



ESCOLA POLITÉCNICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FORMANDO ENGENHEIROS E LÍDERES



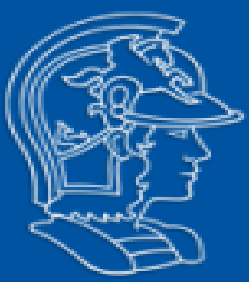
PRO3362 - Engenharia Econômica & Finanças

2º Semestre 2023: Segundas 13h10; Quintas 7h30

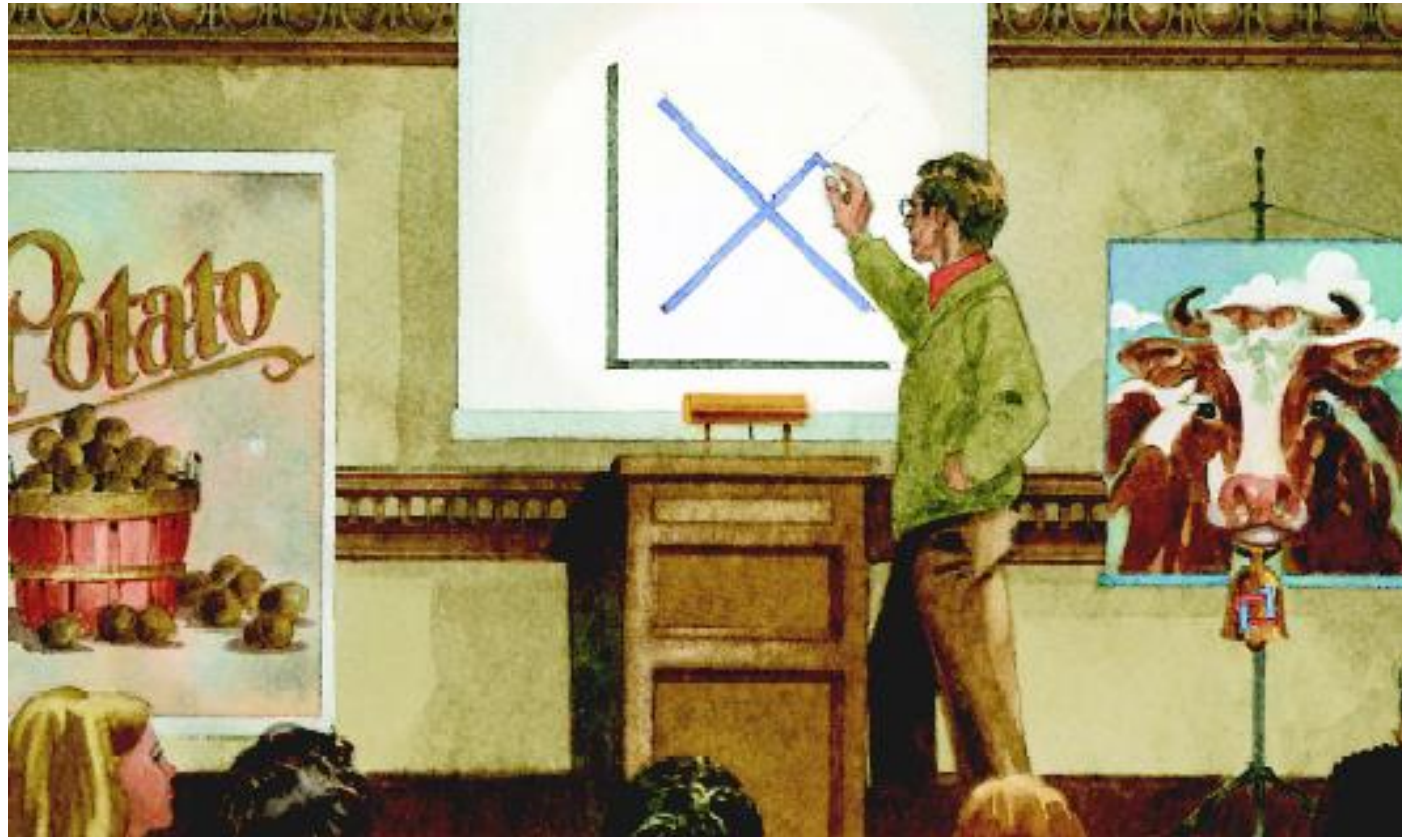
Prof. Dr. Erik Rego – erikrego@usp.br – sala FG223

linkedin.com/in/erik-rego-021124/

lattes.cnpq.br/6689850159735369



MATEMÁTICA FINANCEIRA





1.1 Juro

1.2 Juro Simples

1.3 Juro Composto

1.4 Comparação Juros Simples e Composto



1.1 Juro

1.2 Juro Simples

1.3 Juro Composto

1.4 Comparação Juros Simples e Composto



PERGUNTA INICIAL



**Se eu te pedir \$1.000,00 emprestado, para te pagar o mesmo
\$1.000,00 ao final da disciplina, o que você acharia ?**

E se fosse ao final da sua graduação?



VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO



Ponderar:

- Será que eu vou te pagar ? (risco de crédito)
- O poder de compra de \$1.000,00 até o final do curso será o mesmo ? (Inflação)
- O que você deixou de fazer nesse período? Viagens, compras, etc. (custo de oportunidade)
- Se você permanecesse com \$1.000,00 poderia aplicá-los e ganhar rendimentos ! (remuneração)



OU SEJA...



Dinheiro tem um custo associado ao tempo !

Logo, Nunca some valores em datas diferentes!



CRÉDITO OU DÉBITO?



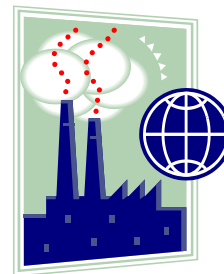
**Na compra de varejo, quando o caixa
te pergunta a forma do uso do cartão...**



FATORES DE PRODUÇÃO E SUAS REMUNERAÇÕES



Trabalho → Salário



Capacidade empresarial → Lucro



Tecnologia → Royalty



Terra → Aluguel



Capital → Juro



VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO



TODO SITE EM **ATÉ 12X SEM JUROS*** + **FRETE GRÁTIS BRASIL**** [CONFIRA](#)

*Confira as condições de parcelamento na página de produto. **Exceto para os departamentos Móveis e Eletrodomésticos e região Norte.

Faça seu login ou cadastre-se | Meus Pedidos | Central de Atendimento | Chat | Televendas: (11) 4003-2773

CASAS BAHIA.COM [Buscar](#) [LISTA DE CASAMENTO](#) [Meu Caminhão 1 produto](#) [100% seguro](#)

TVs e Video | Eletrodomésticos | Câmeras & Filmadoras | Celulares & Telefones | Informática | Portáteis | Móveis | Saúde & Beleza | Games | Utilidades Domésticas | Esporte & Lazer

Livros | Ferramentas | DVDs & Blu-Ray | Automotivo | Brinquedos | Bebês | Papelaria | Cama, Mesa e Banho | Relógios | Malas | Tablets [Volta às aulas](#) [Ver todos](#)

SMARTPHONES

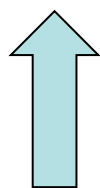
20%* **DE DESCONTO**

+ FRETE GRÁTIS BRASIL**

EM ATÉ 12X SEM JUROS



DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA



Seta para cima : entrada de caixa

Escala horizontal : tempo ou período de capitalização

Seta para baixo : saída de caixa

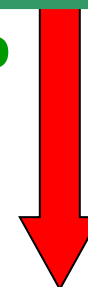
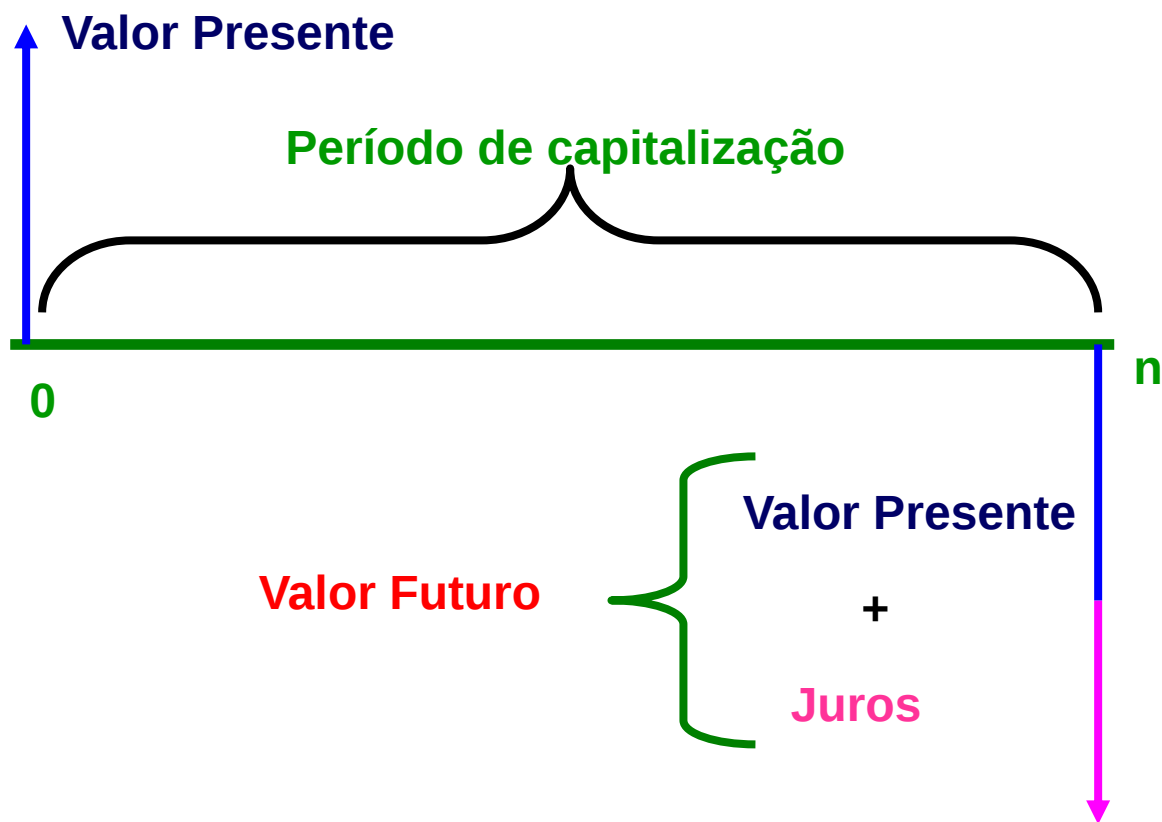




DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA





Juros Simples

Juros Compostos



1.1 Juro

1.2 Juro Simples

1.3 Juro Composto

1.4 Comparação Juros Simples e Composto



JUROS SIMPLES



É aquela na qual a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial. Neste regime de capitalização, os juros variam linearmente em função do tempo.

É utilizado nos mercados internacionais. No Brasil, por convenção, apenas operações dolarizadas utilizam este regime

Formulação:

- $FV_1 = PV + PV \cdot i$
- $FV_2 = FV_1 + PV \cdot i$ ou $PV + PV \cdot i + PV \cdot i$
- $FV_3 = FV_2 + PV \cdot i$ ou $PV + PV \cdot i + PV \cdot i + PV \cdot i$

>>> Fórmula geral: **$FV = PV (1 + i \times n)$** <<<



JUROS SIMPLES



Exemplo

Um investidor aplica \$ 100 mil por três anos a taxa de juros de 5% a.a. Qual os juros totais obtidos e qual o montante ao final de cada ano?

Juros para os 3 anos:

$$J = PV \cdot i \cdot n$$

$$J = 100.000 \times 5/100 \times 3$$

$$J = \text{US\$ } 15.000$$

Fórmula Geral:

$$FV = PV (1 + i \cdot n)$$

$$FV = 100.000 (1 + 3 \times 5\%)$$

$$FV = 115.000$$

Ano a ano:

$$FV_1 = 100.000 (1 + 0,05 \times 1)$$

$$FV_1 = \$ 105.000$$

$$FV_2 = 100.000 (1 + 0,05 \times 2)$$

$$FV_2 = \$ 110.000$$

$$FV_3 = 100.000 (1 + 0,05 \times 3)$$

$$FV_3 = \$ 115.000$$



EXERCÍCIO



Uma instituição financeira empresta R\$ 12.000, cobrando após um ano R\$ 14.400. Qual foi a taxa de juros simples cobrada?

Valor Presente (PV) = R\$ 12.000

Valor Futuro (FV) = R\$ 14.400

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$14.400 = 12.000 \cdot (1 + i \cdot 1)$$

$$(1 + i) = 14.400 / 12.000$$

$$i = 14.400 / 12.000 - 1 = 20\% \text{ a.a.}$$



EXERCÍCIO



Ao aplicarmos R\$ 48.400, recebemos de juro o valor de R\$ 1.452. Qual será a taxa de juros ganha na aplicação?

$$\text{Valor Presente (PV)} = \text{R\$ } 48.400$$

$$\text{Juro (J)} = \text{R\$ } 1.452$$

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$(PV + J) = PV \cdot (1 + i \cdot 1)$$

$$48.400 + 1.452 = 48.400 (1 + i \cdot 1)$$

$$48.400 + 1.452 = 48.400 + 48.400 \cdot i$$

$$\text{Taxa de Juros (i)} = J/PV = 1.452/48.400$$

$$i = 1.452/48.400 = 3\%$$

Fonte: Müller;Antonik (2012)



PONTO DE ATENÇÃO!



Taxa (i)

e

Número de Períodos (n)

devem estar sempre na

mesma base !!



TAXAS EQUIVALENTES



Conceito de Taxa Equivalente: duas taxas (i_1 e i_2) são ditas equivalentes quando ambas incidindo sobre o mesmo valor presente (PV) pelo mesmo período (n) resultam num mesmo valor futuro (FV)

$$FV = PV (1 + i_1 \times n_1) \text{ e } FV = PV (1 + i_2 \times n_2)$$



TAXAS EQUIVALENTES



Quais a taxa mensal equivalente a 9% a.a, juro simples?

Mensal $\leftrightarrow$ Anual

$$FV_{\text{cálculo mensal}} = FV_{\text{cálculo anual}}$$

$$PV.(1+i_m.n_m) = PV.(1+i_a.n_a)$$

$$PV.(1+i_m.12) = PV.(1+i_a.1)$$

$$i_m .12 = i_a .1$$

$$i_m = (i_a .1) / 12$$

$$i_m = 9\% / 12$$

$$i_m = 0,75\% \text{ a.m.}$$

$$i_a * 1 = i_s * 2 = i_q * 3 = i_t * 4 = i_m * 12 = i_d * 360$$



EXERCÍCIO



Num banco faço um empréstimo por 2 meses para pagar R\$ 500.000, sendo que o banco já desconta na frente R\$ 30.000 e deposita a diferença na conta corrente. Qual a taxa de juros simples mensal e anual do empréstimo?

$$FV = PV.(1+i_m.n_m)$$

$$500.000 = 470.000.(1+i_m.2)$$

$$500.000/470.000 = 1+ i_m .2$$

$$i_m = 3,19\% \text{ a.m.}$$

$$12 . i_m = i_a .1$$

$$i_a = 3,19\% * 12$$

$$i_a = 38,28\% \text{ a.a.}$$



1.1 Juro

1.2 Juro Simples

1.3 Juro Composto

1.4 Comparação Juros Simples e Composto



JURO COMPOSTO



É aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial acrescido de juros acumulados até o período anterior. Neste regime de capitalização a taxa varia exponencialmente em função do tempo. Mais comum, sobretudo no sistema financeiro brasileiro.

$$FV_1 = PV + PV \times i$$

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \times i = FV_1 \times (1 + i)$$

$$FV_2 = (PV + PV \times i) \times (1 + i)$$

$$FV_2 = PV \times (1 + i) \times (1 + i)$$

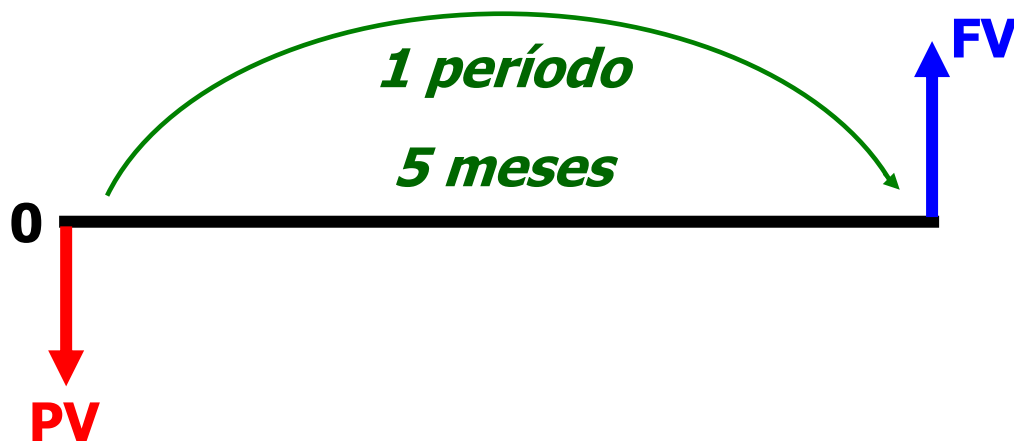
$$\text{Fórmula Geral: } FV = PV \times (1 + i)^n$$



JURO COMPOSTO



R\$ 1.500 são aplicados num CDB de um banco em regime de juros compostos, por cinco meses, com taxa de 1,0% a.m. Calcular o montante (FV) e os juros.



$$\begin{aligned} FV &= PV (1 + i)^n \\ FV &= 1.500 (1 + 1,0\%)^5 \\ FV &= R\$1.576,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= FV - PV \\ J &= 1.576,5 - 1.500 \\ J &= 76,5 \end{aligned}$$

<http://epx.com.br/ctb/hp12c.php>



EXERCÍCIO



Você me empresta R\$5.000 por 6 meses a taxa de 2% a.m. Meio ano depois, eu continuo “duro” , e você aceita receber apenas a metade do montante devido. Quanto eu te pago?

$$FV = PV.(1+i_m)^{n_m}$$

$$FV = 50\% * PV.(1+i_m)^{n_m}$$

$$FV = 50\% * 5.000 * (1+2\%)^6$$

$$FV = 50\% * 5.000 * 1,126162$$

$$FV = \$ 2.815,41$$



EXERCÍCIO



Qual será a taxa de juros anuais de uma aplicação de R\$ 1,0 milhão que deverá render um valor futuro de R\$ 1,6 milhão no prazo de 5 anos?

$$FV = PV.(1+i_a)^{n_a}$$

$$1.600.000 = 1.000.000.(1+i_a)^5$$

$$1,6 = (1+i_a)^5$$

$$(1,6)^{(1/5)} = (1+i_a)$$

$$i_a = 9,86\% \text{ a.a.}$$



EXERCÍCIO



Daqui há 18 meses deve-se efetuar um pagamento de R\$ 500.000 referente a um empréstimo, sendo a taxa de juros de 5% a.m, qual o valor do empréstimo?

$$FV = PV.(1+i_m)^{nm}$$

$$500.000 = PV.(1+5\%)^{18}$$

$$PV = 500.000 / ((1+5\%)^{18})$$

$$PV = 500.000 / 2,406619$$

$$PV = \$ 207.760$$



PONTO DE ATENÇÃO!



Taxa (i)

e

Número de Períodos (n)

devem estar sempre na

mesma base !!



TAXAS EQUIVALENTES



Quais a taxa mensal proporcionais a 9% a.a, juro composto?

Mensal $\leftrightarrow$ Anual

$$FV_{\text{cálculo mensal}} = FV_{\text{cálculo anual}}$$

$$PV.(1+i_m)^{Nm} = PV.(1+i_a)^{Na}$$

$$PV.(1+i_m)^{12} = PV.(1+i_a)^1$$

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)^1$$

$$(1+i_m) = (1+i_a)^{(1/12)}$$

$$i_m = (1+i_a)^{(1/12)} - 1$$

$$i_m = (1+9\%)^{(1/12)} - 1$$

$$i_m = 0,72\% \text{ a.m.}$$

$$(1+i_{aa}) = (1+i_{as})^2 = (1+i_{aq})^3 = (1+i_{at})^4 = (1+i_{ab})^6 = (1+i_{am})^{12} = (1+i_{ad})^{360}$$



EXERCÍCIO TAXA EQUIVALENTE



Dado $i=20\%$ a.a., determinar as taxas mensal e bimestral

Mensal $\leftrightarrow$ Anual

$$FV_{\text{cálculo mensal}} = FV_{\text{cálculo anual}}$$

$$PV.(1+i_m)^{Nm} = PV.(1+i_a)^{Na}$$

$$\cancel{PV}.(1+i_m)^{12} = \cancel{PV}.(1+i_a)^1$$

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)^1$$

$$(1+i_m) = (1+i_a)^{(1/12)}$$

$$i_m = (1+i_a)^{(1/12)} - 1$$

$$i_m = (1+20\%)^{(1/12)} - 1$$

$$i_m = 1,53\% \text{ a.m.}$$

Bimestral $\leftrightarrow$ Anual

$$FV_{\text{cálculo bimestral}} = FV_{\text{cálculo anual}}$$

$$PV.(1+i_b)^{Nb} = PV.(1+i_a)^{Na}$$

$$\cancel{PV}.(1+i_b)^6 = \cancel{PV}.(1+i_a)^1$$

$$(1+i_b)^6 = (1+i_a)^1$$

$$(1+i_b) = (1+i_a)^{(1/6)}$$

$$i_b = (1+i_a)^{(1/6)} - 1$$

$$i_b = (1+20\%)^{(1/6)} - 1$$

$$i_b = 3,085\% \text{ a.b.}$$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO



$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

$$PV = 10.000$$

$$i = 20\% \text{ aa}$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$FV = ? \rightarrow 10.466,35$$

$$PV = 6.000$$

$$i = 2\% \text{ am}$$

$$n = 2 \text{ anos}$$

$$FV = ? \rightarrow 9.650,62$$



TAXA ACUMULADA



Quadro de Rentabilidades

Mês	Rentab.	CDI
Fev/15	0,74	0,82
Mar/15	0,93	1,03
Abr/15	0,85	0,95
Mai/15	0,89	0,98
Jun/15	0,96	1,06
Jul/15	1,07	1,18
Ago/15	1,02	1,11
Set/15	1,01	1,11
Out/15	1,01	1,11
Nov/15	0,96	1,06
Dez/15	1,06	1,16
Jan/16	0,96	1,05

Período	Acumulado	
	Rentab.	CDI
No mês anterior	0,96	1,05
No ano	1,49	1,21
Últimos 12 meses	12,08	13,37
Últimos 24 meses	22,96	25,74
Últimos 36 meses	31,78	36,20

Patrimônio Líquido
R\$ 77.061.263,42



TAXA ACUMULADA



Você aplicou num fundo de renda variável R\$ 50.000,00 e obteve as rentabilidades abaixo:

Mês 1: 1,25%

Mês 2: 0,80%

Mês 3: 0,90%

Mês 4: 1,70%

Determinar a rentabilidade acumulada e o valor de resgate no final do período.



TAXA ACUMULADA



Você aplicou num fundo de renda variável R\$ 50.000,00 e obteve as rentabilidades:
mês1: 1,25%; mês2: 0,80%; mês 3: 0,90%; mês 4: 1,70%

$$FV_1 = PV + PV \times i_1$$

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \times i_2 = FV_1 \times (1 + i_2)$$

$$FV_2 = (PV + PV \times i_1) \times (1 + i_2)$$

$$FV_2 = PV \times (1 + i_1) \times (1 + i_2)$$

$$FV_3 = PV \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3)$$

$$FV_4 = PV \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times (1 + i_4)$$

$$FV_4 = 50.000 \times (1+1,25\%) \times (1+0,8\%) \times (1+0,9\%) \times (1+1,7\%)$$

$$FV_4 = \text{R\$ } 52.364,59$$



EXERCÍCIO



Num banco faço um empréstimo por 2 meses para pagar R\$ 500.000, sendo que o banco já desconta na frente R\$ 30.000 e deposita a diferença na conta corrente. Qual a taxa de juros composta mensal e anual do empréstimo?

$$FV = PV.(1+i_m)^{n_m}$$

$$500.000 = 470.000.(1+i_m)^2$$

$$(500.000/470.000)^{(1/2)} = 1 + i_m$$

$$i_m = 3,14\% \text{ a.m.}$$

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a)^1$$

$$(1 + 3,14\%)^{12} - 1 = i_a$$

$$i_a = 44,95\% \text{ a.a.}$$



1.1 Juro

1.2 Juro Simples

1.3 Juro Composto

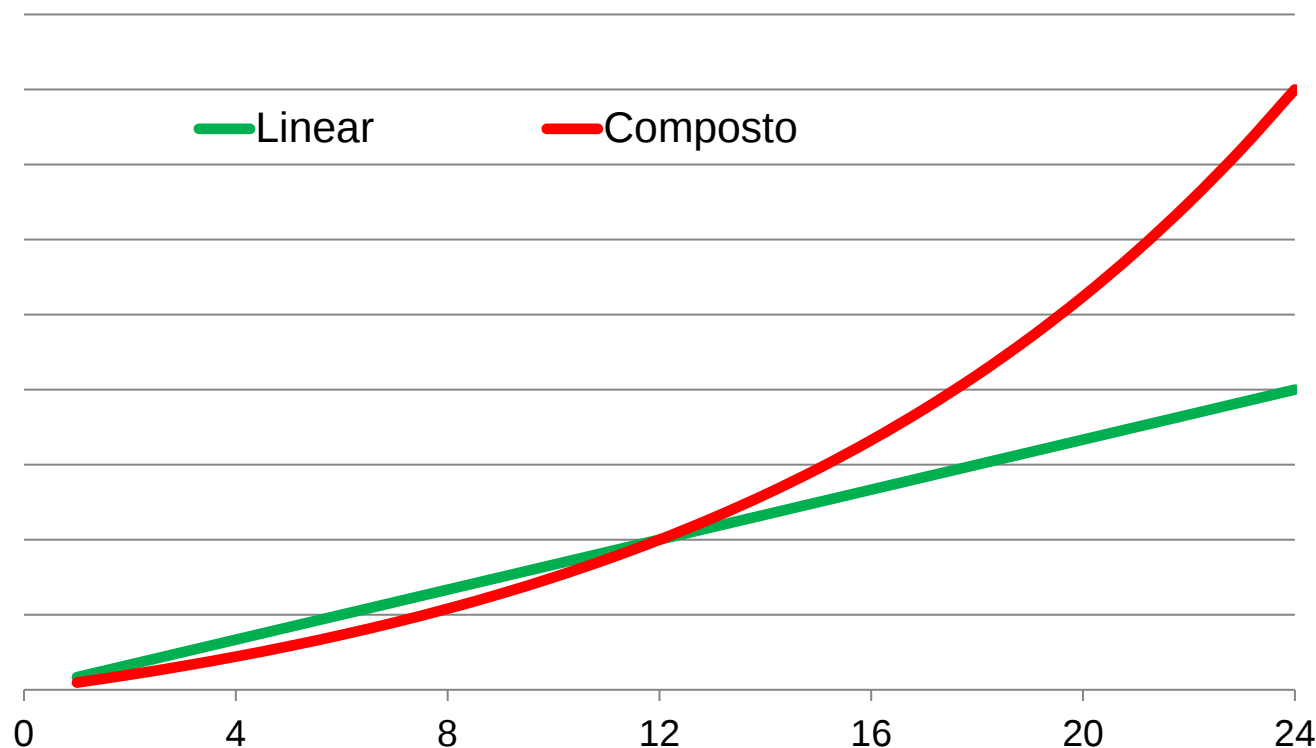
1.4 Comparação Juros Simples e Composto



COMPARANDO SIMPLES E COMPOSTO



Um gerente de banco te dá a opção de aplicar R\$100.000,00 a 9,0% a.a. linear ou 9,0% a.a. composto, qual das duas aplicações te dará o maior retorno?





COMPARANDO SIMPLES E COMPOSTO



Um gerente de banco te dá a opção de aplicar R\$100.000,00 a 9,0% a.a. linear ou 9,0% a.a. composto, qual das duas aplicações te dará o maior retorno?

Meses	Juro Simples			Juro Composto		
	Cálculo do Juro	Juro	Montante	Cálculo do Juro	Juro	Montante
6	$100.000 * (9\% * 6/12)$	4.500	104.500	$100.000 * ((1+9\%)^{(6/12)} - 1)$	4.403	104.403
9	$100.000 * (9\% * 9/12)$	6.750	106.750	$100.000 * ((1+9\%)^{(9/12)} - 1)$	6.677	106.677
12	$100.000 * (9\% * 12/12)$	9.000	109.000	$100.000 * ((1+9\%)^{(12/12)} - 1)$	9.000	109.000
15	$100.000 * (9\% * 15/12)$	11.250	111.250	$100.000 * ((1+9\%)^{(15/12)} - 1)$	11.374	111.374
18	$100.000 * (9\% * 18/12)$	13.500	113.500	$100.000 * ((1+9\%)^{(18/12)} - 1)$	13.799	113.799
21	$100.000 * (9\% * 21/12)$	15.750	115.750	$100.000 * ((1+9\%)^{(21/12)} - 1)$	16.278	116.278
24	$100.000 * (9\% * 24/12)$	18.000	118.000	$100.000 * ((1+9\%)^{(24/12)} - 1)$	16.278	118.810



TAXAS EQUIVALENTES



Você prefere emprestar R\$50.000 por 48 meses a taxa de 12% a.a. juro simples ou 11% a.a. juro composto?

$$50.000 \times (1 + 12\% \times 48/12) = 74.000,00$$

$$50.000 \times (1 + 11\%)^{(48/12)} = 75.903,52$$



TAXAS EQUIVALENTES



Qual equivalência de taxa de juro simples para 11% a.a. juro composto, no exemplo de 48 meses?

Simple $\leftrightarrow$ Composto

$$FV_{\text{cálculo simples}} = FV_{\text{cálculo composto}}$$

$$PV.(1+i_s \times n) = PV.(1+i_c)^n$$

$$\cancel{PV}.(1+i_s \times 48/12) = \cancel{PV}.(1+i_c)^{48/12}$$

$$(1+i_s \times 4) = (1+i_c)^4$$

$$i_s \times 4 = [(1+i_c)^4 - 1]$$

$$i_s = [(1+i_c)^4 - 1] / 4$$

$$i_s = [(1+11\%)^4 - 1] / 4$$

$$i_s = [1,518 - 1] / 4$$

$$i_s = 12,9518\%$$



11/02/2016 às 16h43

Taxas de juros sobem pelo 16º mês seguido, diz Anefac



SÃO PAULO - As taxas de juros das operações de crédito voltaram a subir em janeiro de 2016, na 16ª elevação mensal consecutiva, de acordo com a Associação Nacional dos Executivos de Finanças, Administração e Contabilidade (Anefac).

Segundo a Anefac, as seis linhas de crédito pesquisadas tiveram aumento de juros no mês (juros do comércio, cartão de crédito rotativo, cheque especial, crédito direto para financiamento de veículos, empréstimo pessoal de bancos e empréstimo pessoal de financeiras). Com isso, a taxa média de juros geral para pessoa física subiu 0,11 ponto percentual de dezembro para janeiro deste ano e atingiu 7,67% ao mês (142,74% ao ano). Esse é a maior taxa desde fevereiro de 2005.

No caso das empresas, também houve elevação nas três linhas de crédito pesquisadas (capital de giro, desconto de duplicatas e conta garantida). A taxa de juros média geral para pessoa jurídica apresentou elevação de 0,06 ponto percentual ao passar de 4,27% ao mês (65,16% ao ano) em dezembro de 2015 para 4,33% ao mês (66,31% ao ano) em janeiro de 2016. Esse é o maior patamar desde fevereiro de 2009.

De acordo com o diretor de estudos e pesquisas econômicas da Anefac, Miguel José Ribeiro de Oliveira, um dos motivos que explicam as elevações dos juros é o cenário econômico, que aumenta o risco de os índices de inadimplência também subirem. “Este momento se baseia no fato de os índices de inflação estarem mais elevados, com aumento de impostos e juros maiores, que reduzem a renda das famílias. Agregado ao baixo crescimento econômico, deverá promover alta dos índices de





Bradesco escapa de indenização de R\$ 1 trilhão

São Paulo - O Tribunal de Justiça do Rio de Janeiro anulou ontem uma decisão que condenava o Bradesco (<http://exame.abril.com.br/topicos/bradesco>) a pagar indenização de 1,4 trilhão de reais a um correntista que teve 4.505,30 reais desviados da sua conta em 1994. Procurado por EXAME.com, o banco afirmou que não comenta assuntos que estão correndo na Justiça.

Na época, Walter Vital Bandeira de Mello entrou com uma ação pedindo reparação de danos. A retirada do dinheiro teria acontecido depois de o aposentado ter sido abordado por um rapaz oferecendo ajuda, dentro da sua agência bancária. A Justiça determinou a devolução da quantia com correção monetária e juros no mesmo percentual que seria cobrado caso o cliente ficasse com a conta no vermelho e caísse no cheque especial. O Bradesco recorreu, mas a decisão foi mantida.

A lógica de fazer o banco arcar com sua própria política fez o montante devido crescer astronomicamente: com o processo se arrastando na Justiça, a conta chegou a 700.000 reais apenas quatro anos depois do ocorrido, pulando para 9 milhões em 2000 e incríveis 1,4 trilhão de reais em 2012.

O Órgão Especial do Tribunal de Justiça do Rio de Janeiro decidiu anular o pagamento por considerar que **a chamada capitalização anual dos juros - ou a cobrança dos famosos "juros sobre juros" - teria acarretado uma pena extorsiva**. Agora, serão acrescidos juros simples sobre o valor extraviado do aposentado, que já faleceu. O beneficiário será seu filho, Guilherme de Gusmão Bandeira de Mello. A soma final ainda não foi definida.

No julgamento de ontem, o desembargador Cláudio de Mello Tavares reconheceu que os bancos adotam o cálculo de juros compostos, mas afirmou que a prática seria lamentável, pois penalizaria os consumidores que não batem à porta do Judiciário para questionar a cobrança abusiva. "É surrealista que uma conta de 4.505 reais hoje bata à porta de 1 trilhão. Seria aplicar a lei de Talião. Nós vamos ratificar esta ilegalidade? Claro que não", afirmou.

Obrigado