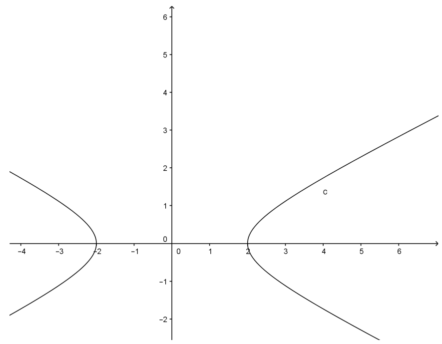
# Hipérbole



Sejam $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$, sendo $c > 0$, e considere $0 < a < c$.

Problema: determine uma equação que caracteriza os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

Temos:

$$\begin{cases} F_1 = (c, 0) \rightarrow \; PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ F_2 = (-c, 0) \rightarrow \; PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \end{cases}$$

Suponhamos, sem porda de generalidade, que $\|PF_1\| \geq \|PF_2\|$. Então $|PF_1 - PF_2| = PF_1 - PF_2$, e temos:

$$PF_1 - PF_2 = 2a \quad \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \quad \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -4a^2 - 4cx \quad \leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -a^2 - cx \quad \leftrightarrow$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \leftrightarrow$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Designando-se $b^2 = c^2 - a^2$, obtemos, para a hipérbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vamos analisar esta equação com um pouco mais de cuidado:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1,$$

Logo, $x^2 \geq a^2$, de maneira que todo ponto $(x, y)$ da hipérbole tem $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Além disso, temos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \leftrightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}|x|\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$ Sendo assim, se $|x| \rightarrow +\infty$ então esta função fica próxima das retas $y = \frac{b}{a}x$ e $-\frac{b}{a}x$.

Dessa forma, as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são assíntotas da hipérbole.