

Abordagens analíticas para a música pós-tonal



Apresentação	3
Introdução à teoria dos conjuntos	5
A representação circular.....	9
Operações com conjuntos de classes de altura (CCA)	11
Cálculo de invariâncias.....	26
Multiplicação	32
Referências	39

Apresentação

Muitos estudos de análise harmônica do repertório pós-tonal adotam a teoria dos conjuntos como ferramenta para a compreensão de certos procedimentos harmônicos. Apesar de concebida originalmente para a análise de música atonal e dodecafônica, essa ferramenta pode ser empregada satisfatoriamente na análise de música tendo por base o sistema de afinação temperada. E pode até mesmo ser usada na organização do material composicional, como ferramenta criativa.

O que vem a ser “pós-tonalidade”? Além de seu habitat natural - a música dodecafônica - a teoria dos conjuntos também mostrou-se uma possibilidade interessante de mapeamento do material harmônico no repertório da primeira metade do século XX onde melodias e acordes são parcialmente organizados sobre elementos estruturantes tradicionais, como acordes de raiz triádica encadeados sem funções tonais “clássicas”, ou coleções escalares empregadas sem as convenções hierárquicas predominantemente sobre o ciclo das quintas. Assim, isso possibilita um outro olhar, focado nas proporções intervalares latentes no sistema temperado, sobre a música de compositores como Debussy, Stravinsky, Bartók, Ravel e Villa-Lobos, dentre outros compositores canônicos do modernismo. Acredito que essa abordagem possa também ser aplicada com eficácia em outros estilos musicais, como no jazz ou na música popular brasileira posterior à bossa nova. Esse universo musical, onde as noções derivadas da harmonia tradicional perdem sua importância e aplicação, pode ser genericamente chamado de “pós-tonal”.¹

Há, no entanto, certo hiato entre a chamada tonalidade “clássica” ou tradicional, e o universo pós-tonal do século XX; boa parte da produção musical do Romantismo representa um desafio considerável para a compreensão dos processos harmônicos. O esgarçamento das práticas convencionais de tratamento da dissonância alteraram significativamente o estatuto da composição musical. A dificuldade de analisar consistentemente a obra de compositores como Wagner, Scriabin, Mahler, R. Strauss, Franck, Alberto Nepomuceno, Henrique Oswald e outros também situados na virada para o século XX inspirou a formulação de outras teorias que incorporassem as noções de condução de vozes às progressões harmônicas fundadas sobre ciclos intervalares distintos do ciclo de quintas e da oposição dominante-tônica.

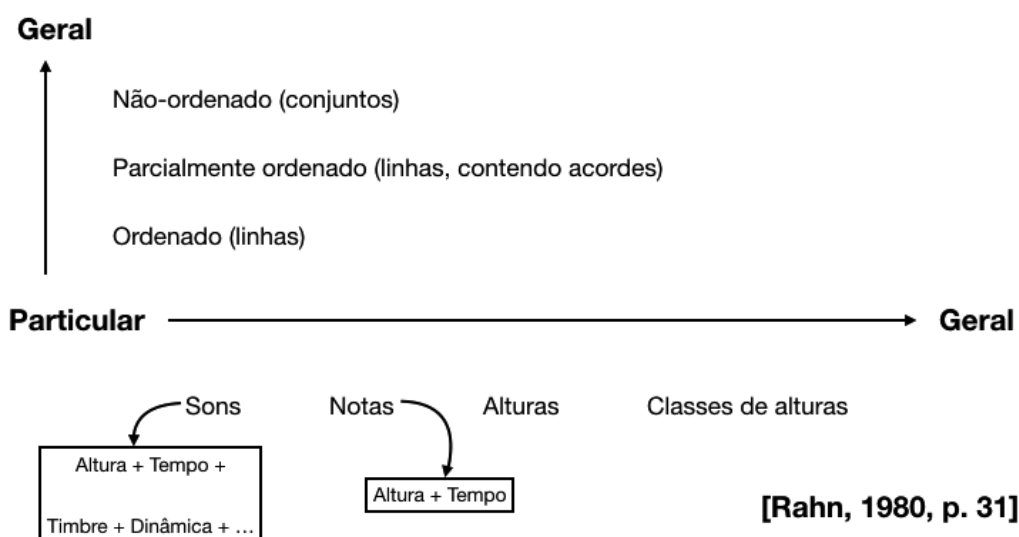
Essa é essencialmente a questão que motivou David Lewin na proposição de sistemas intervalares generalizados (*general interval systems*, ou GIS), onde ele retoma alguns

¹ Não pretendo ampliar o escopo desta discussão, mas seria interessante comparar os conceitos de “pós-tonalidade” e “tonalismo”, que provisoriamente podem ser distinguidos de acordo com seus enfoques, respectivamente cromático e diatônico. O tonalismo corresponde a uma noção de “tonalidade expandida”, aonde se misturam modos e ocasionais empréstimos/alterações cromáticas, preservando algo do caráter diatônico da tonalidade tradicional (ver Tymoczko, 2011). Admito que há uma área cinzenta entre esses universos harmônicos.

princípios teóricos propostos ainda no século XIX por Hugo Riemann e Moritz Hauptmann para desenvolver uma teoria voltada para o estudo das transformações harmônicas por relações de proximidade, apoiada em suportes geométrico/aritméticos. A isso deu-se o nome de teoria neorriemanniana ou transformacional, de acordo com desdobramentos posteriores. Podemos dizer que, com o desenvolvimento dessa metodologia, ficou um pouco mais contínua a transição entre as ferramentas tradicionalmente usadas para a tonalidade clássica e os processos de permutação encontrados na música serial. Toda uma área “cinza”, com elementos ora de um, ora de outro universo, pode ser melhor apreciada do ponto de vista analítico, gerando inclusive a projeção de campos harmônicos com finalidade composicional.

Há muitos pontos de contato entre as teorias dos conjuntos e neorriemanniana. Ambas se utilizam de modelos matemáticos, apoiam-se em grafos e modelos geométricos multidimensionais (topologias), podem ser formalizadas de acordo com algoritmos e compartilham de certas terminologias, como os conceitos de classe de altura (*pitch class*) e classe de intervalo (*interval class*). Isso porque se inserem em um campo mais abrangente conhecido como teoria de grupos, a qual engloba todas essas operações e é capaz de demonstrar as simetrias e assimetrias do sistema temperado (e, claro, de outros sistemas ainda mais complexos). À medida em que as noções iniciais forem sendo compreendidas, os leitores poderão notar que os limites entre uma teoria e outra são quase imperceptíveis e suas aplicações continuamente crescentes como ferramenta analítica e de apoio à criação.

O esquema abaixo, elaborado por John Rahn (1980), mostra duas direções por onde os conceitos básicos da teoria dos conjuntos podem ser ordenados do caso mais particular para o geral, chegando ao conceito de *conjuntos de classes de alturas*.²



² O esquema de Rahn apresenta a importante diferenciação entre os conceitos de “nota” (*note*) e “altura” (*pitch*), que por vezes são equivocadamente traduzidos como equivalentes em português. Boretz (1969, p. 15) discute a extensão que certos termos têm em domínios específicos.

Introdução à teoria dos conjuntos

It would be desirable to have at one's disposal a notation with twelve similar symbols, where each of the twelve tones would have a comparably equivalent symbol, in order to avoid the necessity of notating certain tones exclusively as alterations of others (BARTÓK, 1920).³

Uma das premissas iniciais da teoria dos conjuntos atende diretamente a esse desejo de Béla Bartók, expresso na epígrafe acima. A natureza diatônica da nomenclatura dada às notas musicais (desde D'Arezzo) é em si mesma um entrave para a compreensão de eventos harmônicos pensados cromaticamente. Nesse contexto, a altura Dó# não é uma "elevação" de Dó natural, mas uma entidade melódico-harmônica autônoma, cuja funcionalidade é considerada sem passar necessariamente pelo filtro da formação triádica ou da escala maior. Quaisquer agrupamentos de alturas passam a ser considerados como significativos em si mesmos, segundo suas propriedades intervalares.

Apesar de ter surgido como ferramenta analítico-composicional para a música dodecafônica, a teoria dos conjuntos oferece uma série de operadores que podem suprir a ausência das hierarquias tradicionais do sistema tonal (fundamentado sobre as noções de tríade, campo harmônico, modulação, consonância e dissonância), expandindo o ponto de referência da escala diatônica para a escala cromática.⁴ Considerando que a noção de *intervalo* permaneceu intacta e relevante em boa parte da produção musical do século XX,

³ "Seria desejável termos à disposição uma notação com doze símbolos similares, onde cada um dos doze sons tivesse um símbolo comparavelmente equivalente, de modo a evitar a necessidade de notar certos sons exclusivamente como se fossem alterações de outros" (Bartók, "The Problem of the New Music", in: SUCHOFF, 1976, p. 459).

⁴ Robert Morris (2007, p. 77) observa com relação a expansão do escopo da teoria que a "pesquisa dentro do sistema eventualmente inspirou os teóricos a empreender investigação formal em outros tipos de estrutura musical; além disso, ao cabo, essa pesquisa acabou por identificar que a estrutura e a música com doze sons são casos especiais de modelos matemáticos e musicais muito mais genéricos, de tal modo que, por exemplo, música serial e teoria tonal riemanniana são ambas adequadamente modeladas pela teoria de grupos ao invés de serem demarcadas como fundamentalmente diferentes ou casos únicos".

é importante conhecer as combinações possíveis entre intervalos.⁵ Trata-se de um método relativamente simples (requer conhecimento apenas das operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão) e eficaz para analisar essas combinações, ou ao menos para oferecer um esquema organizado delas.

Entretanto, a mera utilização de conjuntos de alturas não garante a qualidade dos resultados da análise. É necessário compreender o funcionamento desse sistema analítico para entender como esses dados se processam de maneira musicalmente significativa; naturalmente, isso demanda conhecimento de aspectos globais, que promovem diálogo constante entre o binômio harmonia e forma musical. Mesmo uma questão primária e essencial: - como segmentar um determinado trecho e selecionar as alturas que integram um conjunto? - requer conhecimento de estruturas musicais sintáticas e morfológicas como frase, motivo, tema, cadência, etc. em um contexto assumidamente cromático.

Com relação à nomenclatura, a teoria dos conjuntos substitui os tradicionais nomes de nota por algarismos. Além da numeração de 0 a 11 das notas da escala cromática, também considera-se a equivalência entre as oitavas, gerando a noção de *classe de altura* [*pitch class*, ou *pc*], onde as notas são consideradas como entidades discretas dentro do conjunto da escala temperada (Dó = 0, Dó# = 1, ..., Si = 11). Como consequência, tem-se a noção das *classes de intervalos* [*interval classes*, ou *ic*] que representam os intervalos pela distância em semitons. Assim, uma 3ª Maior, classificação oriunda da teoria tonal, passa a ser considerada como uma classe de intervalo |4| (quatro semitons).⁶

De modo a estabelecer um número finito de combinações no espaço tonal cromático, concebido como o *conjunto universo* (U), seus subconjuntos possíveis são reduzidos à *ordem normal* [*normal order*] ou reduzidos a um subconjunto ainda mais restrito, com a *forma primária* [*prime form*]. Assim é obtida uma representação numérica para quaisquer subconjuntos da escala cromática, dispostos em uma tabela ordenada que permite uma referência rápida. Considerando de tricordes a nonacordes, Allen Forte estabeleceu uma tabela com 220 formas primárias, às quais atribuiu um número de classificação, o FN (*Forte number*).

É conveniente nomear as formas primárias de modo que um conjunto de classes de altura possa ser referenciado sem termos de recorrer a uma descrição complicada. Portanto, cada forma primária recebeu um nome consistindo de números separados por um hífen. O número à esquerda do hífen é o cardinal do conjunto; o número à

⁵ Outra noção retida da teoria tradicional é a de *escala*, embora por vezes esse termo seja substituído por *coleção*. Na música da primeira metade do século XX, diversas escalas - além dos conhecidos modos maior e menor - foram empregadas na organização harmônica de diversas obras significativas, tornando esse conceito uma consideração teórica importante. Assim como a noção de “modo” ou “escala”, em suas aplicações composicionais, não têm uma ordenação dos elementos como no serialismo), a noção de “conjunto” ou “coleção” se torna ainda mais precisa por prescindir da hierarquia ou centralidade típicas dos sistemas tonal e modal. Pode-se ainda optar por conjuntos ordenados ou não-ordenados.

⁶ John Rahn adverte ainda para o fato de que, embora as alturas possam “compartilhar com numerais ao menos as propriedades de ordenação e equidistância”, isso não significa que tudo o que se aplica aos números irá ser replicado no universo dos sons, tal crença poderia levar a uma “falácia numerológica” que por vezes aflige certas investigações (RAHN, 1980, pp. 19-20).

direita do hífen é o ordinal do conjunto - ou seja, a posição daquela forma primária na lista (FORTE, 1973, pp. 11-12).

Na tabela de Forte (1973) constam 12 tricordes, 29 tetracordes, 38 pentacordes, 50 hexacordes, 38 septacordes, 29 octacordes e 12 nonacordes (Tab. 1.1). Robert Morris (1987) considera também outros 12 conjuntos, seis deles com duas e outros seis com dez classes de altura; tais conjuntos de classes de altura (CCA)⁷ adicionais serão designados como MN (*Morris number*).⁸

Tabela 1.1: quantidade de formas primárias, por cardinalidade.

Cardinal	Subtotais
2	6
3	12
4	29
5	38
6	50
7	38
8	29
9	12
10	6
Total	220

As formas primárias são agrupadas segundo seu número cardinal, ou seja, pela quantidade de elementos em cada conjunto. O conjunto 3-1 é a primeira forma (cromática) do cardinal 3, ou seja, contém as classes de altura 0,1,2. Já o conjunto 3-12 é o último tricorde na lista de Forte, correspondendo às classes de altura 0,4,8 em sua forma primária - onde os elementos do conjunto estão mais distanciados entre si (o que corresponde à tríade aumentada). A forma normal expressa assim a menor relação intervalar possível entre os elementos de um conjunto, sendo encontrada por meio da ordenação e permutação desses elementos. Já a forma primária é encontrada quando uma forma normal é ajustada para que seu elemento inicial, à esquerda, seja o zero.

⁷ Ao longo deste trabalho é proposta a abreviação da expressão “conjunto(s) de classes de altura(s)” por CCA, como equivalente à abreviatura em língua inglesa “pc-set”.

⁸ Cf. Forte (1973, pp. 179-181). A tabela de Allen Forte é adotada aqui como referência. João Pedro Oliveira (1998) e Joseph Straus (2013) apresentam também versões expandidas, onde estão incluídas as transposições da forma primária. John Rahn, Larry Solomon e Dmitri Tymoczko utilizam algoritmos que resultam em coleções com 1, 2, 10 e 11 classes de altura, as quais também apresentam propriedades relevantes. O algoritmo de Rahn (1980) resulta em seis CCA com forma primária diferente da de Forte: 5-20, 6-z29, 6-31, 7-20 e 8-26. Straus e Williams (1997) adotam o algoritmo de Rahn. No Apêndice é oferecida uma tabela com elementos extraídos desses autores. Curiosamente, Forte (1973, p. 5) menciona “220 CCA”, mas se considerarmos o que consta em sua tabela o total é 208. Chega-se a 220 considerando as 6 díades e seus 6 decacordes complementares.

Uma boa estratégia para exercitar a compreensão sobre a numeração e ordenação dos conjuntos é tomar estruturas comuns na música tonal, como a escala diatônica (7-35) ou as tríades maior e menor (3-11) para uma avaliação de suas propriedades intervalares e formas de representação no sistema numérico (WILLIAMS, 1997, pp. 168-178).

As 12 tríades maiores (037), FN3-11, por exemplo, são representadas em sua forma normal da seguinte maneira (Tab. 1.2):⁹

Tabela 1.2: formas normais das 12 tríades maiores.

$T_0 = [0,4,7]$	$T_6 = [6,10,1]$
$T_1 = [1,5,8]$	$T_7 = [7,11,2]$
$T_2 = [2,6,9]$	$T_8 = [8,0,3]$
$T_3 = [3,7,10]$	$T_9 = [9,1,4]$
$T_4 = [4,8,11]$	$T_{10} = [10,2,5]$
$T_5 = [5,9,0]$	$T_{11} = [11,3,6]$

A terminologia empregada é tomada de empréstimo da matemática. Assim, um termo consagrado pela teoria musical como *som comum* será renomeado como *invariância*,¹⁰ etc. As manipulações com os intervalos são chamadas de *operadores*, dos quais os principais são: transposição (T), inversão (I) e multiplicação (M).¹¹ Uma vez expostas essas noções básicas, passa-se a abordar as operações possíveis entre os diversos conjuntos.¹²

⁹ Rahn (1980, p. 75). "T_n" representa a transposição em semitons.

¹⁰ Straus (2013) mantém a nomenclatura original, neste caso, tratando as invariâncias como *sons comuns* às coleções. Na teoria neorriemanniana, por sua vez, outro conceito tradicional, o de *movimento mais curto* na condução de vozes, é chamado de *parcimônia*.

¹¹ O operador de multiplicação é apresentado em maiores detalhes por Oliveira (1998, pp. 30-34). Destaca-se a transformação da escala cromática em ciclos de quintas e de quartas, através dos operadores M₇ e M₅, respectivamente. Os operadores de transposição e inversão são mais comumente investigados nos tratados de Forte (1973), Straus (2013), Williams (1997) e do próprio Oliveira.

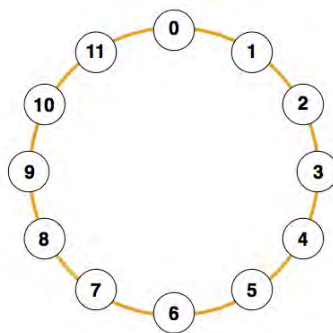
¹² Doravante, os subconjuntos da escala cromática serão chamados de conjuntos, para serem tratados autonomamente e em relação a seus eventuais subconjuntos.

A representação circular

O mostrador de relógio (*clockface*)

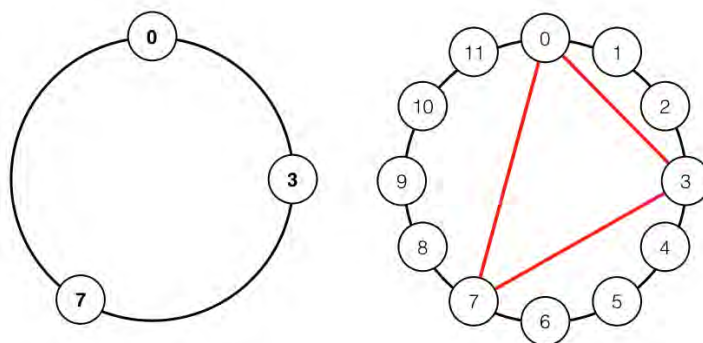
Uma das estratégias mais eficazes de representação das classes de altura é o mostrador circular (Fig. 2.1). Nesse esquema gráfico é possível verificar com mais facilidade a ordem normal - ou seja, a partir de qual classe de altura se obtém a menor distância intervalar progressiva - e também a ocorrência ou não de eixo(s) de simetria.

Figura 2.1: o mostrador de relógio (*clockface*) com classes de altura.



Há diversas possibilidades de apresentar CCA por meio do mostrador de relógio. Uma delas consiste em, dado um determinado CCA - digamos (037) -, ligar suas classes de altura com retas, de modo a formar uma figura geométrica. Assim, naturalmente, CCA com três elementos resultarão em triângulos, com quatro elementos teremos quadrados ou retângulos e assim por diante. Neste caso específico, o tricorde 3-11 (037) corresponde à tríade de Dó menor, com estrutura intervalar assimétrica representada pela forma de um triângulo escaleno (três lados e três ângulos internos diferentes). Outra estratégia de representação é simplesmente suprimir as classes de altura ausentes (Fig. 2.2).

Figura 2.2: CCA (037) no mostrador de relógio, duas maneiras de representar.

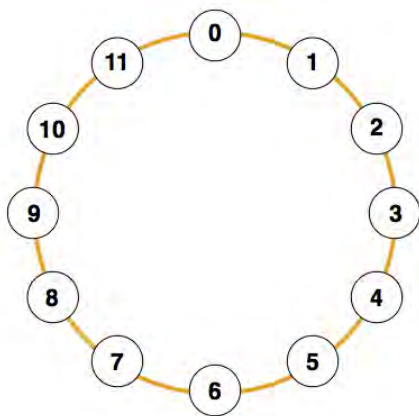


Pode-se ainda, usar esquemas de cores (Fig. 3.2) e quaisquer outras estratégias convenientes para demonstrar as propriedades dos CCA.

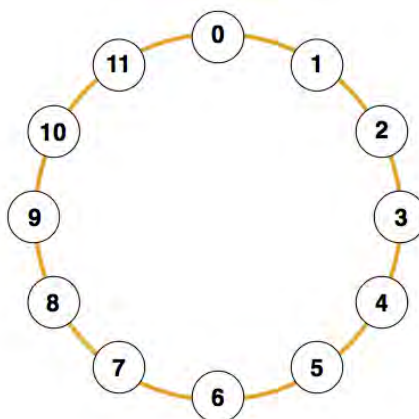
Exercícios:

Represente nos mostradores de relógio abaixo:

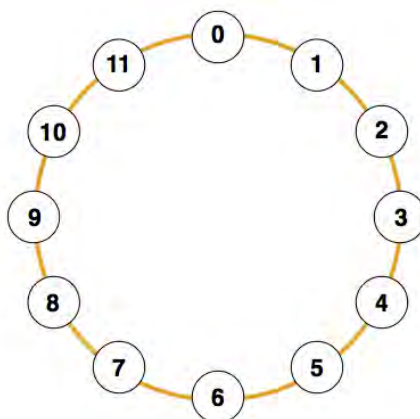
A) Tríade aumentada (048):



B) Tétrade diminuta (0369):



C) Dominante com sétima [4,7,10,0]:



Operações com conjuntos de classes de altura (CCA)

Forma primária

Todo CCA tem uma versão primária, onde os intervalos são dispostos do menor para o maior, sempre a partir do zero. É a partir dessa versão que são calculadas as transposições e/ou inversões de um CCA. Considera-se a forma primária como a versão T_0 de um CCA, ou seja, sua transposição ao nível inicial, zero. A convenção mais utilizada para representar a forma primária é ordenar os integrantes sem vírgula e entre parêntesis, por exemplo: (013). A fim de evitar ambiguidades com a classes de altura 10 e 11, na forma primária elas são respectivamente notadas com as letras A e B.¹³ Por exemplo: (013568A).

Forma normal

A forma normal é aquela onde um CCA tem seus elementos ordenados de modo a apresentar a menor diferença entre o primeiro e o último de seus integrantes. Essa ordenação é obtida pela comparação entre permutações circulares do CCA (Forte, 1973, p. 3-4).

Suponhamos um fragmento melódico (Fig. 3.1). Para classificá-lo de acordo com a tabela de Forte, é útil estabelecer sua forma normal.

Figura 3.1: fragmento melódico.



O ponto de partida é converter a notação tradicional para o sistema numérico de classes de altura: Lá_b = 8; Dó = 0; Mi = 4 e Ré = 2. Qual seria sua ordenação normalizada? Isso pode ser estabelecido por meio de permutação circular:

$A_0 [0, 2, 4, 8]$

$A_1 [2, 4, 8, 12]$

$A_2 [4, 8, 12, 14]$

$A_3 [8, 12, 14, 16]$

¹³ As letras T (10) e E (11) também são utilizadas, remetendo aos algarismos em língua inglesa: *ten* e *eleven*.

Para facilitar o entendimento do processo, somamos 12 a cada elemento permutado na cadeia acima (conforme indicado pelas setas). A ordem normal será aquela com menor diferença entre o último e o primeiro integrantes de cada CCA:

$$A_0: 8-0=8$$

$$A_1: 12-2=10$$

$$A_2: 14-4=10$$

$$A_3: 16-8=8$$

De acordo com esse critério, duas permutações se qualificam como forma normal: A_0 e A_3 . Quando esse tipo de coincidência ocorre, o desempate é feito pela diferença entre o segundo e o primeiro integrantes dos CCA envolvidos: $2-0=2$ (A_0) e $12-8=4$ (A_3). Assim, A_0 é considerada como forma normal.¹⁴

Complementaridade: entendendo a tabela de Forte

A partir de estudos desenvolvidos nos anos 1950 por Milton Babbitt e outros teóricos, foram deduzidas certas propriedades combinatórias importantes como processos composicionais envolvendo o uso de séries dodecafônicas. Ao longo da década seguinte houve considerável refinamento dessa teoria, levando à elaboração de um quadro teórico mais abrangente, que pudesse ser compreendido em sua totalidade.

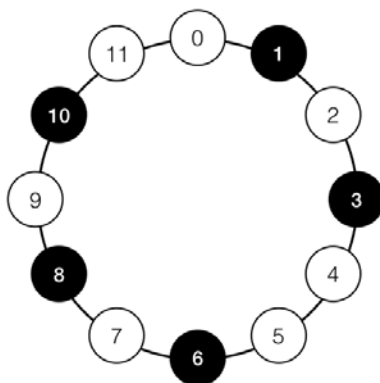
Allen Forte apresenta uma tabela com as formas primárias dos conjuntos de classes de altura (CCA). A tabela de Forte tornou-se o padrão adotado pela maioria dos teóricos e sua organização reflete algumas propriedades desencadeadas pelo algoritmo empregado. Felizmente não há necessidade de decorar essa tabela, que pode (e deve) ser consultada sempre que necessário. Há inclusive aplicativos e sites que oferecem gratuitamente calculadoras de CCA com base na tabela Forte, capazes de deduzir forma normal, primária, transposições, inversões, matrizes e outras propriedades.¹⁵

Todo CCA tem seu equivalente complementar. Por complementaridade entende-se a quantidade de classes de altura que completa o todo cromático. Um conjunto qualquer com sete classes de altura (septacorde) tem como complemento um pentacorde. A numeração da tabela de Forte alinha os pares complementares, por exemplo: o septacorde 7-35 (coleção diatônica) é complementar ao pentacorde 5-35 (coleção pentatônica). Sintomaticamente, a oposição entre teclas pretas e brancas do piano (P&B) é um dos recursos frequentes na escrita pianística do início do século XX (Fig. 3.2).

¹⁴ O exemplo e demonstração são extraídos de Forte (1973, p. 4). O fragmento melódico é de minha autoria.

¹⁵ Uma das calculadoras mais eficientes foi desenvolvida por David Walters (2001) e pode ser acessada em http://www.mta.ca/pc-set/calculator/pc_calculate.html.

Figura 3.2: complementaridade: classes de altura e teclas pretas (5-35) e brancas (7-35).



Na tabela de Forte, os CCA estão distribuídos de modo que os pares complementares estão alinhados: tricordes com nonacordes; tetracordes com octacordes; pentacordes e septacordes. Os hexacordes são complementares entre si. A tabela de Morris faz o mesmo com os bicordes e decacordes (ver em Anexos). Além da forma primária desses conjuntos, a tabela contém seus vetores intervalares, que serão explicados mais adiante.

Nas séries dodecafônicas pode-se observar a consequência natural dessa propriedade: divididas em dois hexacordes (H1 e H2), vê-se que H2 é naturalmente o complemento de H1.¹⁶ O conteúdo dos hexacordes (sem a ordenação da série) pode estar relacionado por uma entre três possibilidades: transposição, inversão ou relação “Z”. O conhecimento dessas relações é essencial para a exploração de potencialidades da série na geração de estruturas composicionais a partir do método dodecafônico.

Assim, vemos que as séries têm características peculiares, exploradas pelos compositores. Alban Berg, no primeiro movimento da *Suíte Lírica* para quarteto de cordas (1925-1926) empregou uma série bastante especial, conhecida como “série com todos os intervalos” (Fig. 3.3).

Figura 3.3: a série dodecafônica com “todos os intervalos” de Berg e seus hexacordes.



¹⁶ Lembrar que em uma série dodecafônica não pode haver repetição de uma classe de altura fora da ordem predeterminada, até que todas as 12 alturas da escala cromática sejam apresentadas. Portanto, os seis últimos sons da série (H2) são necessariamente o complemento do primeiro hexacorde (H1). Essa propriedade combinatória dos hexacordes para gerar o “agregado” (ou seja, o total cromático) foi extensivamente investigada por Milton Babbitt em três importantes trabalhos (Babbitt, 1955; 1960; 1961), além de Donald Martino (1961) e do próprio Allen Forte (1964). Para uma resenha sobre o assunto, em português, ver Ourives (2014).

Uma avaliação inicial da série da *Suíte Lírica* revela que o primeiro hexacorde (H1) apresenta apenas notas nas “teclas brancas” do piano, e o segundo hexacorde (H2) apresenta predominantemente notas nas “teclas pretas”, com exceção do Dó₂ (classe de altura 11).¹⁷ Outra propriedade notável desse tipo de série é que o intervalo de trítone (classe de intervalo 6) ocorre no eixo central (2 e 8) e se expande para as extremidades: 7 e 1; 9 e 3; 0 e 6; 4 e 10; 5 e 11 (indicado pelas ligaduras).

H1: 5,4,0,9,7,2

H2: 8,1,3,6,10,11

Todavia, algumas propriedades importantes podem ser deduzidas apenas pelo conteúdo dos hexacordes, independente de sua ordenação serial (Babbitt, 1955, p. 57). Esta é uma das premissas importantes feita pela teoria dos conjuntos, as quais revelam propriedades do universo cromático que extrapolam os limites da música dodecafônica.¹⁸ Dispondo o conteúdo intervalar de ambos hexacordes em forma normal, temos:

H1 (024579)

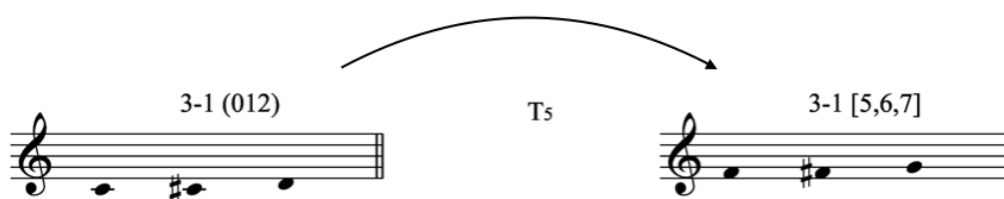
H2 [6,8,10,11,1,3]

Ambos são transposições de FN 6-32.

Transposição

A operação de transposição (T) é equivalente à aplicação do mesmo conceito na teoria musical tradicional, ou seja, por meio de um fator intervalar (t) se eleva ou abaixa uma única altura ou até mesmo todo um agrupamento de notas. Se o tricorde “cromático” Dó-Dó#-Ré (012), FN 3-1, é transposto por 1 semitom (t=1), então temos: [1,2,3]; se t=5 o resultado será: [5,6,7] (Fig. 3.4). Os conjuntos resultantes de transposição continuam sendo versões de 3-1, denominadas T₁ e T₅.

Fig. 3.4: CCA 3-1 em forma normal (T₀) e em T₅.



¹⁷ Oliveira (1998, pp. 286-287) apresenta as matrizes T e T/I da série da *Suíte Lírica* de Berg.

¹⁸ Colocando de outra forma, pode-se dizer que a música dodecafônica levou-nos a pensar na estrutura cromática de modo mais amplo do que a música diatônica havia feito até 1920; esse impulso, todavia, voltou-se para o repertório musical independente dele ser dodecafônico ou não.

A versão inicial, por coincidir com a forma primária, é denominada T_0 . Assim, em última análise, pode-se assumir que todos os conjuntos sofrem algum grau de transposição, mesmo que esse grau seja nulo (zero). Portanto, a margem de transposição em Mod. 12 é de T_0 a T_{11} .

Na série da *Suíte Lírica* (Fig. 3.3), H2 é uma versão T_6 de H1 (T_0). As formas normais modificam a ordenação da série, mas preservam a estrutura e propriedades intervalares desses agrupamentos de alturas, permitindo sistematizar a partir desses dados.

H1: (024679)

Transposição $t=6$: $0+6=6$; $2+6=8$; $4+6=10$; $5+6=11$; $7+6=13=1 \pmod{12}$; $9+6=15=3$.

Resultado: H2 [6,8,10,11,1,3].

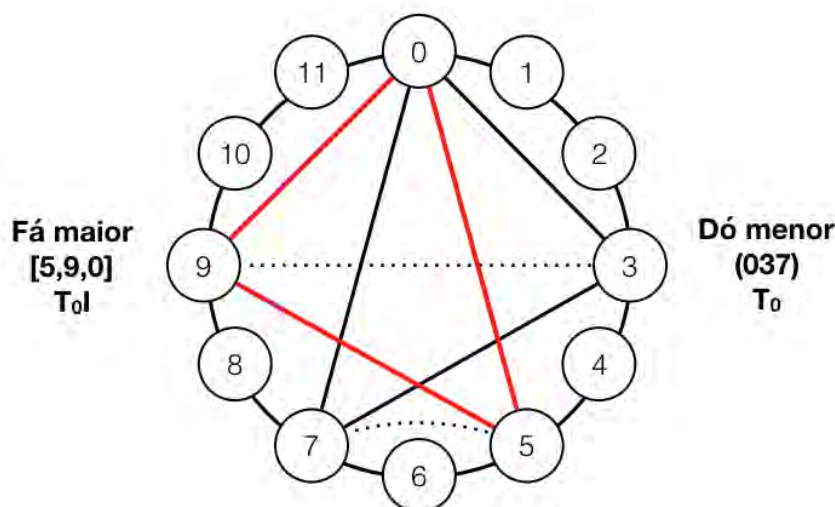
Inversão

O conceito de inversão (I) na teoria pós-tonal é análogo ao tradicional. Como se opera em módulo 12, a soma das inversões sempre será 12 (que por sua vez é zero). O raciocínio é similar ao da determinação das horas no formato 24h, ou seja, 8 horas da noite equivale a 20 horas ($8+12$) e vice-versa. As somas podem resultar em números maiores que 12, mas devem ser reduzidas ao intervalo entre 0 e 11, por esse procedimento. Esse critério estabelece o fator (ou eixo) de inversão.

Frequentemente uma forma normal é encontrada em relação de inversão. A representação no mostrador de relógio circular facilita a compreensão dessas relações: se a forma normal estiver no sentido horário, isso significa que o CCA está em alguma transposição ou na própria forma primária, caso a classe de altura zero seja seu ponto de partida; se a forma normal estiver no sentido anti-horário, isso significa que o conjunto está em inversão, além de transposição.

Se na representação dos conjuntos em forma primária o zero está à esquerda, a forma normal de um conjunto em inversão I_0 posiciona o zero à direita. Por exemplo, tome-se o tetracorde 4-3, cuja forma primária (T_0) é (0134) e sua inversão (I_0), [8,9,11,0]. Comparando as tríades maior e menor, que correspondem ao tricorde 3-11 (037), pode-se verificar isso: T_0 [0,3,7] (tríade de Dó menor); I_0 [5,9,0] (tríade de Fá maior). As figuras a seguir mostram as operações sequenciais de inversão e transposição que mapeiam Dó menor em Fá maior (Fig. 3.5).

Figura 3.5: inversão da tríade de Dó menor (037), resultando em Fá maior [5,9,0], T_0 .



Vê-se no mostrador (Fig. 3.5) que apesar da ordem normal da tríade de Fá maior ser [5,9,0], esta não é a sequência intervalar crescente, que corresponde a 0,9,5 (sentido anti-horário, em vermelho), o que indica que tal tricíorde é uma inversão da forma primária. Se invertemos os fatores teremos: $5 = 7$; $9 = 3$; $0 = 0$ (representado pela linha pontilhada). Esse resultado, 7,3,0, posto em forma normal é [0,3,7], que por sua vez é também a forma primária de 3-11 (037). Toda essa operação, que consiste em inverter e manter transposição em zero é chamada I_0 .¹⁹ Com efeito, a inversão entre os dois acordes ocorre em torno do zero, ou seja, a nota Dó é o eixo de simetria entre as tríades de Dó menor e Fá maior.

Qual seria então a relação entre Dó menor e Dó maior [0,4,7]? Ela se baseia na operação “inversão seguida de transposição”:

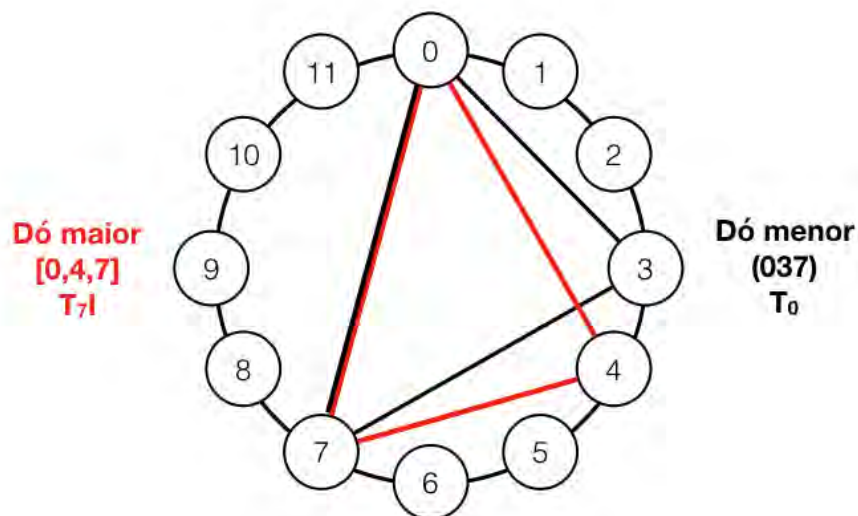
1. Inversão de Dó maior: $7 = 5$; $4 = 8$; $0 = 0$, resultado: [5,8,0] (forma normal de Fá menor).
2. Transposição, $t = 7$: $5+7=12=0$; $8+7=15=3$; $0+7=7$, resultado: (037).

Vemos então que as operações combinadas e sequenciais de inversão e transposição mostram que de Dó maior para Dó menor ocorre a operação I_7 , que transforma um no outro (Fig. 3.6). Dada a relevância dessa transformação e da distinção entre versões relacionadas por inversão, há autores que distinguem 3-11A (tríade menor) e 3-11B (tríade maior).²⁰

¹⁹ Pode-se dizer que [5,9,0] é a versão I_0 de (037).

²⁰ Cf. Larry Solomon (2005) em <http://solomonsmusic.net/pcsets.htm>.

Figura 3.6: representação das tríades de Dó menor (037) e Dó maior [0,4,7].



Assim, apesar da ocorrência de dois sons comuns, a operação que transforma Dó maior em Dó menor requer inversão e, em seguida, transposição por $t=7$.²¹

²¹ A teoria neorriemanniana interpreta de maneira totalmente diferente a relação entre as tríades homônimas, valorizando os sons comuns e minimizando a diferença para o deslocamento por semitom $Mi_b \rightarrow Mi$ natural.

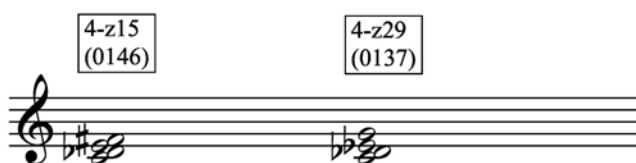
Exercícios de transposição e inversão

1. Inscreva o acorde E7 (Mi maior com sétima menor) no mostrador de relógio. Encontre sua forma normal (confira usando o procedimento de permutação cíclica). Inverta o acorde a partir de sua altura inicial da forma normal. Identifique o acorde resultante da inversão e o eixo “x” dessa operação (I_x). Qual a numeração Forte desse CCA?
2. Inscreva um acorde de 6ª Francesa com fundamental em Fá (F^{Fr}) no mostrador de relógio.²² Faça as operações $t=6$ e I_2 . Analise os resultados. Encontre a numeração desse tetracorde na tabela de Forte.
3. Escreva as 12 formas normais das tríades menores, indicando suas transposições. Escreva também as 12 formas sob transposição e inversão.

²² Considerar como acorde de sexta francesa pelo seu conteúdo, não por sua funcionalidade. Na música do século XX esse acorde foi bastante explorado por suas propriedades intervalares, independente de seu uso convencional.

As operações de transposição e inversão são as que mais se assemelham a procedimentos encontrados na teoria tradicional. Mas há CCA que não se relacionam por transposição ou inversão, mas por compartilhar o mesmo vetor intervalar. A isso chama-se *relação Z*. Há um par de tetracordes, três pares de pentacordes e quinze pares de hexacordes que se relacionam dessa maneira (STRAUS, 2013, pp. 98-100).²³ Os tetracordes 4-z15 (0146) e 4-z29 (0137) têm o seguinte vetor intervalar: $\langle 111111 \rangle$, e sendo assim, são os únicos tetracordes que contém todos os intervalos (Fig. 3.7).²⁴

Figura 3.7: os tetracordes Z, com todos os intervalos.



A relação Z provavelmente foi identificada no contexto da música dodecafônica; como uma série tem dois hexacordes (H1 e H2), H1 é complementar a H2. Consultando a tabela de Forte (em Anexos), vê-se um total de 50 hexacordes, dois quais 20 são complementares a si mesmos; isso, numa série dodecafônica, implica que H2 é transposição ou inversão de H1.²⁵ Mas há outros 15 pares de hexacordes complementares que não se relacionam por transposição nem por inversão, sua complementaridade é estabelecida pela “propriedade Z”, ou seja, o compartilhamento do mesmo vetor intervalar.

Apesar de parecer um tanto abstrata, a relação Z tem implicações sonoras, tanto em contextos dodecafônicos como em outros, menos específicos.

²³ Forte menciona “19 formas Z, as quais resultam em mais de 24 conjuntos de altura para um único vetor” (Forte, 1964, p. 149).

²⁴ Consultar a tabela Forte (Anexo), onde se pode observar que todos os demais tetracordes têm pelo menos um zero no vetor intervalar.

²⁵ Deve-se destacar o artigo de Milton Babbitt, “Some Aspects of Twelve Tone Composition”, onde ele identifica nos processos composicionais de Schoenberg (no *Quarteto de Cordas n.º 4* de 1936) o uso exclusivo de hexacordes por transposição, sem fazer uso de inversão ou retrogradação no conjunto secundário (H2). Para tanto, é preciso que o hexacorde tenha um zero no vetor intervalar, de modo que haja possibilidade de a transposição não gerar som comum (BABBITT, 1955, p. 57). Apenas seis hexacordes têm essa propriedade: 6-1, 6-7, 6-8, 6-20, 6-32 e 6-35 (Babbitt os relaciona sem essa numeração, que ainda não existia àquela época). Portanto, dos 20 hexacordes que são complementares a si mesmo, 6 são complementares por transposição e 14 por inversão. Os demais 30 hexacordes são os 15 pares relacionados pela propriedade “Z”. A série da *Suíte Lírica* de Berg (Fig. 3.3) usa o hexacorde 6-32 e sua transposição T_6 .

Exemplos:

1. Stravinsky, *Agon* (1957), "Bransle Gay", c. 310-335, 6-z11 e 6-z40, <333231>.

Agon é o último balé composto por Stravinsky, obra que sintetiza várias técnicas e materiais com que o compositor trabalhou, indo do diatonismo modal ao serialismo. A "Bransle Gay" é o décimo dos catorze movimentos que constituem a obra.

Forma

A forma da "Bransle Gay" é bastante concisa, distribuída em apenas 26 compassos (Tab. 3.1).

Tabela 3.1: Stravinsky, estrutura formal da "Bransle Gay" em *Agon*.

Seção	Comp.	FN	T / forma normal
A	310-320	6-z11	T ₁₀ [10,11,0,2,3,5]
B	321-325	6-z11	I ₀ [5,7,8,10,11,0]
Transição	325-328	6-z11	T ₈ [8,9,10,0,1,3]
	328-331	6-z40	I ₉ [1,4,6,7,8,9]
A	332-335	6-z11	T ₁₀ [10,11,0,2,3,5]

Harmonia

A seção A da "Bransle Gay" está estruturada sobre o hexacorde 6-z11, cuja forma primária é (012457). Esse hexacorde aparece em três transposições: T₁₀ [10,11,0,2,3,5], constituindo toda a seção A e as notas da 1ª clarineta na transição (c. 325-7); T₈ [8,9,10,0,1,3] na transição, na parte das flautas (c. 326-8); I₀ [5,7,8,10,11,0] no solo da flauta (c. 321-5) da seção B.

A parte final da transição (c. 328-331), começando pelas clarinetas e depois incorporando os demais instrumentos (é a única intervenção das cordas nesse movimento), emprega o hexacorde 6-z40 (012358) em uma única transposição com inversão: I₉ [1,4,6,7,8,9].

Do início da obra até a transição, as transformações são graduais, com três a quatro invariâncias entre cada alteração harmônica; mas no retorno ao conjunto inicial (c. 332) não há nenhuma invariância e o contraste é bem perceptível. A complementaridade entre 6-z40 e 6-z11 é ainda reforçada por instrumentação, registro e estrutura motívica, também contrastantes (Fig. 3.8).

Figura 3.8: Stravinsky, "Bransle Gay", *Agon*, c. 330-335.

Vetor intervalar: sua importância na aferição da distância “tonal”

Como mencionado acima, o vetor intervalar é uma tabela que expressa todas as *classes de intervalo* (IC) presentes em um determinado conjunto. A representação circular evidencia a equidistância em torno de um eixo (Fig. 3.10), realizando a operação de inversão.²⁷ O conceito de classe de intervalo não leva em consideração o sentido, preservando apenas a noção de distância absoluta (Tab. 3.1). Observe-se como o trítono (classe 6) mapeia-se a si próprio.

Figura 3.10: classes de intervalo a partir de Dó (zero).

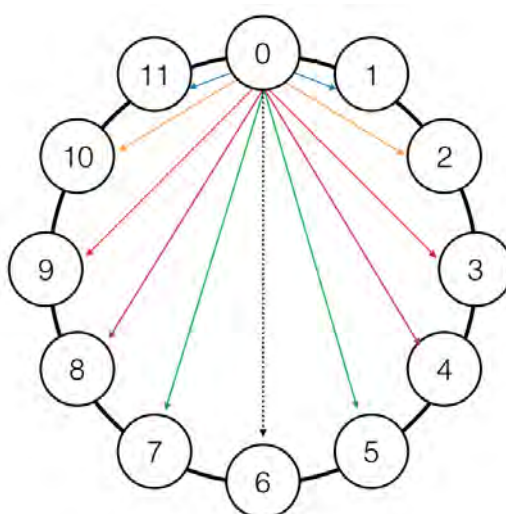


Tabela 3.1: pares de classes de intervalo com soma zero.

Horário	Anti-horário
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6

Tome-se o tricorde Dó-Ré-Mi (024), FN 3-6, por exemplo (Tab. 3.2):

²⁷ A ilustração (Fig. 3.10) foi inspirada por Hanson (1960, p. 9).

Tabela 3.2: intervalos contidos no tricorde (024).

PC1	PC2	Intervalo	IC
0	2	-2 ou 10	2
0	4	-4 ou 8	4
2	4	-2 ou 10	2

Como somente as classes de intervalo contam, é feito o censo apenas das ICs entre 1 e 6, posto que os intervalos entre 7 e 12 são inversões. No exemplo dado, vimos que há duas IC 2 e uma IC4, portanto o vetor intervalar do tricorde 3-6 é expresso da seguinte forma (Tab. 3.3):

Tabela 3.3: classes de intervalo e suas ocorrências no tricorde 3-6.

IC	1	2	3	4	5	6
Ocorrências	0	2	0	1	0	0

Como não há ocorrência de intervalos de classes 1, 3, 5 e 6, essas ausências são expressas com zeros. Assim, o vetor intervalar de 3-6 é representado como: <020100>.

Straus (2013, p. 15) demonstra o cálculo do vetor intervalar da coleção diatônica (7-35) por meio de um quadro, onde todos os intervalos obtidos a partir de cada nota da escala (indicados nas pautas musicais à esquerda) são assinalados de acordo com sua classe de intervalos. O vetor corresponde ao resultado obtido na linha inferior, com a soma de todas as ocorrências de classes de intervalo (Tab. 3.4):

Tabela 3.4: cálculo do vetor intervalar da escala diatônica (STRAUS, 2013, p. 15).

	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	2	
		1	2		2	
	1		1		2	
		1		1		1
		1		1		
			1			
	2	5	4	3	6	1

Assim, o vetor intervalar de 7-35 é: <254361>. Nota-se a predominância das quartas/quintas (IC5) com 6 ocorrências, denotando a estrutura dessa coleção, derivada do ciclo de quintas justas. A predominância da classe de intervalo de 5 semitons também ocorre no seu complementar, a coleção pentatônica 5-35, cujo vetor é <032140>.

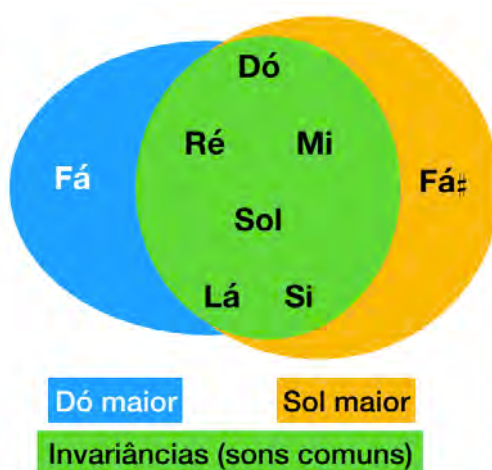
O trítono (classe de intervalo 6) ocorre uma vez na coleção diatônica, sendo representado no vetor em seu último elemento: <254361>. Observe que o trítono é a única classe de intervalo cuja inversão resulta nela mesma; essa propriedade será importante na utilização do vetor intervalar para calcular a quantidade de invariâncias obtidas por transposição, como será demonstrado no capítulo seguinte.

1. Identifique as classes de altura nas escalas de Sol maior e Mi $\flat$ maior. Reordene essas cadeias de números na ordem normal.
2. Identifique as classes de altura nas escalas de Ré menor natural (modo eólio) e Dó $\sharp$ menor harmônica. Reordene essas cadeias de números na ordem normal.
3. Identifique as classes de altura nos acordes de Mi maior e Lá $\flat$ menor. Reordene essas cadeias de números na ordem normal.
4. Localize a forma primária de cada uma das estruturas propostas na questão acima. Procure na tabela (Apêndice) qual o número Forte para cada uma delas.
5. Responda sem consultar a tabela: qual a forma primária do conjunto de classes de altura (CCA) 4-1?
6. Qual a ordem normal do CCA 6-1, sofrendo transposição em T_5 ?
7. Identifique as classes de altura e forma normal do acorde G7. Encontre a forma primária e seu número na tabela Forte. Calcule o vetor intervalar.

Cálculo de invariâncias

Na música tonal as invariâncias (sons comuns) são importantes na ordenação das escalas maiores. Os chamados tons vizinhos são aqueles que apresentam seis sons comuns entre si, em um universo de sete. A intersecção entre dois tons vizinhos de quinta representa as invariâncias entre as duas escalas/tonalidades (Fig. 4.1). Também é importante a correspondência de modo (maior X menor), que pode ser vagamente associada à ideia de inversão (tom relativo).²⁸

Figura 4.1: intersecção entre Dó maior e Sol maior, seis invariâncias.



Para a música pós-tonal – incluindo o dodecafonismo – a ausência ou ocorrência de invariâncias também é significativa. Isso pode determinar a homogeneidade ou heterogeneidade do conteúdo harmônico, sinalizando maior ou menor contraste. Na música dodecafônica isso é essencial para o estabelecimento de estratégias composicionais, desde a segmentação da série em hexacordes ou unidades menores (tetracordes, tricordes, díades).²⁹

O número de invariâncias pode ser calculado de duas formas, por transposição e/ou inversão. Quando um conjunto mapeia a si próprio completamente, por T ou I, significa que as classes de altura/intervalo que resultam em invariância completa são também os *eixos de simetria* desse conjunto. Há CCA que têm invariâncias totais por transposição, outros por inversão; alguns deles têm os dois tipos de eixo de simetria. Conjuntos assimétricos não mapeiam a si próprios totalmente, mas podem ter alto índice de invariância.

²⁸ A analogia é válida se lembrarmos que as tríades maior e menor são relacionadas entre si por inversão.

²⁹ Ver Babbitt (1955; 1960; 1961), Martino (1961) e Ourives (2014).

Invariâncias por transposição

O vetor intervalar informa a quantidade de invariâncias obtidas por transposição, por um fator de transposição (t) correspondente à classe de intervalo e suas ocorrências em um CCA. O tetracorde 4-27 (0258) por exemplo, tem vetor $\langle 012111 \rangle$. Além de informar quanto às IC presentes, o vetor nos informa que não há invariância quando $t=1$: $T_1 = [1,3,6,9]$. Já em T_2 temos uma invariância: $T_2 = [2,4,7,10]$ e T_3 tem duas: $[3,5,8,11]$.

O trítono no vetor intervalar

Em (0258) teremos duas invariâncias quando $t=6$: $T_6 = [6,8,11,2]$. A classe de intervalo 6 (trítono) tem significado diferente no vetor intervalar, porque *o trítono é sua própria inversão* (Tab. 3.1) e *seu próprio complemento* ($6+6=12=0$); o número de invariâncias resultante dessa transposição será sempre o dobro do valor expresso no vetor intervalar em IC6.

O vetor $\langle 254361 \rangle$ da coleção diatônica 7-35 indica que a transposição da escala de Dó maior por T_6 (Fá# maior) resulta em duas invariâncias (Fá e Si, respectivamente classes de altura 5 e 11), o dobro, portanto, do indicado pelo vetor para a classe de intervalo 6 (Tab. 4.1).

Tabela 4.1: duas invariâncias resultantes de T_6 no CCA 7-35.

7-35	Forma normal	Transposição
T_{11} ("Dó maior")	[11,0,2,4,5,7,9]	$t=6$
T_5 ("Fá# maior")	[5,6,8,10,11,1,3]	

Quando a transposição resulta em *invariância total*, então a *subtração* entre os componentes de um conjunto é da mesma ordem, o que resulta em eixo(s) de simetria. Agrupamentos simétricos como a tríade aumentada (048) $\langle 000300 \rangle$ e a téttrade diminuta (0369) $\langle 004002 \rangle$ apresentam essa propriedade, já que em $t=4$ a tríade aumentada tem três invariâncias, e a téttrade diminuta tem invariância total em $t=3$ e $t=6$ (Tab. 4.2).³⁰

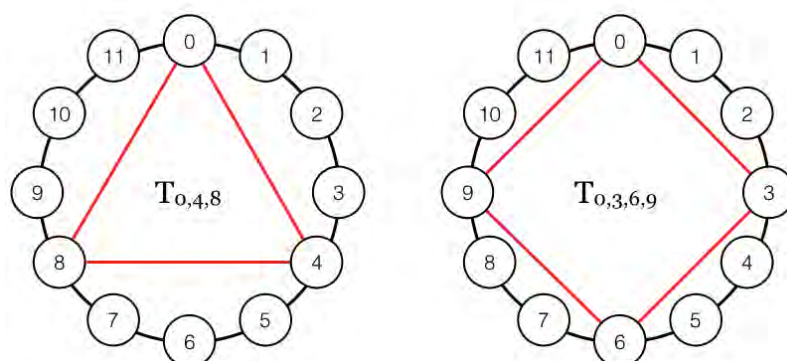
Tabela 4.2: eixos de simetria por transposição (subtração) em (048) e (0369).

Aum. (3-12)	0-0=0	0-4=-4=8	0-8=-8=4	4-8=-4=8		
Dim. (4-28)	0-3=-3=9	0-6=-6=6	0-9=-9=3	3-6=-3=9	3-9=-6=6	6-9=-3=9

O mostrador mostra duas figuras simétricas: a tríade aumentada (048) corresponde a um triângulo equilátero, a téttrade diminuta (0369), a um quadrado ou losango. Os vértices dessas figuras correspondem aos fatores de transposição que causam invariância total, mapeando o conjunto em si mesmo (Fig. 4.2).

³⁰ A tríade aumentada e a téttrade diminuta apresentam também simetria por inversão (soma).

Figura 4.2: simetria por transposição na tríade aumentada (048) e na téttrade diminuta (0369).



Invariâncias por inversão

O cálculo das invariâncias obtidas por inversão é feito por meio da *soma* dos componentes do conjunto. Se houver combinação por pares de elementos cuja soma resulte em *eixos de simetria*, há *invariância completa*. Ou seja, se o conjunto for simétrico, então há um fator de transposição associado à inversão que resulta em invariância total. É o que ocorre por exemplo com as tríades aumentadas (FN 3-12) ou téttrade diminutas (FN 4-28).³¹ Esses conjuntos resultam em invariâncias tanto por transposição quanto por inversão. Os eixos de simetria podem ser traçados e visualizados facilmente no mostrador de relógio (*clockface*).

Tabela 4.3: eixos de simetria por inversão (soma) em (048) e (0369).

Aum. (3-12)	0+0=0	0+4=4	0+8=8	4+8=0		
Dim. (4-28)	0+3=3	0+6=6	0+9=9	3+6=9	3+9=0	6+9=3

Figura 4.3: eixos de simetria por inversão (soma) na tríade aumentada e na téttrade diminuta.

Simetria e assimetria em CCA

A simetria fica expressa porque a soma dos elementos resulta nos próprios elementos constituintes dos conjuntos. Ou seja, *a invariância total é uma propriedade exclusiva dos CCA simétricos*; nos agrupamentos assimétricos pode-se ainda deduzir a *invariância máxima* obtida pela maior resultante decorrente da soma de pares.³²

Straus (2013, p. 89-93) apresenta uma tabela de adição para facilitar o cálculo das invariâncias sob inversão. No exemplo o tetracorde 4-23 (0257) é posicionado na horizontal e na vertical de modo que o cruzamento entre essas coordenadas irá somar todos os componentes do conjunto entre si. Como a classe de altura 7 ocorre quatro vezes, então são quatro as invariâncias em I_7 , portanto 7 é o eixo de simetria por inversão desse

³¹ Como 3-12 e 4-28 apresentam simetria por transposição (T) e inversão (I_n), ambos são sinalizados com duplo mapeamento: (048) $T_{0,4,8}$ e $I_{0,4,8}$; (0369) $T_{0,3,6,9}$ e $I_{0,3,6,9}$. Ou seja, uma tríade aumentada tem seis eixos de simetria e um acorde diminuto tem oito eixos simétricos.

³² Ver Forte, 1973, p. 38-46.

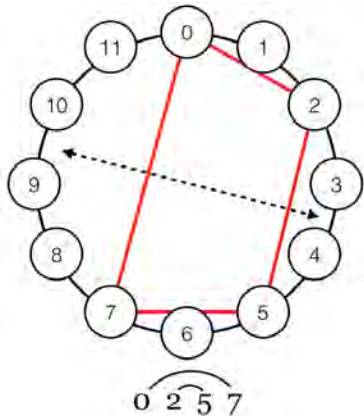
CCA; a classe de altura 10 ocorre apenas uma vez, portanto em I_{10} o conjunto 4-23 apresenta apenas uma invariância, [3,5,8,10] (Tab. 4.4).

Tabela 4.4: matriz de invariâncias por inversão em (0257).

	0	2	5	7
0	0	2	5	7
2	2	4	7	9
5	5	7	A	0
7	7	9	0	2

A simetria de (0257) em torno do eixo de inversão (soma 7) também é dedutível de sua forma primária, além do mostrador de relógio (Fig. 4.4)

Figura 4.4: eixo de simetria de soma 7 em (0257).



Por exemplo, se tomarmos o tetracorde 4-27 (0258) podemos apreciar a operação de inversão sem resultar em invariância completa (Tab. 4.5):

Tabela 4.5: matriz de invariâncias por inversão em (0258).

	0	2	5	8
0	0	2	5	8
2	2	4	7	A
5	5	7	A	1
8	8	A	1	4

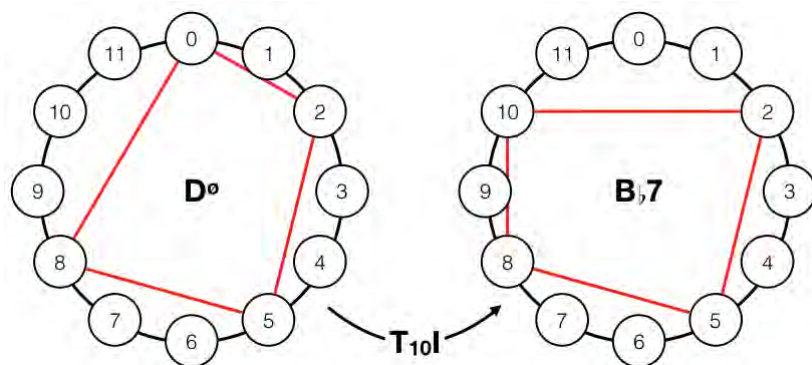
De acordo com a tabela 4.5, o CCA (0258) obtém invariância máxima por I_{10} , que gera três invariâncias. Os passos para realizar essa operação consistem em: 1) inverter, 2) transpor, 3) colocar o resultado na forma normal (Tab. 4.6).

Tabela 4.6: sequência de operações para calcular $T_{10}I$ de (0258).

CCA original	Inversão	Transposição	Conjunto resultante	Total de invariâncias
0,2,5,8	0,10,7,4	t=10: 10,8,5,2	[2,5,8,10]	3

O tetracorde 4-27 em forma primária (0258) corresponde à téttrade tonal “Ré meio-diminuto”, enquanto sua inversão com invariância máxima (3 notas no caso) corresponde ao acorde de “Si, com sétima menor” (dominante com sétima) (Fig. 4.5).

Figura 4.5: duas versões com invariância máxima do tetracorde 4-27, relacionadas por I_{10} .



Richard Wagner explorou duas das três invariâncias possíveis entre acordes do tipo (0258) no início do prelúdio de *Tristão e Isolda* (1859), passagem conhecida como “acorde de Tristão” (Fig. 4.6).³³

Figura 4.6: Wagner, acordes no início do Prelúdio de *Tristão e Isolda*.

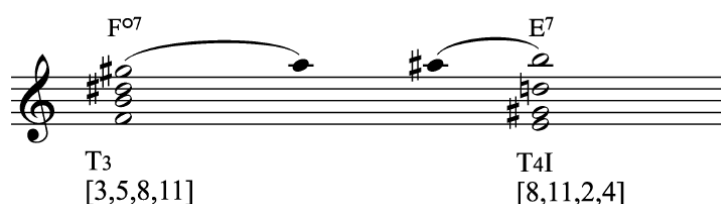
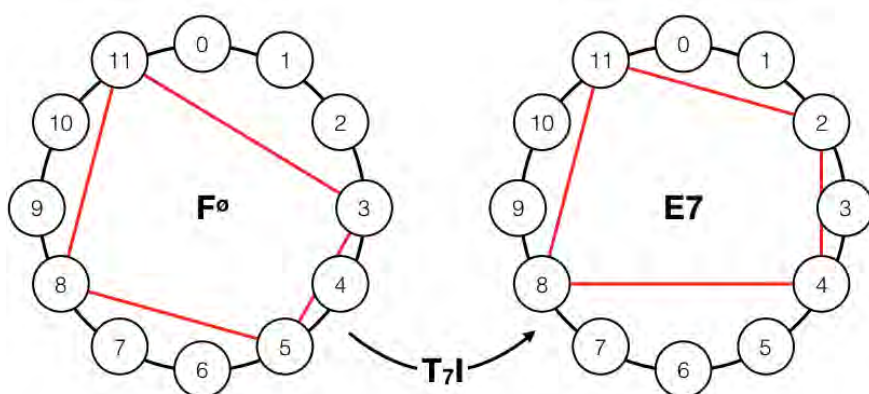


Figura 4.7: inversão do acorde de Tristão (0258).



³³ A operação T_7I que mapeia Fá meio-diminuto (F°) em Mi com sétima (E^7): $[3,5,8,11] \rightarrow$ inversão: $[1,4,7,9] \rightarrow t=7$ $[2,4,8,11]$. Ver a análise feita por John Rahn para o início do Prelúdio de *Tristão e Isolda* (Rahn, 1980, p. 78). Segundo a abordagem neorriemanniana, a transformação é mais direta, preservando as classes de altura comuns e movimentando as demais vozes parcimoniosamente: $3 \rightarrow 2$ e $5 \rightarrow 4$.

Alguns conjuntos apresentam diferenças significativas quanto às invariâncias obtidas (ou ausentes) por transposição e por inversão mais transposição. Forte observa que o vetor de 4-z29 (0137) é <11111>, ou seja, qualquer valor de t resultaria em pelo menos uma invariância por transposição. Mas a inversão desse conjunto – 0,11,9,5 – ao ser transposta por um valor não encontrado nas somas dos elementos do conjunto original (por exemplo, $t=5$) resulta em não-invariância completa: $T_5I = [10,2,4,5]$.³⁴

Isso não significa que a operação de transposição favoreça a ocorrência de invariâncias mais do que a operação de inversão. Há casos em que a operação de inversão pode resultar em número maior de invariâncias que a transposição simples, como no conjunto 4-4 (Forte, 1973, p. 42). De acordo com o vetor intervalar, a invariância máxima obtida por transposição é $t=2$, ou seja, duas invariâncias resultando em $[2,3,5,7]$; já a operação de inversão seguida de transposição pode render até três invariâncias (Tab. 4.7)

Tabela 4.7: invariâncias por inversão e transposição em 4-4.

4-4 (0125) <211110>																										
Inversão: 0,11,10,7	<table><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>5</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>A</td></tr></table>		0	1	2	5	0	0	1	2	5	1	1	2	3	6	2	2	3	4	7	5	5	6	7	A
	0	1	2	5																						
0	0	1	2	5																						
1	1	2	3	6																						
2	2	3	4	7																						
5	5	6	7	A																						
T ₂ I [9,0,1,2]																										
Invariâncias por inversão + transposição = 3, quantidade maior que a obtida somente por transposição																										

³⁴ Forte (1973, p. 40) remete a um exemplo dado à p. 10 (trecho de *The Unanswered Question* de Charles Ives), onde duas versões de 4-z29: $T_2I [7,11,1,2]$ e $T_9 [9,10,0,4]$ não apresentam invariância.

Multiplicação

Apesar de em princípio ser apenas mais uma operação aplicável a conjuntos de classe de altura, a multiplicação ganha seu próprio capítulo porque suas diferentes interpretações tornam o conceito mais complexo, se comparado com as operações discutidas anteriormente. Boulez discute rapidamente a multiplicação aplicada aos parâmetros ritmo e altura em *Le Marteau Sans Maître* (1955);³⁵ antes e depois dele, outros autores têm discutido esse operador, ainda longe de estabelecer um consenso.³⁶

De modo geral, o conceito por trás desse operador generaliza a *multiplicidade* dos resultados, a partir de métodos combinatórios usados para geração de novas formas seriais desde uma série ou fragmento da série. Stephen Heinemann observa que pode haver aplicações diferentes desse conceito, listando três maneiras, identificadas a partir de sua análise de *Le Marteau* (Heinemann, 1998, p. 72):

1. Multiplicação simples de CCA/linhas
2. Multiplicação composta
3. Multiplicação complexa

Multiplicação simples

Heinemann estabelece duas formas de realizar a chamada “multiplicação simples”: envolvendo CCA ou linhas. A multiplicação simples de CCA consiste em uma matriz na qual os fatores são um CCA (multiplicador) e como multiplicando temos a estrutura intervalar de uma *ordenação inicial de CCA* (OI-CCA).³⁷ Uma OI-CCA é um conjunto onde uma classe de altura é designada aleatoriamente (por critério contextual) como referencial (*r*), enquanto as demais seguem a ordenação determinada pela primeira. O exemplo dado por Heinemann é [1,4,7,9] onde *r*=4: resultando na OI-CCA <4(791)>

³⁵ Boulez comenta vagamente o uso dessa técnica em outro ensaio, “Eventualmente” (1952). Na década seguinte ele volta ao assunto, falando sobre “três modificações que uma série de durações pode sofrer”, há “três ordens”: fixa, móvel não-evolutiva e móvel evolutiva; a multiplicação (ou divisão) é aplicada nos casos de ordem fixa (Boulez, 1981 [1963], p. 52). A outra aplicação desenvolvida por Boulez é para obtenção/exploração de isomorfias por meio de multiplicação de porções de uma série (Boulez, 1981 [1963], p. 78). Entretanto, esses textos suscitam mais dúvidas que esclarecimentos.

³⁶ Richard Cohn observa que o modelo de “combinação por transposição” (*Transpositional Combinational Model*, ou *TC-Model*) que propõe para a música de Bartók, “é similar àquele especificado pela ‘simetria paralela’ (*parallel symmetry*) de Jonathan Bernard e também faz recordar dos ‘procedimentos de multiplicação’ de Pierre Boulez”, além de outras formulações por Howard Hanson, Marianne Kielian-Gilbert e David Lewin (Cohn, 1988, n. 16, p. 23). Heinemann (1998, n.5, p. 73) acrescenta os nomes de Slonimsky, Anatol Vieru e Perle entre outros, como autores de conceitos próximos, observando também que diferentes “precursores” são apontados em diversas fontes. Forte (1973) não trata dessa questão; Joseph Straus incorporou o tópico sobre multiplicação (baseado em Heinemann) a partir da terceira edição de seu livro *Introduction to Post-Tonal Theory* (2005), traduzido para o idioma português por Ricardo Mazzini Bordini (Straus, 2013, pp. 255-260).

³⁷ Em inglês no original: *initially ordered pitch-class set*, ou sua abreviação, *io set* (Heinemann, 1998, p. 73).

(Heinemann, 1998, pp. 73-74). Daí é calculada a *estrutura intervalar da OI-CCA*, onde os intervalos a partir de r (em relação a todos os elementos, inclusive a própria classe de altura inicial) são listados e sublinhados. No caso de $\langle 4(7910) \rangle$ o resultado é 0359. Essa estrutura intervalar ordenada pode ser chamada de EIO.³⁸

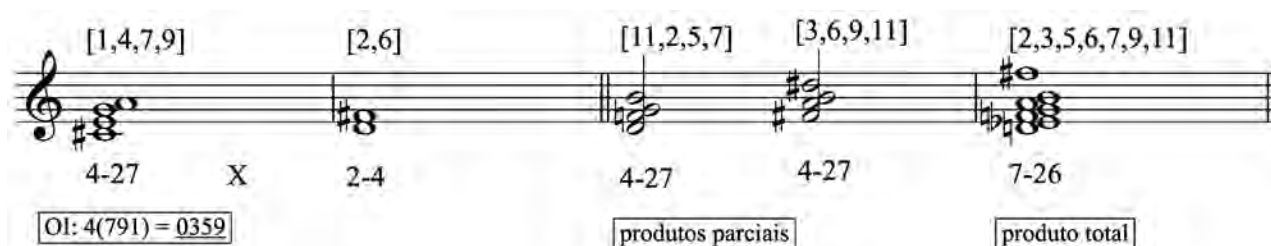
Agora, vamos multiplicar $[1,4,7,9]$ (FN 4-27) pela díade $[2,6]$. Para isso, é feita uma matriz opondo as quatro EIO com a díade $[2,6]$. Vamos começar com $r=4$, que gera a EIO 0359 (Tab. 5.1):

Tabela 5.1: multiplicação entre a EIO 0359 e a díade $[2,6]$

9	B	3
5	7	B
3	5	9
0	2	6
x	2	6

Assim, um dos resultados dessa operação é (Fig. 5.1):

Figura 5.1: resultado parcial da multiplicação entre $[1,4,7,9]$ e $[2,6]$.



Os demais multiplicadores são os diferentes valores de r possíveis: 1, 7 e 9. Tais valores geram as OI-CCA: $1(479)$, $7(914)$ e $9(1,4,7)$. Suas respectivas EIO são: 0368, 0269 e 047A (Tab. 5.2).

Tabela 5.2: multiplicação entre as EIO 0368, 0269 e 047A e $[2,6]$.

8	A	2	9	B	3	A	0	4
6	8	0	6	8	0	7	9	1
3	5	9	2	4	8	4	6	A
0	2	6	0	2	6	0	2	6
x	2	6	x	2	6	x	2	6

³⁸ Minha proposta de tradução a partir do original em inglês: *ordered pitch-class intervallic structure*, cuja abreviatura dada por Heinemann é *ois* (Heinemann, 1998, p. 74). Assim, a sigla EIO (estrutura intervalar da ordenação inicial) corresponde ao original *ois*.

As resultantes são: [5,6,8,9,10,0,2], [11,0,2,3,4,6,8] e [9,10,0,1,2,4,6], todos representantes do CCA 7-26.³⁹

Outra espécie estudada por Heinemann é a multiplicação simples por linhas. Esse método já havia sido mapeado por Nicolas Slonimsky no livro *Thesaurus of Scales and Melodic Patterns* (1947). Tal recurso é encontrado com frequência em passagens musicais como sequências e ostinatos (Fig. 5.2).

Figura 5.2: exemplo de Slonimsky (1947) analisado por Heinemann (1998, p. 78). As cifras de música popular são acréscimos deste autor.



O que se vê na Fig. 5.2 é a aplicação da multiplicação em um CCA por uma sequência intervalar que atua como fator de transposição progressivo. Na linha superior, a tríade de Fá maior é transformada por uma sucessão de terças maiores, que correspondem à tríade aumentada (048). Na linha inferior, a díade Dó-Fá é transformada por uma progressão ascendente de terças menores, que resultam em um acorde diminuto (0369).

Multiplicação composta

A segunda operação estudada por Heinemann é a multiplicação composta, que “representa um estágio intermediário no pensamento de Boulez e não tem grande importância em *Le Marteau*”. A diferença em relação a multiplicação simples é que “o produto é transposto de acordo com algum padrão” (Heinemann, 1998, p. 83).

O protótipo desta operação foi oferecido por Boulez (1981, p. 38) mas não é demonstrado em detalhes por Heinemann (1998, p. 83).⁴⁰ Boulez seleciona “complexos com densidade variável” (ou seja, com cardinalidade oscilando entre 3/2/4/2/1), observando o critério de não repetição, semelhante ao método dodecafônico, na linha 1 do exemplo. O “guarda-chuva” acima da matriz original, sugere uma distribuição radial em torno do tetracorde 4-3 [8,9,11,0]; o retângulo tracejado provavelmente indica a simetria dos CCA em torno do eixo central (Fig. 5.3). Ao analisar a matriz bouleziana (Fig. 5.4), constata-se a ocorrência dos CCA 8-1, 6-z13, 9-1, 6-z13 e 4-3 como produtos das multiplicações.

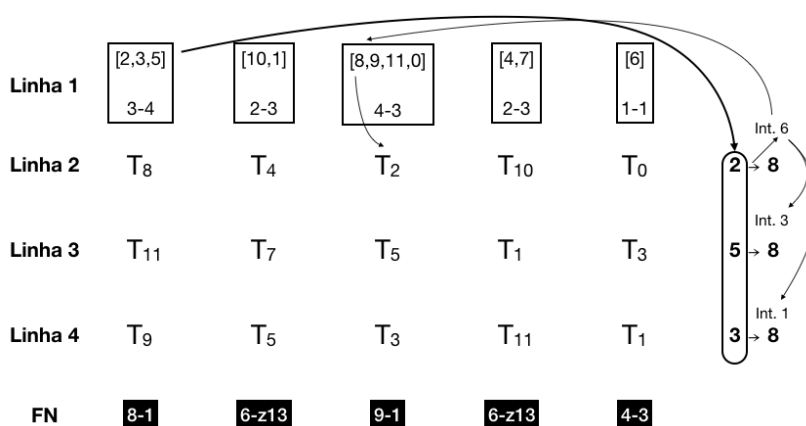
³⁹ Esta é a operação realizada por Boulez no livro *A música hoje* (Boulez, 1981 [1963], p. 79).

⁴⁰ Heinemann cita Lev Koblyakov (autor de *Pierre Boulez: a World of Harmony*, 1990, baseado em sua tese de doutorado de 1981, na qual analisa as técnicas aplicadas por Boulez em *Le Marteau*), mas suas conclusões não são comentadas em detalhe. As soluções aqui encontradas talvez correspondam às de Koblyakov. Heinemann observa que “há várias maneiras diferentes de interpretar” essa matriz (Heinemann, 1998, p. 83).

Figura 5.3: multiplicação composta (Boulez, 1981, p. 38).



Figura 5.4: análise da matriz de Boulez.



Interpretação do algoritmo de Boulez

As cardinalidades são estabelecidas mediante operações entre os conjuntos EIO da linha 1 (Fig. 5.3), multiplicados de acordo com as setas no topo da matriz. A cardinalidade original, 3/2/4/2/1, transforma-se em 8/6/9/6/4.

Lá_b-Dó-Lá-Si x Lá_b-Dó-Lá-Si (Fig. 5.3, linha 1, centro):

$$\{8,0,9,11\} \times \{8,0,9,11\} \rightarrow 8(9,11,0) \times 8(9,11,0) \rightarrow \text{EI-OI } \underline{0134} \times \text{EI-OI } \underline{0134} = [0,1,2,3,4,5,6,7,8] \text{ 9-1, } T_0 \text{ (Tab. 5.3).}^{41}$$

⁴¹ Aqui foram adotadas { } para diferenciar as formas ordenadas dos conjuntos de suas formas normais [].

Tabela 5.3: multiplicação entre a EIO de [8,0,9,11] consigo mesma.

4	4	5	7	8
3	3	4	6	7
1	1	2	4	5
0	0	1	3	4
x	0	1	3	4

Ré-Fá-Mi_b x Lá_b-Dó-Lá-Si

$\{2,5,3\} \times \{8,0,9,11\} \rightarrow 2(3,5) \times 8(9,11,0) \rightarrow \text{EIO } \underline{013} \times \text{EIO } \underline{0134} = [0,1,2,3,4,5,6,7] \text{ 8-1, } T_0$ (Tab. 5.4).

Tabela 5.4: multiplicação entre as EIO de [2,5,3] e [8,0,9,11].

4	4	5	7
3	3	4	6
1	1	2	4
0	0	1	3
x	0	1	3

Si_b-Dó_# e Mi-Sol x Lá_b-Dó-Lá-Si

$[10,1] \times \{8,0,9,11\}$ e $[4,7] \times \{8,0,9,11\} \rightarrow \text{EIO } \underline{03} \times \text{EIO } \underline{0134} = [0,1,3,4,6,7] \text{ 6-z13, } T_0$ (Tab. 5.5).

Tabela 5.5: multiplicação entre as EIO de [10,1]/[4-7] e [8,0,9,11].

3	3	4	6	7
0	0	1	3	4
x	0	1	3	4

Fá_# x Lá_b-Dó-Lá-Si

$[6] \times \{8,0,9,11\} \rightarrow \text{EIO } \underline{0} \times \text{EIO } \underline{0134} = (0134) \text{ 6-z13, } T_0$ (Tab. 5.6).⁴²

Tabela 5.6: multiplicação entre as EIO de [6] e [8,0,9,11].

0	0	1	3	4
x	0	1	3	4

⁴² Observar que o conjunto unitário [6] não gera intervalos, portanto, sua EIO é zero.

Na coluna da direita (Fig. 5.3) constam intervalos deduzidos do tricorde da linha 1 [2,3,5] em função da altura r do tetracorde [8,9,11,0], Láb (8). Segundo minha interpretação, o intervalo |6| é quem define as transposições aplicadas à linha 2, sendo sempre somado à classe de altura inicial de cada CCA da linha 1: $6+2=8$; $6+10=4 \pmod{12}$; $6+8=2 \pmod{12}$; $6+4=10$ e $6+6=0 \pmod{12}$ (Fig. 5.4).

As demais transposições, nas linhas 3 e 4, são realizadas a partir da aplicação dos intervalos T_3 e T_1 sobre a linha 2. Desse modo chegamos ao produto obtido na matriz bouleziana.

Multiplicação complexa

O terceiro tipo investigado por Heinemann (1998, pp. 84-ss.) é a multiplicação complexa.

Multiplicação e conteúdo intervalar

João Pedro Oliveira discute o efeito da multiplicação no conteúdo intervalar. Sua abordagem começa pelas “propriedades dos operadores que são isomorfismos, isto é, M_1 , M_5 , M_7 e M_{11} ” (Oliveira, 1998, pp. 116). Os intervalos são dispostos em linha e são multiplicados por esses fatores; a análise dos resultados revela os isomorfismos (Tab. 5.7):

Tabela 5.7: análise dos operadores M_5 e M_7 aplicados aos intervalos em mod. 12 (Oliveira, 1998, pp. 116-117).

		Permutação						Permutação					
Int	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
M ₅	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	
Transformação nos complementares mod. 12													
		Permutação						Permutação					
Int	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
M ₇	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	
Transformação nos complementares mod. 12													

Oliveira observa que os operadores M_1 e M_{11} resultam nas versões T_0 e T_{0I} , ou seja, ambos mantêm inalterado o conteúdo intervalar. Já com M_5 e M_7 os produtos geram permutação na ordem intervalar, curiosamente sobre os intervalos 1, 5, 7 e 11 (indicados por retângulos). As demais alterações (indicadas em vermelho na Tab. 5.7) mostram a transformação dos intervalos em seus complementares, pelo ciclo de tons inteiros em M_5 e pelo ciclo diminuto (terças menores) em M_7 .

Tomando essa possibilidade sugerida por Oliveira, decidi aplicar um operador específico como multiplicador diretamente a uma classe de altura, considerada como multiplicando: $M_n \times$ classe de altura. Como não foi encontrada essa aplicação

A aplicação do operador multiplicação diretamente sobre as classes de altura da escala diatônica (FN 7-35) resulta em algumas coleções harmônicas significativas (Tab. 5.8). Neste caso, os índices de multiplicação (M_1 , M_2 , etc.) se organizam simetricamente em torno do trítono (M_6), indo da escala diatônica até os dois septacordes cromáticos complementares.

Tabela 5.8: operador multiplicação aplicado à coleção diatônica.

Coleções resultantes	FN	Classes de altura							
		0	1	3	5	6	8	A	
M1: escala diatônica	7-35	0	1	3	5	6	8	A	
M2: tons inteiros	6-35	0	2	6	A	0	4	8	
M3: tétrade diminuta	4-28	0	3	9	3	6	0	6	
M4: tríade aumentada	3-12	0	4	0	8	0	8	4	
M5: escala cromática: heptacorde 1	7-1	0	5	3	1	6	4	2	
M6: trítono	2-6	0	6	6	6	0	0	0	
M7: escala cromática: heptacorde 2	7-10	0	7	9	B	6	8	A	
M8: tríade aumentada	3-12	0	8	0	4	0	4	8	
M9: tétrade diminuta	4-28	0	9	3	9	6	0	6	
M10: tons inteiros	6-35	0	A	8	2	0	8	4	
M11: escala diatônica (inversão)	7-35	0	B	9	7	6	4	2	

Os resultados obtidos na Tabela 5.8 são muito próximos aos dados reunidos por Alban Berg em sua matriz de intervalos (Perle, 1977).

Referências

- ALBUQUERQUE, Joel. *Simetria Intervalar e Rede de Coleções: Análise Estrutural dos Choros nº4 e Choros nº7 de Heitor Villa-Lobos*. São Paulo: Mestrado, ECA/USP, 2014.
- ANTOKOLETZ, Elliot. *Twentieth-Century Music*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- _____. *The Music of Béla Bartók: A Study of Tonality and Progression in Twentieth-Century Music*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1984.
- BABBITT, Milton. Some Aspects of Twelve Tone Composition. *The Score and IMA Magazine*, pp. 53-61, 1955 (reimpresso em: *The Collected Essays of Milton Babbitt*. Princeton: Princeton University Press, 2011, pp. 38-47).
- BAKER, Steven. *Neo-Riemannian Transformations and Prolongational Structures in Wagner's Parsifal*. PhD Dissertation, Florida State University, 2003.
- BARTÓK, Béla. "The Problem of the New Music". In: SUCHOFF, Benjamin (ed.). *Béla Bartók Essays*. London: Faber & Faber, 1976, pp. 455-9.
- BORETZ, Benjamin. Meta-Variations: Studies in the Foundation of Musical Thought. *Perspectives in New Music*, v.8, n.1, pp. 1-74, 1969.
- BOULEZ, Pierre. *A música hoje*. Tradução de Reginaldo de Carvalho e Mary A. Leite de Barros. São Paulo: Perspectiva, 1981 [1963].
- _____. Eventualmente [1952]. In: *Apontamentos de aprendiz*, pp. 137-168. Tradução de Stella Moutinho, Caio Pagano e Lidia Bazarian. São Paulo: Perspectiva, 1995.
- CALLENDER, Clifton. Voice Leading Parsimony in the Music of Alexander Scriabin. *Journal of Music Theory*, v. 42, n. 2, pp. 219-233, 1998.
- COELHO DE SOUZA, Rodolfo. Harmonic Perception and Voice Leading Spaces of Set Classes Related by Unordered Interval Classes. *Musica Theorica*, Revista da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical 2018, v. 3, n. 2, pp. 46-85 – Journal of the Brazilian Society for Music Theory and Analysis @ TeMA 2018 – ISSN 2525-5541.
- COHN, Richard. *Audacious Euphony: Chromaticism and The Triad's Second Nature*. Oxford and London: Oxford University Press, 2012.
- _____. Inversional Symmetry and Transpositional Combination in Bartók. *Music Theory Spectrum*, v.10, pp. 19-42, 10th Anniversary Issue, 1988.
- COOK, Nicholas. *A guide to musical analysis*. New York: Norton, 1987.

DOUTHETT, Jack e STEINBACH, Peter. Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition. *Journal of Music Theory*, v. 42, n. 2, pp. 241-263, 1998.

FORTE, Allen. A theory of set-complexes for music. *Journal of Music Theory*, v. 8, n. 2, 1964.

_____. *The structure of atonal music*. New Haven: Yale UP, 1973.

_____. Pitch-class set analysis today. *Music analysis*, v. 4, n. 1/2, pp. 29-58, 1985.

_____. Pitch-class set genera and the origin of the modern harmonic species. *Journal of Music Theory*, v. 32, n. 2, pp. 187-270, Fall 1988.

GOLLIN, Edward. Some Aspects of Three-Dimensional "Tonnetze". *Journal of Music Theory*, v. 42, n. 2, pp. 195-206, 1998.

_____. Combinatorial and Transformational Aspects of Euler's "Speculum Musicum". *Mathematics and Computation in Music*, v. 37, pp. 406-11, 2009.

_____. From Matrix to Map: "Tonbestimmung", the "Tonnetz", and Riemann's Combinatorial Conception of Interval. In: GOLLIN, E. e REHDING, A. *The Oxford Handbook of Neo-Riemannian Theories*. Oxford: Oxford University Press, 2011.

GOLLIN, Edward and REHDING, Alexander. *The Oxford Handbook of Neo-Riemannian Music Theories*. Oxford/New York: Oxford University Press, 2011.

HAIMO, Ethan. Atonality, Analysis, and the Intentional Fallacy. *Music Theory Spectrum*, v. 18, n.2, pp. 167-199, 1996.

HANSON, Howard. *Harmonic Materials of Modern Music*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1960.

HEINEMANN, Stephen. Pitch-Class Set Multiplication in Theory and Practice. *Music Theory Spectrum*, v. 20, n.1, pp. 72-96, 1998.

KOPP, David. *Chromatic Transformations in Nineteenth-Century Music*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

LATHAM, E. Review of Haimo's article "Atonality, Analysis, and the Intentional Fallacy". *Music Theory Online*, v. 3.2, 1997, disponível no endereço eletrônico: <<http://mto.societymusictheory.org/issues/mto.97.3.2/mto.97.3.2.latham.html>>.

LEWIN, David. A Formal Theory of Generalized Tonal Functions. *Journal of Music Theory*, v. 26, n. 1, p. 23-60, 1982.

MARTINO, Donald. The Source Set and It's Aggregate Formations. *Journal of Music Theory*, v.5, n.2, pp. 224-273, 1961.

MORRIS, Robert. Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future. *Perspectives in New Music*, v.45, n.2, pp. 76-107, 2007.

_____. Voice-leading Spaces. *Music Theory Spectrum*, v.20, n.2, pp. 175-208, 1998.

_____. *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. New Haven: Yale University Press, 1987.

NERY FILHO, Walter. 2012. *Os Voos do Passarinho de Pano e Análise dos Processos Composicionais na Suíte Prole do Bebê no. 2 de Heitor Villa-Lobos*. São Paulo: Mestrado, ECA/USP, 2012.

OLIVEIRA, João Pedro. *Teoria analítica da música do século XX*. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1998.

OURIVES, Natanael de Souza. Babbitt, Martino e as bases teóricas para a combinatoriedade absoluta, hexacordal, tetracordal e tricordal. *Anais do XXIV Congresso ANPPOM*, São Paulo, 2014.

PERLE, George. *Twelve-tone tonality*. Los Angeles: University of California Press, 1996.

_____. *The Right Notes: Twenty-Three Selected Essays by George Perle on Twentieth-Century Music*. Stuyvesant, NY: Pendragon Press, 1995.

_____. Pitch-class set analysis: an evaluation. In: *Journal of Music Theory*, v. 8, n. 2, pp. 151-172, 1990.

_____. Berg's Master Array of the Interval Cycles. In: *The Musical Quarterly*, v. 63, n. 1, pp. 1-30, 1977 (reimpresso em Perle, 1995).

RAHN, John. *Basic Atonal Theory*. New York: Longman, 1980.

SALLES, Paulo de Tarso. *Villa-Lobos: processos composicionais*. Campinas: Editora Unicamp, 2009.

_____. Redes de transformação harmônica na obra de Villa-Lobos: uma abordagem derivada da teoria neo-riemanniana. *Anais do IV SIMPOM – Simpósio de Pós-Graduandos em Música*. Rio de Janeiro: Unirio, 2016a.

_____. Regiões Euler: um Estudo sobre Distância Tonal e Integração entre os Ciclos Octatônicos e Hexatônicos. *Musica Theorica - Revista da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical - TeMA*, v. 1, n. 1, pp. 1-23, arquivo online: <http://tema.mus.br/revistas/index.php/musica-theorica/article/view/12/18>, 2016b.

_____. *Os quartetos de cordas de Villa-Lobos: o discurso da Besta*. São Paulo: Edusp, 2018.

SCHUIJER, Michiel. *Analysing Atonal Music: Pitch Class Set Theory and Its Contexts*. Rochester (NY): Rochester University Press, 2008.

STRAUS, Joseph. *Introdução à teoria pós-tonal*. Tradução de Ricardo M. Bordini. São Paulo e Salvador: Editora Unesp/Editora UFBA, 2013.

TYMOCZKO, Dmitri. *A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2011.

VISCONTI, Ciro. *Simetria nos Estudos para Violão de Villa-Lobos*. Jundiaí: Paco Editorial, 2016.

WEYL, H. *Simetria* [1952]. São Paulo: Edusp, 1997.

WILLIAMS, Kent. *Theories and analyses of twentieth-century music*. Harbor Drive, Orlando (FL): Harcourt Brace, 1997.

MULTIPLICAÇÃO

Operador não discutido por Forte, a multiplicação merece maior atenção por parte de Oliveira (1998).¹¹ A aplicação do operador *multiplicação* sobre as classes de altura da escala diatônica (FN 7-35) resulta em algumas entidades harmônicas significativas para a música do Ocidente. Neste caso, os índices de multiplicação (M_1 , M_2 , etc.) se organizam simetricamente em torno do trítone (M_6), indo da escala diatônica até os dois septacordes cromáticos complementares.¹²

Conjuntos (sets)	FN	Classes de altura							
		0	1	3	5	6	8	A	
M1: escala diatônica	7-35	0	1	3	5	6	8	A	
M2: tons inteiros	6-35	0	2	6	A	0	4	8	
M3: tétrade diminuta	4-28	0	3	9	3	6	0	6	
M4: tríade aumentada	3-12	0	4	0	8	0	8	4	
M5: escala cromática: heptacorde 1	7-1	0	5	3	1	6	4	2	

M6: trítono	2-6	0	6	6	6	0	0	0
M7: escala cromática: heptacorde 2	7-10	0	7	9	B	6	8	A
M8: tríade aumentada	3-12	0	8	0	4	0	4	8
M9: tétrade diminuta	4-28	0	9	3	9	6	0	6
M10: tons inteiros	6-35	0	A	8	2	0	8	4
M11: escala diatônica (inversão)	7-35	0	B	9	7	6	4	2

Tabela 1: Mapeamentos do operador M (multiplicação) sobre a coleção diatônica (7-35).

O operador M_{11} é um operador de inversão, de acordo com a delimitação do universo cromático em módulo 12 (OLIVEIRA, 1998, p. 31). Vê-se assim que a escala diatônica é mapeada para si própria em um conjunto invertido de classes de altura, ao ser multiplicada por esse fator. A escala diatônica é uma entidade harmônica simétrica, se observarmos a constituição de seus tetracordes: [0,1,3,5] e [5,6,8,10], cujas distâncias intervalares têm o mesmo padrão: 1-2-2.¹³ A simetria resultante dos fatores de multiplicação acima apenas reproduz e amplifica a simetria inicial latente da própria escala. Da mesma forma, as entidades harmônicas resultantes (escala de tons inteiros, acordes diminuto e aumentado, trítono e escala cromática) são estruturas com simetria interna.

¹¹ Straus discute a multiplicação – segundo Pierre Boulez – nas edições mais recentes de seu livro (STRAUS, 2013, pp. 255-260).

¹² Complementares no sentido em que ambos septacordes se complementam para formar a escala cromática. O septacorde 7-1 tem papel importante no início da *Sonata para dois pianos e percussão* de Bartók (STRAUS, 2013, pp. 151-2).

¹³ FORTE (1973) chama essa maneira de categorizar a disposição intervalar de *padrão intervalar básico*, ou *bip* (*basic interval pattern*).

SUBCONJUNTOS

As operações com subconjuntos são importantes para o estabelecimento de relações entre conjuntos aparentemente disparatados. No prelúdio *La Cathédrale engloutie* (Livro I, nº 10), Debussy explora a interação entre conjuntos de tricordes, tetracordes, pentacordes, hexacordes e septacordes por meio desse tipo de relação (Tabela 2).

Conjunto	Forma normal	Compasso
----------	--------------	----------

5-35	[7,9,11,2,4]	1-2
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	3-4
5-35	[7,9,11,2,4]	5-6
5-29	[8,10,1,3,4]	7-10
6-z25	[8,10,11,1,3,4]	11-13
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	14-15
5-35	[11,1,3,6,8]	16-18
6-32	[10,0,2,3,5,7]	19-21
4-23	[7,9,0,2]	22
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	23-32
7-35	[4,5,7,9,10,0,2]	33-37
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	38-41
4-22	[7,10,0,2]	42-43
4-16	[7,8,0,2]	44-45
5-29	[8,10,1,3,4]	46-54
5-29	[1,3,6,8,9]	55-62
4-27	[7,10,1,3] D#7 [5,8,1,11] C#7 [3,6,9,11] B7 [1,4,7,9] A7 [0,3,6,8] G#7	62-67
3-8	[6,8,0]	68-69
4-25	[0,2,6,8]	70-71
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	72-76
7-35	[4,5,7,9,10,0,2]	77-82
7-35	[11,0,2,4,5,7,9]	83
6-32	[7,9,11,0,2,4]	84-89

Tabela 2: ordenação dos conjuntos em *La Cathédrale Engloutie de Debussy*.

SIMILARIDADE

Outra propriedade associada à noção de complemento é a *similaridade*, a qual é observada tanto em classe de alturas (pc) como classe de intervalos (ic). A similaridade de classe de intervalos é mais significativa e pressupõem uma invariância máxima (4 vetores) que pode ser dos tipos R_1 ou R_2 (FORTE, 1973, pp. 46-60; 80-81).¹⁴

¹⁴ Essa propriedade não é comentada por Straus (2013) ou Oliveira (1998), nem ocorre em outros textos do próprio Forte, dando a entender que essas relações são menos significativas.

SEGMENTAÇÃO

Ao empreender uma análise por meio da teoria dos conjuntos, é importante proceder segundo uma metodologia que resulte em uma segmentação eficaz dos conjuntos escolhidos. Certas estruturas convencionais tais como figurações rítmicas, segmentações naturais (trechos entrecortados por pausas ou unidos por ligadura de expressão, por exemplo), padrões de ostinato e acordes, podem ser designados como segmentos primários. Mas a música atonal não é estruturada apenas no nível mais obviamente superficial, por isso se considera outras possibilidades técnicas de gerar conjuntos, como a imbricação, ou seja, a “extração sistemática de subcomponentes de alguma configuração” (FORTE, 1973, pp. 83-84).¹⁵ A técnica de imbricação gera assim uma interação entre segmentos primários que são chamados de segmentos compostos.

A maneira como Allen Forte procede em suas análises baseia-se na segmentação e classificação dos conjuntos. Os conjuntos são denominados segundo a tabela de cardinais e expressos em sua forma normal, entre colchetes, sendo os integrantes do conjunto separados por vírgulas. Por exemplo: 4-7: [8,9,0,1].¹⁶ A forma primária é usada principalmente para demonstrar as operações, mas não (ou menos frequentemente) em demonstrações analíticas.

COMPLEXOS DE CONJUNTOS

Em artigo de 1964 e na segunda parte de *The Structure of Atonal Music* (1973), Forte desenvolveu a teoria dos *complexos de conjuntos* Kh, os quais envolvem as relações recíprocas de interação entre conjuntos e seus complementos. Relações mais simples, envolvendo inclusão parcial entre conjuntos e complementos, são chamadas de K. A representação dos complexos é feita em função desse tipo de avaliação em seções ou mesmo movimentos inteiros de obras musicais, desvendando as relações de inclusão.

¹⁵ A definição dada ao termo “imbricação” pelo *Dicionário Aurélio* é esclarecedora: “disposição que apresentam certos objetos quando se sobrepõem parcialmente uns aos outros, como as telhas de um telhado ou as escamas do peixe”.

¹⁶ Ainda não há consenso quanto à formatação da análise. Joseph Straus (1990) apresenta as coleções sem vírgulas e entre parênteses, adotando ainda as letras T e E para os números 10 e 11, respectivamente. Por exemplo: 6-35: (02468T). A tabela das classes de conjuntos fornecida por Straus (1990, pp. 180-183) baseia-se livremente na de Forte, alterando a ordem de apresentação dos pares complementares de conjuntos.

GENERA

A classificação dos conjuntos e subconjuntos pode ser feita por meio de “famílias” de *genus* formados segundo critérios de “espécies” de materiais musicais. Forte (1988) oferece uma classificação desse tipo, organizando o sistema temperado a partir de tricordes de diferentes espécies. Os tricordes formam a base desse sistema de classificação, seguidos sucessivamente por tetracordes, pentacordes e hexacordes. As demais formações cardinais são complementares, preservando as mesmas propriedades de seus complementos.¹⁷

A tipologia desenvolvida por Forte apresenta 12 tipos de *genus*, agrupados segundo seu grau de parentesco em *supragenus* (FORTE, 1988, p. 201).

	Genus	Tipo	Progenitor	Contagem Tri/Tetra/Penta/Hexa	TOTAL
SUPRA I	1	Atonal	3-5	1/9/24/29	63
	2	Tons-inteiros	3-8	1/9/24/30	64
	3	Diminuto	3-10	1/5/16/21	43
	4	Aumentado	3-12	1/2/8/9	20
SUPRA II	5	Croma	3-1	2/2/10/15	29
	6	Semicroma	3-2	2/3/16/24	45
	7	Croma-dia	3-2	2/3/15/25	45
SUPRA III	8	Atonal	3-3 e 3-4	2/3/15/21	41
	9	Atonal-atonal	3-3 e 3-11	2/3/15/21	41
	10	Atonal-atonal	3-4 e 3-11	2/3/15/21	41
SUPRA IV	11	Dia	3-7 e 3-9	2/2/10/15	29
	12	Dia-tonal	3-7 e 3-11	2/3/16/24	45

Tabela 3: *genus* e *supragenus* segundo a tipologia de Allen Forte.

Assim como em *The structure of atonal music*, Forte oferece uma relação completa dos conjuntos que integram cada *genus* e *supragenus* no apêndice do artigo (FORTE, 1988, pp. 264-266), possibilitando rápida referência.

*
* *

Apesar de certa resistência ao emprego da teoria dos conjuntos como ferramenta analítica – afinal isso implica na aquisição de uma série de novos códigos e sistemas

notacionais – pode-se observar que a análise de obras pós-tonais a partir desses termos é expressa de maneira discreta e objetiva, principalmente quando se abandona uma

¹⁷ As proposições iniciais da teoria dos conjuntos (FORTE, 1973) são consideravelmente refinadas na apresentação dos *genera* (FORTE, 1988), conforme observa Latham (1997). Já em 1985, Forte anunciava uma etapa mais sofisticada, em relação à segmentação analítica da teoria dos conjuntos (LATHAM, 1997, § 11).

nomenclatura híbrida entre os sistemas modal, tonal e suas variantes.¹⁸ A própria noção de um *pandiatonalismo*¹⁹ supõe que a ausência de uma hierarquia entre as coleções escalares requer uma nomenclatura que contemple essa concepção diferenciada do material harmônico.²⁰

A edição mais recente de *Introdução à teoria pós-tonal* de Joseph Straus (2013), incorpora diversos desdobramentos de teorias aplicáveis à música do século XX e XXI, como a teoria dos contornos ou mesmo noções da teoria transformacional (derivada do neo-riemannianismo). As teorias transformacionais agregam importantes contribuições para o entendimento da distância tonal, analisando os processos envolvidos nas transformações harmônicas.

Outro conceito desenvolvido na nova edição de Straus é o de coleções referenciais, ou seja, CCA que têm se revelado importantes no repertório de compositores desde o século XX, seja em sua forma integral ou no manejo de seus subconjuntos. Straus destaca as coleções de tons inteiros (6-35), hexatônica (6-20), octatônica (8-28) e diatônica (7-35); poder-se-ia adicionar a coleção pentatônica (5-35), tão importante em Stravinsky e Villa-Lobos, por exemplo (Salles 2016). Dmitri Tymoczko (2011) investiga formações escalares que se relacionam por parcimônia – isto é, transformam-se umas nas outras por movimentos mínimos, de semitom – que ele denomina escalas “Pressing”: diatônica, acústica (7-34), harmônica maior e harmônica menor (7-32) (TYMOCZKO, 2011, p. 135); o conceito é de certa forma análogo ao de coleções referenciais, pois Tymoczko estabelece uma narrativa analítica em torno dessas transformações. Do mesmo modo, os ciclos intervalares de George Perle (1996) e Elliott Antokoletz (1992 e 1984) e o estudo dos ciclos hexatônicos de Richard Cohn (2012) apontam para o que se pode chamar “novo conceito de tonalidade”.

¹⁸ Apesar de bem aceita pela musicologia americana, a teoria de Forte recebeu críticas de peso, como em Haimo (1996) e Perle (1990).

¹⁹ Williams (1997, pp. 185-186) observa que o *pandiatonalismo* ocorre quando “algumas passagens [...] claramente baseadas em uma coleção diatônica [...] permanecem com tonalidade ambígua porque nenhum grau da escala pode ser identificado como tônica”.

²⁰ Joseph Straus (2013, pp. 143-5) discute a questão da terminologia adequada ao repertório atonal, ao tratar de centricidade.

TABELAS DE FORTE (1973) E MORRIS (1987)

As tabelas de Allen Forte e Robert Morris aqui reproduzidas contém: numeração (FN e MN), forma prima e vetor intervalar. Forte classifica apenas os CCA entre três e nove elementos; Morris amplia essa classificação, considerando CCA com dois e dez elementos. Foram acrescentados campos com nomes tradicionalmente aplicados a algumas coleções mais significativas, muitos deles sugeridos por Larry Solomon (<http://solomonsmusic.net/pcsets.htm>), além dos “modos de transposição limitada” de Olivier Messiaen (1944).

Conjuntos com dois e dez elementos (Morris)

Os vetores dos CCA complementares se relacionam de acordo com sua cardinalidade, por exemplo: 2-5 e 10-5; a diferença entre 10 e 2 é 8; o vetor de 2-5 é 000010; as entradas do vetor de 10-5 somam 8 às entradas do vetor de 2-5: 888894 (lembrar que a última entrada do vetor é o trítone, que divide por dois o valor original).

Tricordes e nonacordes

A diferença entre os cardinais 9 e 3 é 6. Logo, as entradas dos vetores dos nonacordes somam 6 às entradas dos vetores dos tricordes. Exemplo: 3-1, 210000 → 9-1, 876663.

Tetracordes e octacordes

São dois pares de tetracordes e octacordes relacionados em Z. A diferença cardinal é 8-4=4; logo as entradas dos vetores dos octacordes somam 4 às entradas dos vetores dos tetracordes. Exemplo: 4-1, 321000 → 8-1, 765442.

Pentacordes e septacordes

São três pares de pentacordes e septacordes relacionados em Z. A diferença cardinal é $7-5=2$; logo, as entradas vetoriais dos septacordes somam 2 às entradas vetoriais dos pentacordes. Exemplo: 5-35, 032140 $\rightarrow$ 7-35, 254361.

Hexacordes

São 30 hexacordes relacionados em Z (15 pares), os quais são complementares entre si; os demais 20 hexacordes, sem essa relação, são complementares a si mesmos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBUQUERQUE, Joel. *Simetria Intervalar e Rede de Coleções: Análise Estrutural dos Choros nº4 e Choros nº7 de Heitor Villa-Lobos*. São Paulo: Mestrado, ECA/USP, 2014.
- ANTOKOLETZ, Elliot. *Twentieth-Century Music*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- _____. *The Music of Béla Bartók: A Study of Tonality and Progression in Twentieth-Century Music*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1984.
- COELHO DE SOUZA, Rodolfo. Harmonic Perception and Voice Leading Spaces of Set Classes Related by Unordered Interval Classes. In: *Musica Theorica*, Revista da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical 2018, v. 3, n. 2, pp. 46-85 – Journal of the Brazilian Society for Music Theory and Analysis @ TeMA 2018 – ISSN 2525-5541.
- COHN, Richard. *Audacious Euphony: Chromaticism and The Triad's Second Nature*. Oxford and London: Oxford University Press, 2012.
- COOK, Nicholas. *A guide to musical analysis*. New York: Norton, 1987.
- FORTE, Allen. A theory of set-complexes for music. In: *Journal of Music Theory*, v. 8, n. 2., 1964.
- _____. *The structure of atonal music*. New Haven: Yale UP, 1973.
- _____. Pitch-class set analysis today. In: *Music analysis*, v. 4, n. 1/2, pp. 29-58, 1985.
- _____. Pitch-class set genera and the origin of the modern harmonic species. In: *Journal of Music Theory*, v. 32, n. 2, pp. 187-270, Fall 1988.
- HAIMO, Ethan. Atonality, Analysis, and the Intentional Fallacy. In: *Music Theory Spectrum* 18.2, pp. 167-199, Fall 1996.
- LATHAM, E. Review of Haimo's article "Atonality, Analysis, and the Intentional Fallacy". In: *Music Theory Online*, v. 3.2, 1997, disponível no endereço eletrônico: <http://mto.societymusictheory.org/issues/mto.97.3.2/mto.97.3.2.latham.html>.
- MORRIS, Robert. *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. New Haven: Yale University Press, 1987.
- NERY FILHO, Walter. 2012. *Os Voos do Passarinho de Pano e Análise dos Processos Composicionais na Suíte Prole do Bebê no. 2 de Heitor Villa-Lobos*. São Paulo: Mestrado, ECA/USP, 2012.
- OLIVEIRA, João Pedro. *Teoria analítica da música do século XX*. Lisboa: Calouste Gulbekian, 1998.
- PERLE, George. *Twelve-tone tonality*. Los Angeles: University of California Press, 1996.
- _____. Letter from George Perle. In: *Music Theory Spectrum*, v. 15, n. 2, pp. 300-3, 1993.
- _____. Pitch-class set analysis: an evaluation. In: *Journal of Music Theory*, v. 8, n. 2, pp. 151-172, 1990.
- RAHN, John. *Basic Atonal Theory*. New York: Longman, 1980.
- SALLES, Paulo de Tarso. *Villa-Lobos: processos composicionais*. Campinas: Editora Unicamp, 2009.
- _____. Redes de transformação harmônica na obra de Villa-Lobos: uma abordagem derivada da teoria neo-riemanniana. *Anais do IV SIMPOM – Simpósio de Pós-Graduandos em Música*. Rio de Janeiro: Unirio, 2016.
- _____. *Os quartetos de cordas de Villa-Lobos: forma e função*. São Paulo: Edusp, 2018.
- SCHUIJER, Michiel. *Analysing Atonal Music: Pitch Class Set Theory and Its Contexts*. Rochester (NY): Rochester University Press, 2008.
- STRAUS, Joseph. *Introdução à teoria pós-tonal*. São Paulo e Salvador: Editora Unesp/Editora UFBA, 2013.
- TYMOCZKO, Dmitri. *A Geometry of Music*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- VISCONTI, Ciro. *Simetria nos Estudos para Violão de Villa-Lobos*. Jundiaí: Paco Editorial, 2016.
- WEYL, H. *Simetria* [1952]. São Paulo: Edusp, 1997.
- WILLIAMS, Kent. *Theories and analyses of twentieth-century music*. Harbor Drive, Orlando (FL): Harcourt Brace, 1997.

