A INTEGRAL DE RIEMANN EM DUAS VARIÁVEIS

1. Integral em retângulos

2. Conceitos básicos de topologia no plano

Queremos agora estender a definição de integral dupla para domínios (limitados) do plano. A ideia é bem simples. Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio (limitado) no plano e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, podemos tomar um retângulo $\mathcal{R}$ contendo D e definir uma nova função $\tilde{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, por

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in D, \\ 0 \ \text{se} & x \in \mathcal{R} - D. \end{cases}$$

Parece bem natural, então, definir a integral de f em D por

$$\iint_D f := \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}.$$

Uma dificuldade aparece, contudo: a função $\tilde{f}$ pode ser menos "suave" do que a função f. Em particular, mesmo sendo f contínua em D, a função $\tilde{f}$ pode ser descontínua nos pontos da "fronteira" de D e, quiçá, não integrável! Para esclarecer essa questão, precisamos introduzir alguns conceitos de topologia no plano. O assunto é muito extenso, mas aqui vamos ver apenas de alguns conceitos básicos, necessários para esclacer a definição de integral e algumas outras questões que vamos encontrar.

Date: August 12, 2023.

Definição 2.1. *Dado o vetor $\vec{v} = xi + yj$ em $\mathbb{R}^2$ definimos sua norma (euclidiana), por*

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dados agora os pontos $P_0 = (x_0, y_0)$e $P = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ definimos a distância entre eles por

$$d(P, P_0) = \|P_0 - P\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0(^2}$$

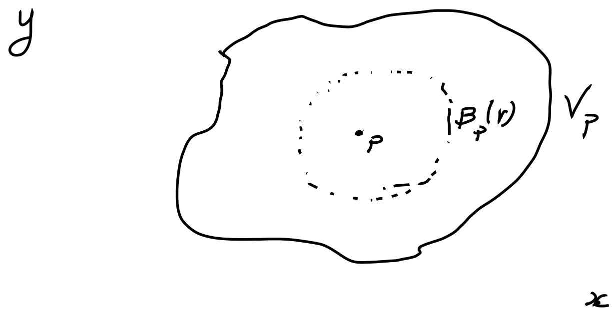
Observação 2.2. *A leitora atenta notará que estamos usando a mesma notação $\mathbb{R}^2$ para o plano considerado como conjunto de pontos (espaço afim) e conjunto de vetores (espaço vetorial). Acredito que isto não causará de confusão e seria um tanto pedante introduzi-la aqui.*

Definição 2.3. *O disco (ou círculo) aberto de raio $r > 0$ e centro em $P_0 = (x_, y) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto*

$$B_P(r) := \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, P) < r\}$$

O disco fechado de raio $r > 0$ e centro em $P_0 = (x_, y) \in \mathbb{R}^2$ é definido analogamente, trocando a desigualdade estrita $<$ por $\leq$,

Definição 2.4. *Uma vizinhança V_P, do ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é qualquer suconjunto do plano que contenha um disco aberto centrado em P.*



Definição 2.5. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que um ponto $P \in \mathbb{R}$ é:*

- ***ponto interior*** *de A se existe uma vizinhança V_P de P. contida em A.*
- ***ponto aderente*** *de A se toda vizinhança V_P de P, contém algum ponto de A.*

Denotaremos por $\overset{\circ}{A}$ e denominaremos **interior de** A o conjunto dos pontos interiores de A. Denotaremos por $\bar{A}$ e denominaremos **fecho (ou aderência) de** A o conjunto dos pontos aderentes de A. Não é difícil verificar que $\overset{\circ}{A}\subset A$ e $A \subset \bar{A}$.

Definição 2.6. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é denominado:*

- ***aberto*** *se $\overset{\circ}{A}= A$,*
- ***fechado*** *se $A = \bar{A}$.*

Em outras palavras, $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se, para todo $P \in A$, existe algum disco aberto contendo P e totalmente contido em A. e fechado se todo $P \in \mathbb{R}$, que possui pontos de A arbitrariamente próximos está em A.

Exemplos 2.7. • *O plano todo é um subconjunto aberto (e fechado!) do plano.*

- *O semiplano aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é um subconjunto aberto do plano.*

- *O semiplano fechado* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ *é um subconjunto fechado do plano.*
- *O disco aberto de centro em* P, $B_P(r)$ *é um suconjunto aberto do plano.*
- *O disco fechado de centro em* P *é um suconjunto fechado do plano.*
- $R^2 - \{(0, 0)\}$ *é subconjunto aberto do plano.*
- *O complementar de um disco fechado é subconjunto aberto, o complementar de um disco aberto é um subconjunto fechado.*
- *O conjunto vazio é aberto e fechado.*
- *O fecho de um conjunto* A *é fechado.*
- *O interior de um cojunto* A *é aberto.*

Proposição 2.8. *Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^2$ *é fechado se e somente se seu complementar* $\mathbb{R}^2 \setminus A$ *é aberto.*

Dem. Suponhamos que A é fechado e seja $P \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Então $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}$. Portanto existe uma vizinhança V_P de P tal que $V_P \cap A = \emptyset \to V_P \subset A$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é aberto e seja $P \in \bar{A}$. Então toda vizinhança de P intercepta A de onde segue que $P \notin \mathbb{R}^2 \setminus A$ e, portanto, $P \in A$. $\square$

Proposição 2.9.

(1) *Se $A_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família qualquer de abertos de $\mathbb{R}^2$, então a união $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.*

(2) *Se A_1 e A_2 são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$, então $A_1 \cap A_2$ é subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.*

Dem.

(1) Se $P \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ então $P \in A_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Sendo A_λ aberto, existe uma vizinhança de P, $V_P \subset A_\lambda$ e, daí $V_P \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

(2) (1) Se $P \in A_1 \cap A_2$ então $P \in A_1$ e $P \in A_1$. Sendo A_1 e A_1 abertos, existem vizinhanças de P, ${V_P}^1 \subset A_1$ e ${V_P}^2 \subset A_2$. Segue que $V_P := {V_P}^1 \cap {V_P}^2$ é vizinhança de P contida em $A_1 \cap A_2$. $\square$

Corolário 2.10.

(1) *Se $A_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família qualquer de fechados de $\mathbb{R}^2$, então a interseção $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um conjunto fechado.*

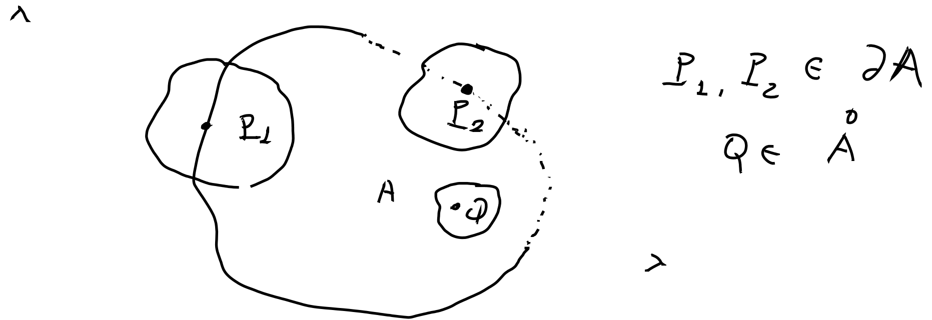
(2) *Se A_1 e A_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$, então $A_1 \cup A_2$ é subconjunto fechado.*

Dem. Basta tomar complementos na proposição anterior e usar as "Leis de Morgan". $\square$

Definição 2.11. *A fronteira (ou bordo) de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, denotada por ∂A é o conjunto dos pontos de R^2 que são aderentes a A mas não são pontos interiores de A. Ou seja:*

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

Observação 2.12. (1) *Um ponto P pertence a ∂A se e somente se toda vizinhança de P contém algum ponto de A e também algum ponto do complementar $R^2 \setminus A$.*



(2) *A é fechado se e somente se* $\partial A \subset A$.
(3) *A é aberto se e somente se* $\partial A \cap A = \emptyset$.

Definição 2.13. • *Dizemos que um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é* ***limitado****, se existir um retângulo compacto* $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ *tal que* $D \subset \mathcal{R}$.

- *Dizemos que um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é* ***compacto*** *se D for fechado e limitado.*

Exemplos 2.14. • *O semiplano aberto* $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ *não é limitado*

- *O fecho de W é o semiplano fechado* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ *é fechado, mas não limitado*
- *O disco aberto de centro em P e raio r,* $B_P(r)$ *é limitado, mas não é fechado.*
- *O disco fechado de centro em P e raio r,* $\overline{B_P(r)}$ *é compacto.*
- *O fecho de qualquer conjunto limitado* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é compacto.*