Elipse

Sejam $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$, sendo $c > 0$, e considere $a > c$.

Problema: determine uma equação que caracteriza os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $PF_1 + PF_2 = 2a$.

Temos:

$$\begin{cases} F_1 = (c, 0) \rightarrow \ PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ F_2 = (-c, 0) \rightarrow \ PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \end{cases}$$

e portanto,

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \quad \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \leftrightarrow$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \quad \leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \leftrightarrow$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \leftrightarrow$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \leftrightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Designando-se $b^2 = a^2 - c^2$, obtemos, para a elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$