em X satisfazendo:

O1 Se $0 < x$ e $0 < y$, então $0 < x + y$ e $0 < x \cdot y$;

O2 $x < y$ se, e somente se, $x - y < 0$;

O3 (tricotomia) Para cada $x \in X$, ocorre um, e somente um, dos três casos seguintes: $x < 0$ ou $x = 0$ ou $0 < x$.

Notações: Escrevemos $x > y$ com o mesmo significado que $y < x$; $x \leq y$ significa $x < y$ ou $a = b$; $x \geq y$ é o mesmo que $y \leq x$.

Exercício 2.9. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Prove que para todos $x, y, z \in X$ valem as seguintes afirmações:*

(a) $0 < x$ *se, e somente se,* $-x < 0$*;*

(b) *Ocorre um, e somente um, dos três casos seguintes: $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$;*

(c) *Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;*

(d) *Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;*

(e) *Se $x > 0$ e $y < 0$ então $xy < 0$;*

(f) *Se $x < 0$ e $y < 0$ então $xy > 0$;*

(g) $x^2 \geq 0$*;*

(h) $1 > 0$.

Exercício 2.10. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Prove que para todos $x, y, z, w \in X$ valem as seguintes afirmações:*

(a) *$x < y$ se, e somente se, $x + z < y + z$;*

(b) $x + 1 > x$*;*

(c) *$x^{-1} > 0$ se, e somente se, $x > 0$;*

(d) *Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;*

(e) *Se $x < y$ e $z < 0$, então $yz < xz$;*

(f) *Se $x < y$ e $z < w$ então $x + z < y + w$;*

(g) *Se $0 < x$, $x < y$, $0 < z$ e $z < w$ então $xz < yw$;*

(h) *Se $0 < x$ e $x < y$ então $y^{-1} < x^{-1}$.*

Exercício 2.11. *Seja $(X, +, \cdot)$ o corpo de dois elementos que foi definido no Exercício 2.1. Prove que não existe uma relação $<$ de modo que $(X, +, \cdot, <)$ seja um corpo ordenado.*

2.3 Frações

Um exemplo clássico de corpo ordenado é o conjunto dos números racionais, munido das operações e da ordem usuais. Veremos que dentro de qualquer corpo ordenado existe uma cópia do conjunto dos números racionais.

Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Defina, recursivamente, uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ do seguinte modo:

- $f(0) = 0$
- $f(n+1) = f(n) + 1$

Repare que estamos em vários momentos usando o mesmo símbolo para representar objetos diferentes. O número natural 0 não é o mesmo que o elemento 0 do corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$. O número natural 1 também não é o mesmo que o 1 que pertence a X. A operação de soma nos números naturais também não é a mesma soma definida no corpo. Porém, em algum sentido todos eles em X são "muito parecidos" que os seus correspondentes em $\mathbb{N}$.

Defina $\mathbb{N}_X$ a imagem de f. Ou seja, $\mathbb{N}_X$ é o subconjunto de X formado por 0, 1, 1+1, (1+1)+1, etc. Ou seja, é uma cópia dos números naturais dentro de X.

Exercício 2.12. *Prove que a função f definida acima é injetora. Mostre que f poderia não ser injetora se o corpo não fosse ordenado.*

Dica: Para provar que a função injetora, prove que, se $m < n$, então $f(m) < f(n)$. Use (sem provar) todas as propriedades conhecidas de números naturais (indução, propriedade da boa ordem e as propriedades de ordem dos números naturais).

Agora vamos colocar uma cópia do conjunto dos números inteiros dentro de X. Para isso, basta pegar todos os naturais e acrescentar os seus elementos opostos. Para isso, definimos

$$\mathbb{Z}_X = \mathbb{N}_X \cup \{-x : x \in \mathbb{N}_X\}$$

Finalmente definimos

$$\mathbb{Q}_X = \{\frac{x}{y} : x \in \mathbb{Z}_X \text{ e } y \in \mathbb{N}_X \setminus \{0\}\}$$

Na linguagem da álgebra, dizemos que $\mathbb{Q}_X$ é *isomorfo* a $\mathbb{Q}$. Isso significa que existe uma função bijetora $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_X$ que preserva as operações de corpo e a ordem. Isto é, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$ valem $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ e $x < y$ se, e somente se, $f(x) < f(y)$. Isso significa que $\mathbb{Q}_X$ e $\mathbb{Q}$ são idênticos, quando vistos como corpos ordenados.

Por abuso de linguagem chamaremos de "número natural", "número inteiro" ou "número racional" um elemento de X (sendo esse o domínio de um corpo ordenado) que pertence, respectivamente, a $\mathbb{N}_X$, $\mathbb{Z}_X$ ou $\mathbb{Q}_X$.

Notamos que a relação de $<$ em $\mathbb{N}_X$ é a a mesma (via isomorfismo) que a ordem usual dos números naturais (veja dica para o Exercício 2.12).

Definição 2.13 (Propriedade arquimediana)**.** Dizemos que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ satisfaz a *propriedade arquimediana* se para todo $x \in X$ existe um número natural $n \in X$ tal que $x < n$.

Exercício 2.14. *Seja $(X, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado que satisfaz a propriedade arquimediana. Prove que*

(a) *Para todo $x \in X$, se $x > 0$ existe um número natural $n \in X$ tal que $\frac{1}{n} < x$;*

(b) *Para todos $x, y \in X$, se $x < y$ existe um número racional r tal que $x < r$ e $r < y$.*

Dica: Para o item (b), siga os seguintes passos:

1. Primeiro suponha que $x \geq 0$.
2. Usando o item (a), encontre n número natural tal que $\frac{1}{n} < y - x$ (justifique).
3. Tome m o menor natural tal que $\frac{m}{n}$ é maior do que x. Use a propriedade de boa ordem dos números naturais: todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo. Use mais uma vez a propriedade arquimediana para provar que existe m tal que $\frac{m}{n} > x$.
4. Tome $r = \frac{m}{n}$ e prove que satisfaz a propriedade desejada. Ou seja, resta provar que $\frac{m}{n} < y$. Use que $\frac{m-1}{n} \leq x$ (por quê?).

5. Agora, trabalhando com as regras de sinal provadas nos exercícios anteriores, prove o item (b) para quando $x < 0$: se $y > 0$, basta tomarmos $r = 0$; se $y < 0$, tomamos r racional entre $-y$ e $-x$ e provamos que $-r$ satisfaz o que queremos.