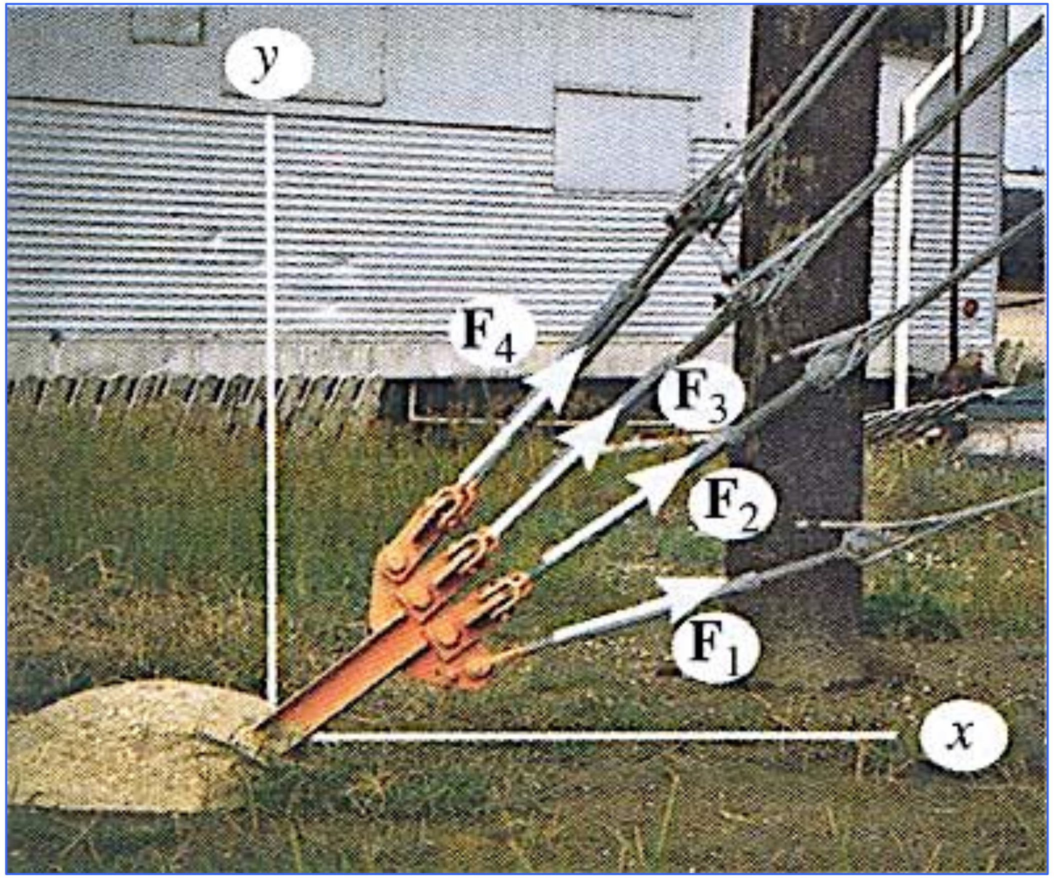
Vetores Força

*Agente externo que modifica o equilíbrio ou movimento de um corpo (rígido ou elástico), a **FORÇA** é!*

Prof. Assoc. Flávio D. Marques & Prof. Assoc. Leopoldo de Oliveira

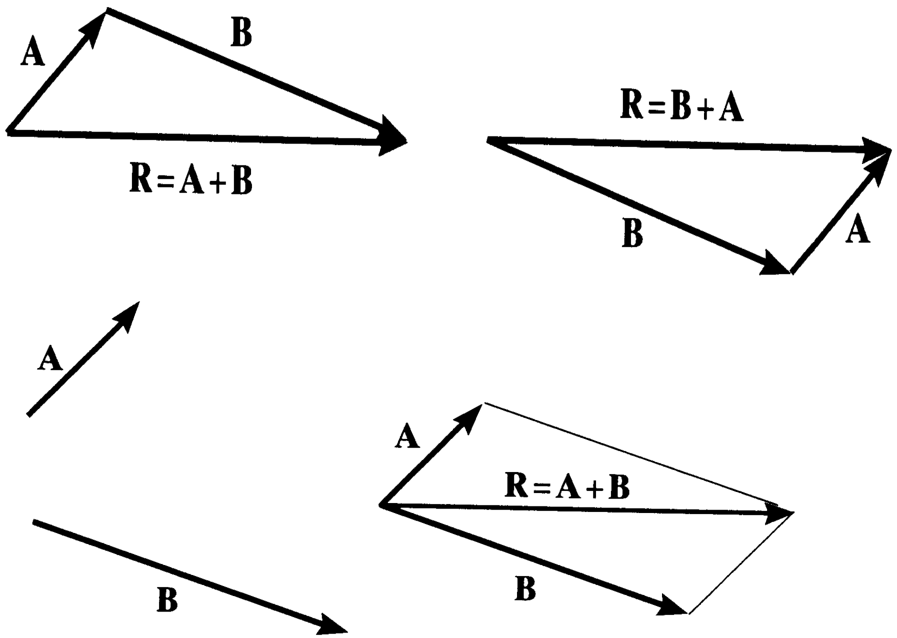
Vetores Força



Se força é uma **grandeza vetorial**, o vetor resultante deve ser obtido através da operação vetorial de adição. Qualquer outra manipulação com forças deve seguir as **operações vetoriais**.

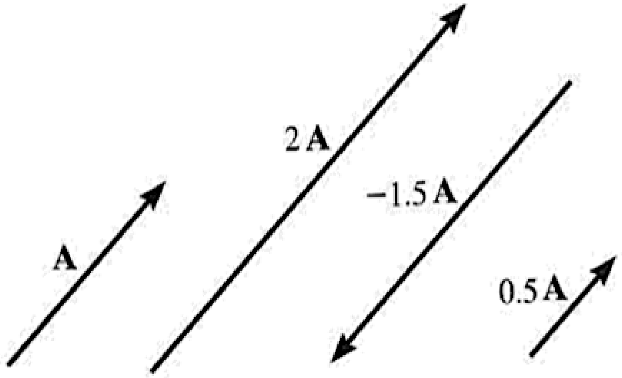
Operações Vetoriais

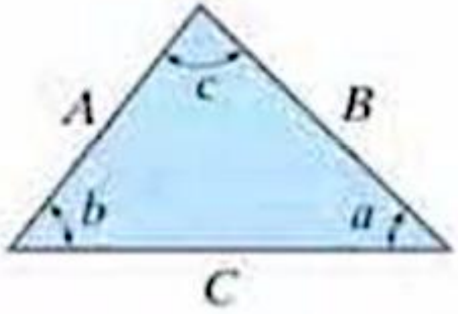
Adição vetorial



Lei do Paralelogramo

Multiplicação e divisão por escalar





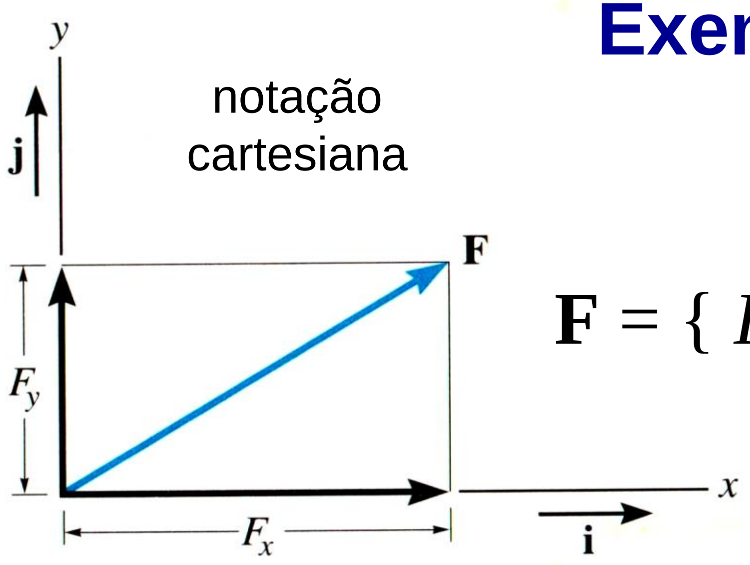
Lei dos cossenos

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

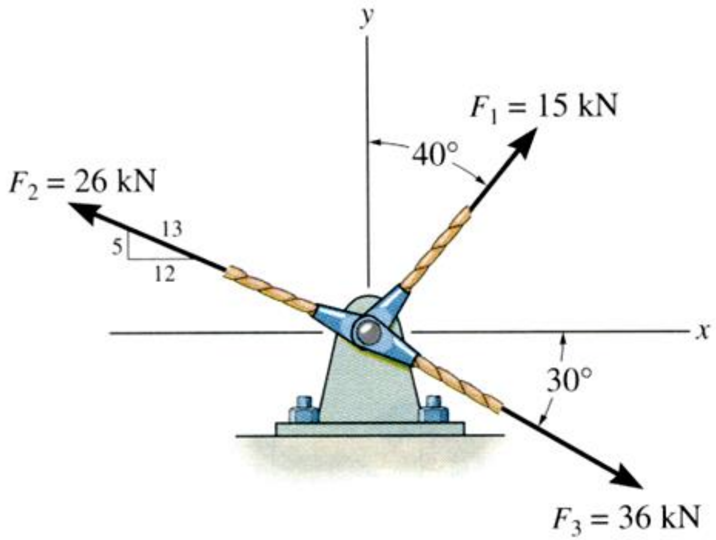
Lei dos senos

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Exemplo: Adição de Forças Vetoriais



$$\mathbf{F} = \{ F_x \ \mathbf{i} + F_y \ \mathbf{j} \} \text{ N}$$



$$\mathbf{F}_1 = \{ 15 \text{ sen } 40^\circ \ \mathbf{i} + 15 \cos 40^\circ \ \mathbf{j} \} \text{ kN}$$

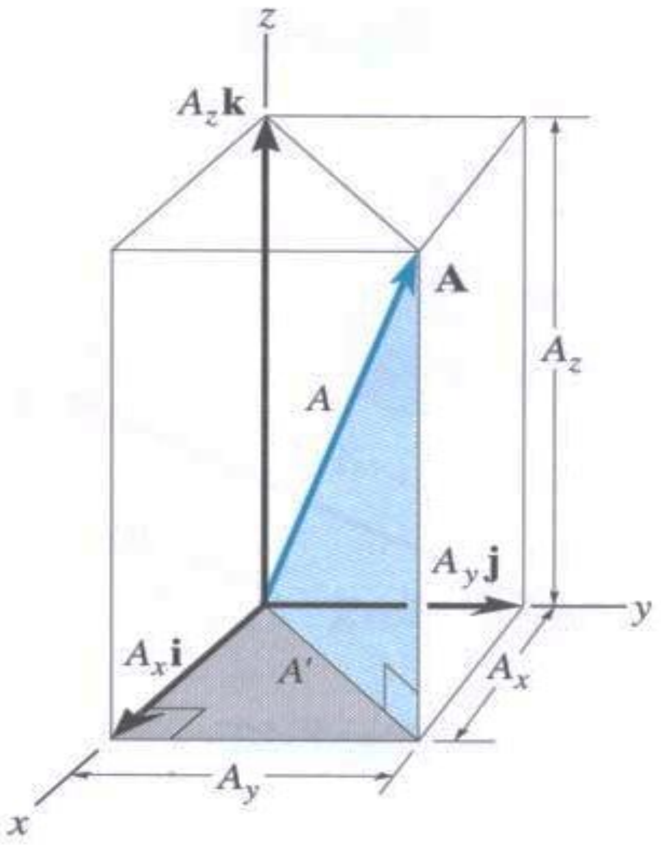
$$= \{ 9{,}642 \ \mathbf{i} + 11{,}49 \ \mathbf{j} \} \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{ -(12/13)\ 26 \ \mathbf{i} + (5/13)\ 26 \ \mathbf{j} \} \text{ kN} = \{ -24 \ \mathbf{i} + 10 \ \mathbf{j} \} \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_3 = \{ 36 \cos 30^\circ \ \mathbf{i} - 36 \text{ sen } 30^\circ \ \mathbf{j} \} \text{ kN} = \{ 31{,}18 \ \mathbf{i} - 18 \ \mathbf{j} \} \text{ kN}$$

Resultante: $\mathbf{F}_R = \{ (9{,}642 - 24 + 31{,}18) \ \mathbf{i} + (11{,}49 + 10 - 18) \ \mathbf{j} \} \text{ kN} = \{ 16{,}82 \ \mathbf{i} + 3{,}49 \ \mathbf{j} \} \text{ kN}$ ✔

Vetores Cartesianos



$$\mathbf{A} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k})$$

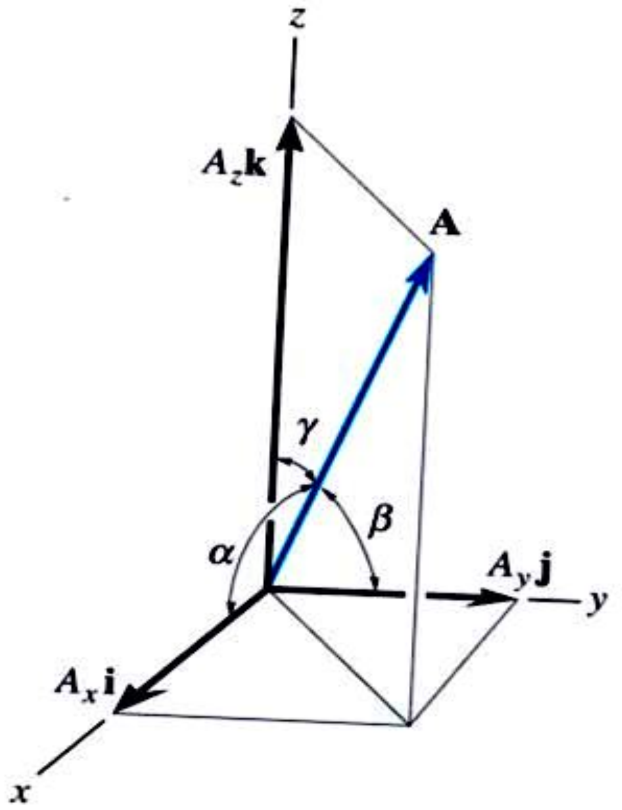
Magnitude do vetor **A**:

$$A = (A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2})^{1/2}$$

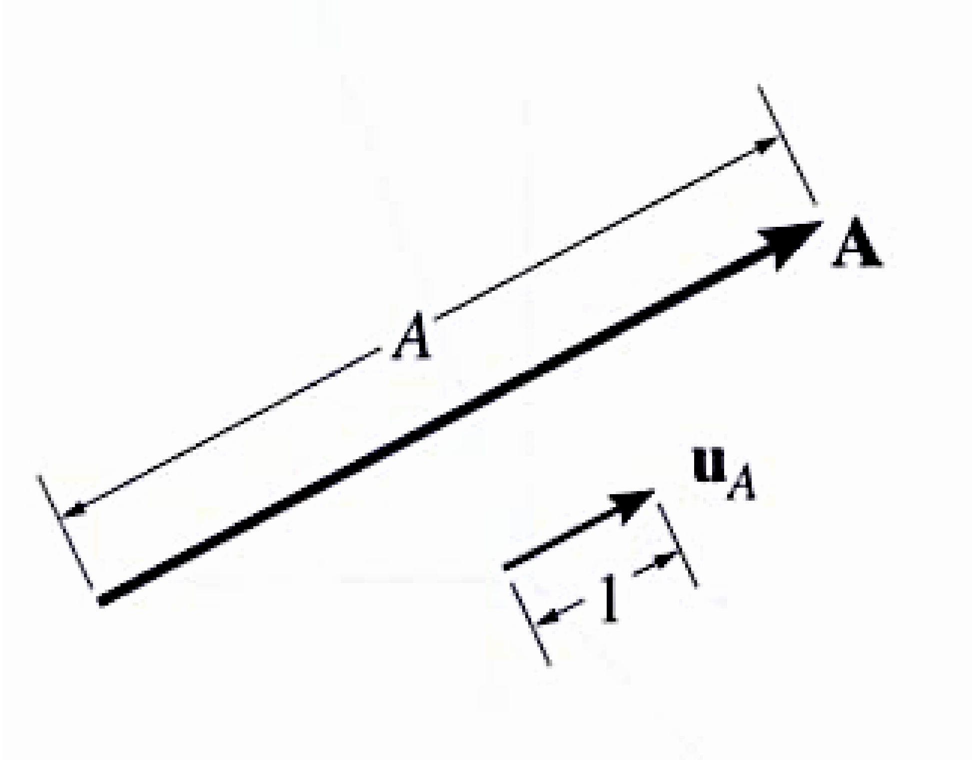
Orientação (direção) do vetor **A**:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

(cossenos diretores de **A**)



Vetores Unitários



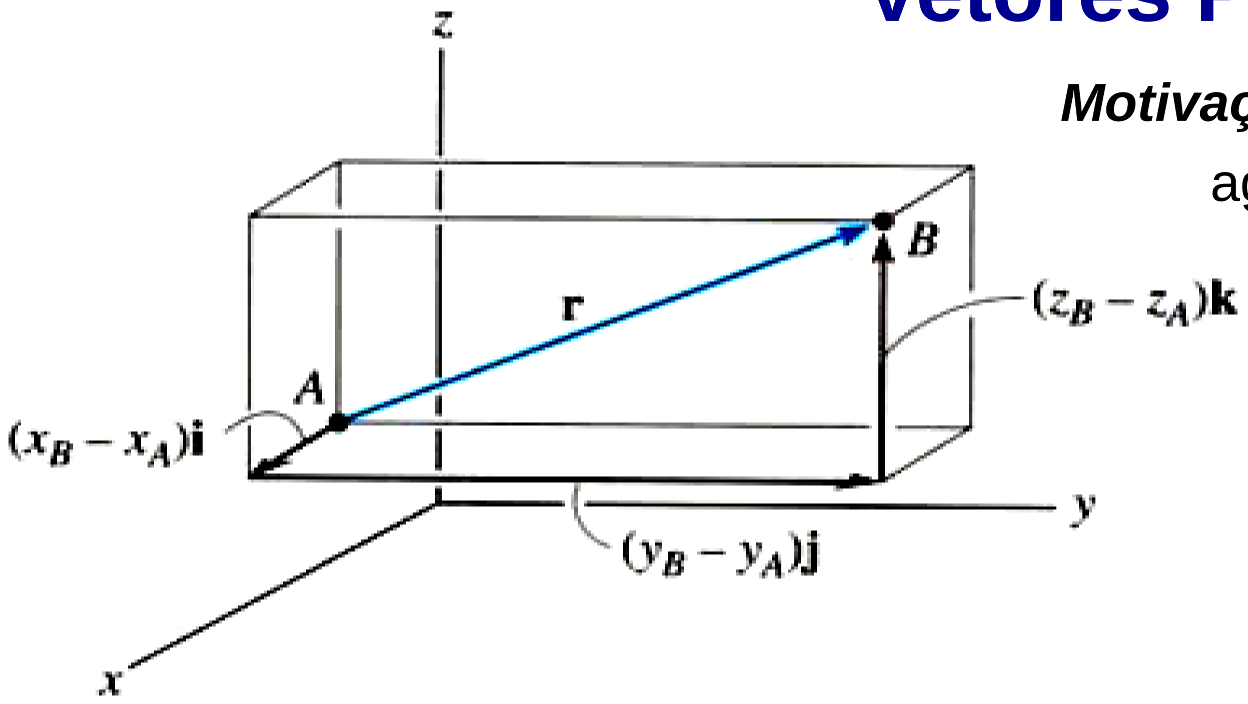
Vetor de magnitude unitária é usado para determinar a **direção** e **sentido** de um outro vetor.

$$\mathbf{A} = A\,\mathbf{u}_A$$

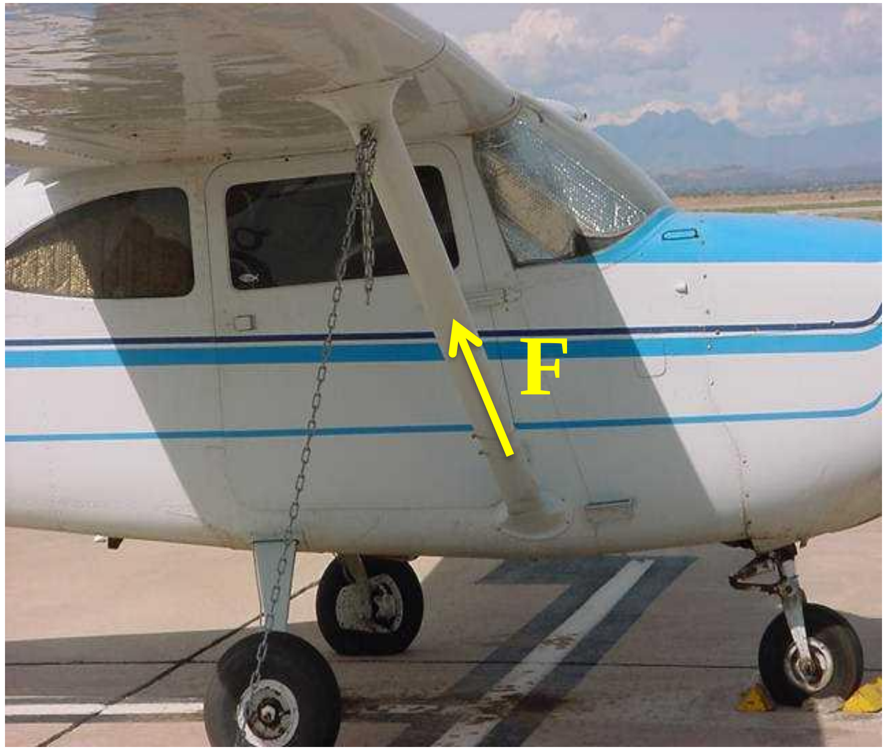
$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\,\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\,\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Vetores Posição



Motivação: Como podemos determinar o vetor força agindo em uma direção e sentido específicos?

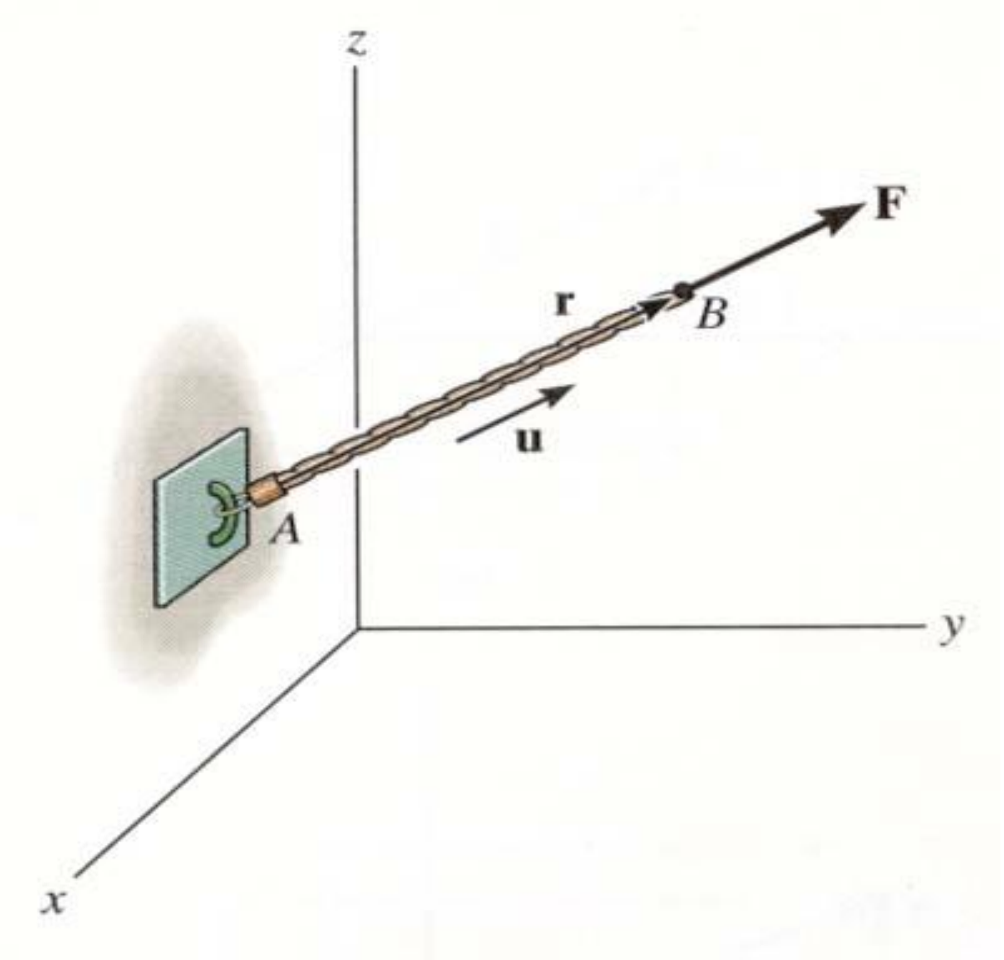


Vetor posição direcionado de A para B:

$$\mathbf{r}_{BA} = \{(x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

Observem a nomenclatura!

Vetores Posição *(cont.)*



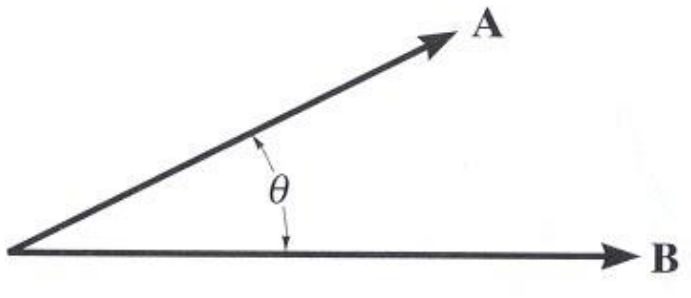
O **vetor posição** pode ser usado para obter o vetor força sabendo a magnitude da força $\mathbf{F}$ e as coordenadas de pontos ao longo da linha de ação dessa força.

a) Determinar, $\mathbf{r}_{BA}$, ao longo da linha AB.

b) Calcule o vetor unitário, $\mathbf{u}_{BA} = (\mathbf{r}_{BA}/r_{BA})$.

c) Determina-se o vetor de força pela sua magnitude e vetor unitário, $\mathbf{F} = F\,\mathbf{u}_{BA}$.

O Produto Escalar



$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = A\,B\cos\theta$$

onde θ é o menor ângulo entre os vetores (sempre entre 0° e 180°).

O produto escalar resulta em um escalar.

Para dois vetores cartesianos:

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k})\bullet(B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k})$$

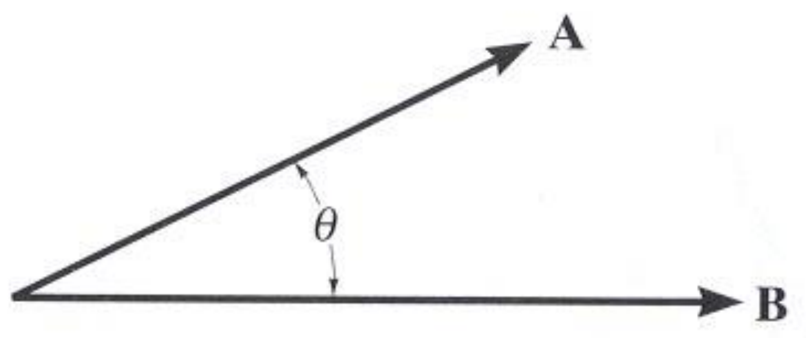
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

sendo que,

$$\mathbf{i}\bullet\mathbf{j} = 0\,, \quad \mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = 1,\ \ldots$$

e assim por diante.

O Produto Escalar *(cont.)*



Motivação: Usando o produto escalar para encontrar o ângulo entre dois vetores dados (vetores cartesianos):

a) Calcular o produto escalar,

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z),$$

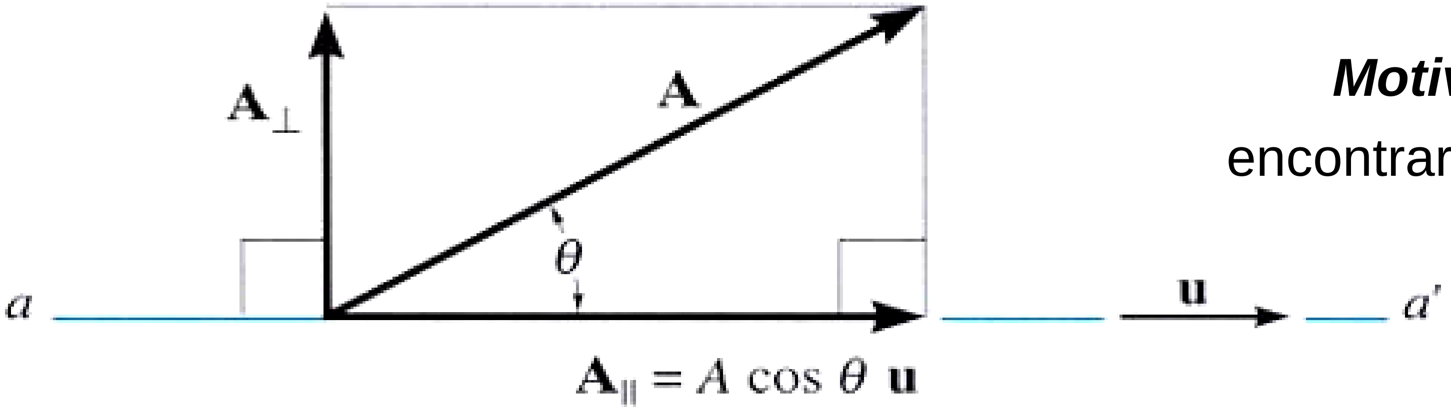
b) Calcular as magnitudes dos vetores **A** e **B**, e

c) Usar a definição do produto escalar para encontrar θ, ou seja,

$$\theta = \cos^{-1} [(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})/(A\ B)],$$

onde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

O Produto Escalar *(cont.)*



Motivação: Usando o produto escalar para encontrar a projeção de um vetor conhecido em uma direção específica:

1. Encontrar o vetor unitário, $\mathbf{u}$, ao longo da direção aa'

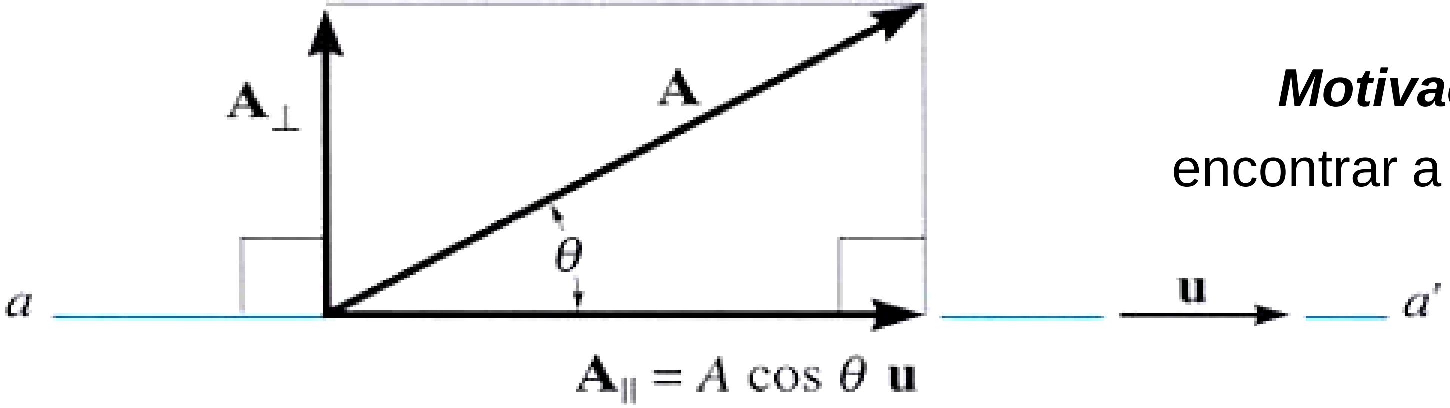
2. Encontrar a magnitude da projeção de $\mathbf{A}$ ao longo de aa' pelo produto escalar

$$A_{\parallel} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{u} = A_x u_x + A_y u_y + A_z u_z$$

3. Do passo anterior tem-se

$$\mathbf{A}_{\parallel} = A_{\parallel}\, \mathbf{u}$$

O Produto Escalar *(cont.)*



Motivação: Usando o produto escalar para encontrar a projeção de um vetor conhecido em uma direção específica:

4. Então, a magnitude da componente perpendicular pode ser obtida calculado,

$$A_\perp = (A^2 - A_\parallel^{\,2})^{1/2}$$

portanto

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_\parallel$$

que pode ser rearranjado como

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel$$

Vetores Força

Operações Vetoriais

Vetores Cartesianos

Vetores Unitários

Vetores Posição

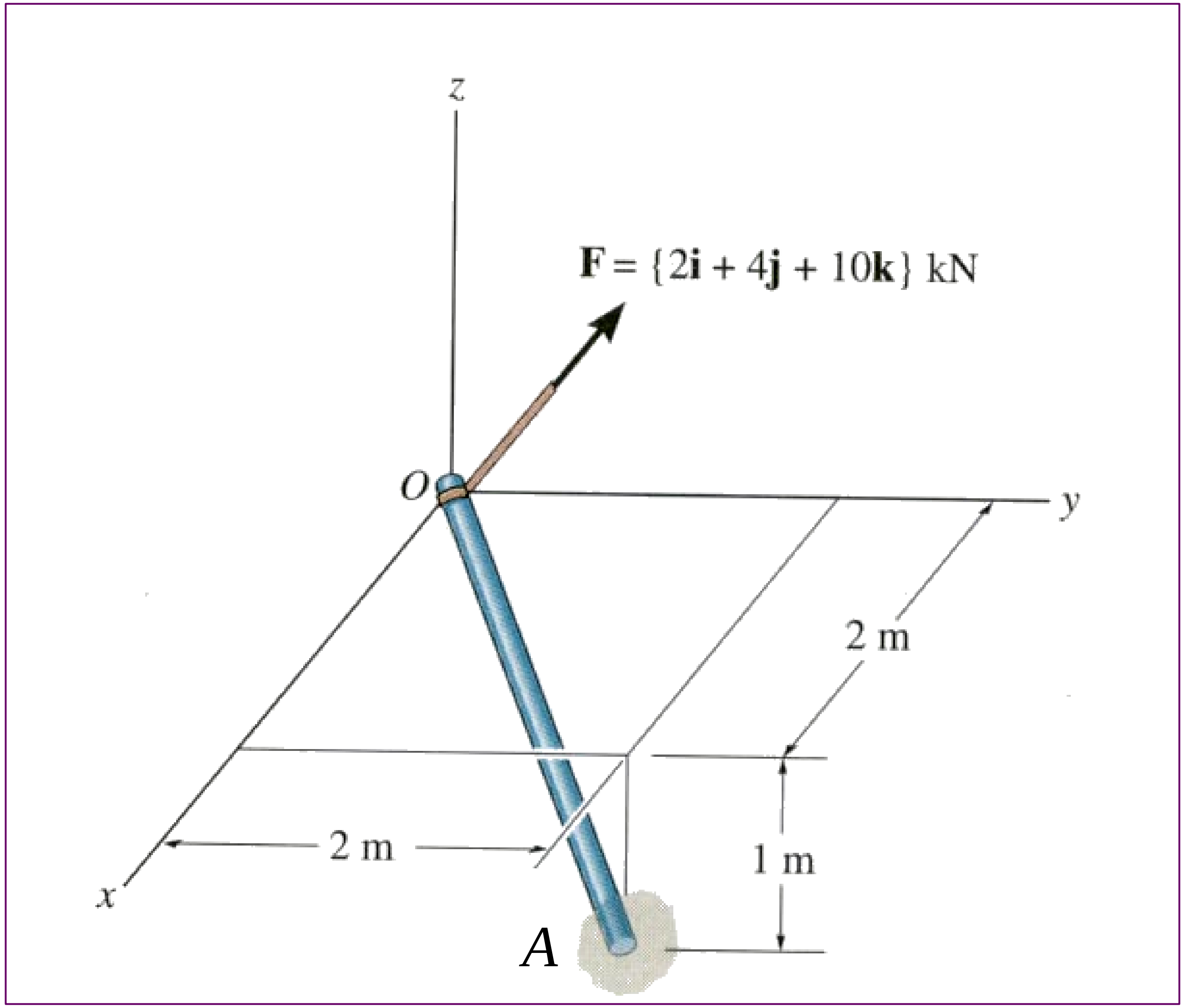
O Produto Escalar

Exemplo:

Determinar:

(a) O ângulo entre a força aplicada e direção do mastro (O para A).

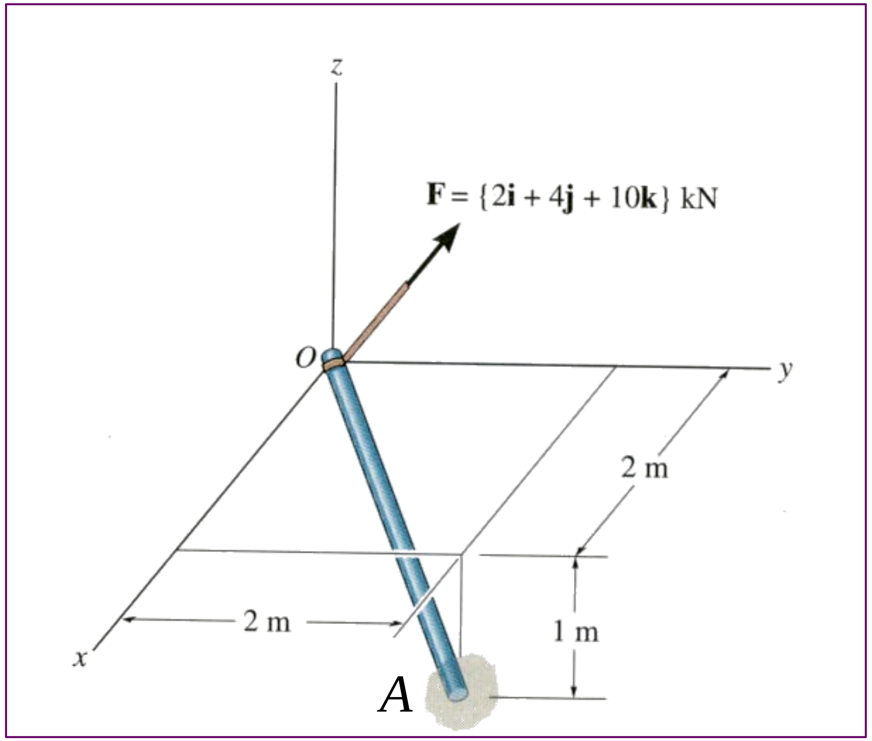
(b) A magnitude da força na direção de O para A do mastro.



Solução:

(a) O ângulo entre a força aplicada e direção do mastro (O para A).

$$\theta = \cos^{-1}\{(\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}_{AO})/(F\ \ r_{AO})\}$$



$$\mathbf{r}_{AO} = \{2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{k}\}\text{ m}$$

$$r_{AO} = (2^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2} = 3\text{ m}$$

$$\mathbf{F} = \{2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

$$F = (2^2 + 4^2 + 10^2)^{1/2} = 10{,}95\text{ kN}$$

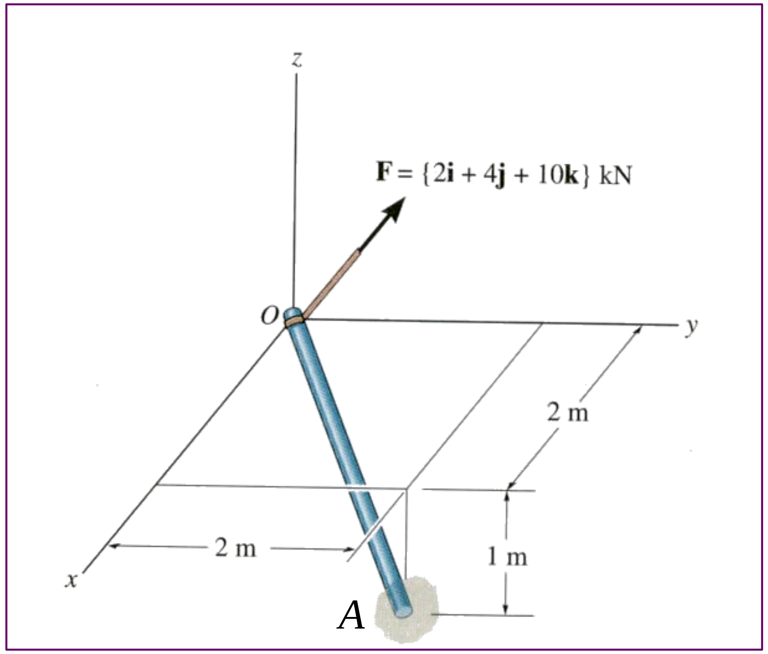
$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{r}_{AO} = (2)(2) + (4)(2) + (10)(-1) = 2\text{ kN·m}$$

$$\theta = \cos^{-1}\{2/(10{,}95 * 3)\} = 86{,}5°$$

Solução:

(b) A magnitude da força na direção de O para A do maestro.

$$F_{AO} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{u}_{AO}$$



$$\mathbf{u}_{AO} = \mathbf{r}_{AO}/r_{AO} = \{(2/3)\,\mathbf{i} + (2/3)\,\mathbf{j} - (1/3)\,\mathbf{k}\}$$

$$F_{AO} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{u}_{AO} = (2)(2/3) + (4)(2/3) + (10)(-1/3) = 0{,}667 \text{ kN}$$ ✓

ou então, conhecido θ:

$$F_{AO} = F\cos\theta = 10{,}95\cos(86{,}51^\circ) = 0{,}667 \text{ kN}$$ ✓