

Oscilações lineares e não lineares

1 Modelo físico

Nesta aula examinaremos um problema clássico da Mecânica: a transferência de oscilações entre dois pêndulos apoiados sobre uma base flexível.

Para torná-lo apropriado à análise, consideraremos um modelo físico simplificado assim descrito: *Uma barra delgada AB de comprimento L e massa M está articulada a duas barras delgadas OA e O'B, ambas de comprimento a e massa desprezível, sendo O e O' duas articulações ligadas a um referencial fixo. Nos pontos A e B estão articuladas duas barras delgadas AC e BD, ambas de massa desprezível e comprimento a, cada qual portando em suas extremidades uma partícula de massa m. Supõe-se que o movimento do sistema se dê no plano da figura.*

Na Fig.1a apresenta-se o sistema em sua configuração de equilíbrio estável, e na Fig. 1-b em uma configuração arbitrária.

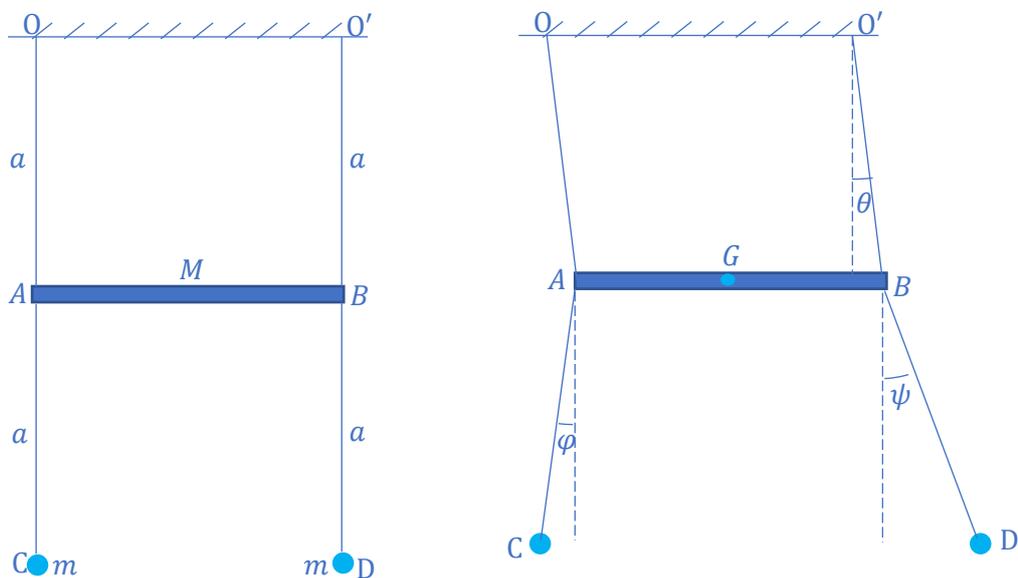


Figura 1. Pêndulos ligados a uma barra horizontal oscilante. (a) Configuração de equilíbrio estável; (b) Configuração genérica.

Observa-se experimentalmente que:

- se $M \gg m$,
- se o sistema parte do repouso com $\theta_0 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$ e $\psi_0 = 0$,
- se os ângulos iniciais θ_0 e φ_0 são ambos pequenos,

após um certo tempo T , o ângulo $\varphi(t)$ se reduz a zero e o ângulo $\psi(t)$ se iguala a φ_0 , ou seja, a oscilação inicial do pêndulo AC é transferida para o pêndulo BD , entrando AC momentaneamente em repouso. Após um novo intervalo de tempo T , os papéis de AC e BD são novamente trocados e esse fenômeno periódico se repete *ad infinitum*.

É importante destacar que tal comportamento só é observado nas condições apontadas acima. Para grandes valores iniciais de θ , φ e ψ , o sistema exibe comportamento **caótico**¹, conforme será constatado durante as simulações do modelo não-linear.

¹ Em tal situação, variações infinitesimais das condições iniciais modificam drasticamente a evolução temporal do sistema.

2. Modelo matemático não-linear do sistema

Para construir as equações diferenciais que governam o movimento do sistema, adotaremos a abordagem lagrangeana. Dessa forma, determinaremos, inicialmente, as expressões da energia cinética e da energia potencial do sistema.

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2}(Mv_G^2 + mv_C^2 + mv_D^2) \quad (2-1)$$

As velocidades dos pontos G, C e D são dadas pelas expressões a seguir:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A = \vec{v}_O + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (A - O) = \dot{\theta} \vec{k} \wedge a(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) = \dot{\theta} a(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (C - A) = \vec{v}_G + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge a(\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j}) = \\ \Rightarrow \vec{v}_C &= a(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi) \vec{i} + a(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi} \sin \varphi) \vec{j} \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\vec{v}_D = a(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \cos \psi) \vec{i} + a(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\psi} \sin \psi) \vec{j} \quad (2-4)$$

Substituindo-se (2-2) a (2-4) em (2-1) chega-se a:

$$T = \left(\frac{1}{2}M + m\right) a^2 \dot{\theta}^2 + ma^2 \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + ma^2 \cos(\theta - \psi) \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\psi}^2 \quad (2-5)$$

A energia potencial do sistema, considerando a configuração de equilíbrio estável como referência, é dada por

$$V = Mga(1 - \cos \theta) + mga(2 - \cos \theta - \cos \varphi) + mga(2 - \cos \theta - \cos \psi)$$

ou seja,

$$V = (M + 4m)ga - (M + 2m)ga \cos \theta - mga \cos \varphi - mga \cos \psi \quad (2-6)$$

O lagrangeano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} L = T - V &= \left(\frac{1}{2}M + m\right) a^2 \dot{\theta}^2 + ma^2 \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + ma^2 \cos(\theta - \psi) \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\psi}^2 - \\ &(M + 4m)ga + (M + 2m)ga \cos \theta + mga \cos \varphi + mga \cos \psi \end{aligned} \quad (2-7)$$

Aplicando-se as equações de Lagrange, obtém-se o sistema de equações diferenciais não lineares (2-8) abaixo

$$\begin{cases} 2\left(\frac{M}{2m} + 1\right) \ddot{\theta} + \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + \cos(\theta - \psi) \ddot{\psi} + \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\theta - \psi) \dot{\psi}^2 + 2\left(\frac{M}{2m} + 1\right) \frac{g}{a} \sin \theta = 0 \\ \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} + \ddot{\varphi} - \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{a} \sin \varphi = 0 \\ \cos(\theta - \psi) \ddot{\theta} + \ddot{\psi} - \sin(\theta - \psi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{a} \sin \psi = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

o qual governa o comportamento do sistema da Fig.1, quaisquer que sejam os valores iniciais das variáveis $\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}$ e quaisquer que sejam os valores dos parâmetros a, m, M .

TAREFA 1

Mostrar que, aplicando-se as equações de Lagrange ao lagrangeano (2-7), chega-se ao sistema de equações diferenciais não lineares (2-8).

3. Descrição do modelo dinâmico não linear em espaço de estados

Para que o sistema de 3 equações diferenciais de segunda ordem (2-8) seja transformado em um sistema equivalente de 6 equações diferenciais de primeira ordem, é **imprescindível** que os termos de segunda ordem sejam descritos como funções dos termos de ordem 1 e zero, ou seja, na forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \ddot{\theta}(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta, \varphi, \psi) \\ \ddot{\varphi} &= \ddot{\varphi}(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta, \varphi, \psi) \\ \ddot{\psi} &= \ddot{\psi}(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta, \varphi, \psi)\end{aligned}\tag{3-1}$$

Com o intuito de simplificar a solução do problema, adotaremos a notação a seguir:

$$\begin{aligned}a_{11} &= 2\left(\frac{M}{2m} + 1\right) \\ a_{12} &= \cos(\theta - \varphi) \\ a_{13} &= \cos(\theta - \psi) \\ a_{21} &= \cos(\theta - \varphi) \\ a_{22} &= 1 \\ a_{23} &= 0 \\ a_{31} &= \cos(\theta - \psi) \\ a_{32} &= 0 \\ a_{33} &= 1\end{aligned}\tag{3-2}$$

e

$$\begin{aligned}b_1 &= \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin(\theta - \psi) \dot{\psi}^2 + 2\left(\frac{M}{2m} + 1\right) \frac{g}{a} \sin \theta \\ b_2 &= -\sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{a} \sin \varphi \\ b_3 &= -\sin(\theta - \psi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{a} \sin \psi\end{aligned}\tag{3-3}$$

Substituindo-se os termos (3-2) e (3-3) em (2-8), chega-se ao sistema de equações algébricas abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\tag{3-4}$$

Resolvendo-se o sistema linear algébrico anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = -[A]^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\tag{3-5}$$

Utilizando a ferramenta de matemática simbólica Maxima (<https://swmath.org/software/560>), chega-se à seguinte solução:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{-a_{13}b_3 - a_{12}b_2 + b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{a_{21}a_{13}b_3 + a_{11}b_2 - a_{13}a_{31}b_2 - a_{12}b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}} \\ \ddot{\psi} &= \frac{a_{11}b_3 - a_{12}a_{21}b_3 + a_{12}a_{31}b_2 - a_{13}b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}}\end{aligned}\tag{3-6}$$

Representando-se as equações diferenciais de segunda ordem acima em espaço de estados, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= \frac{-a_{13}b_3 - a_{12}b_2 + b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}} \\
 \dot{y}_3 &= y_4 \\
 \dot{y}_4 &= \frac{a_{21}a_{13}b_3 + a_{11}b_2 - a_{13}a_{31}b_2 - a_{12}b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}} \\
 \dot{y}_5 &= y_6 \\
 \dot{y}_6 &= \frac{a_{11}b_3 - a_{12}a_{21}b_3 + a_{12}a_{31}b_2 - a_{13}b_1}{-a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}}
 \end{aligned} \tag{3-7}$$

onde

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \theta \\
 y_2 &= \dot{\theta} \\
 y_3 &= \varphi \\
 y_4 &= \dot{\varphi} \\
 y_5 &= \psi \\
 y_6 &= \dot{\psi}
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

O sistema de equações diferenciais não lineares (3-7) pode ser integrado utilizando-se a função **ode** do **Scilab**.

Conforme será visto na tarefa a seguir, é muito difícil analisar o comportamento desse sistema à medida que se variam as condições iniciais e os valores dos seus parâmetros.

TAREFA 2

Após verificar se as equações (3-6) estão corretas (utilize uma ferramenta de matemática simbólica como, por exemplo, o **Maxima** (<https://swmath.org/software/560>)), implemente a chamada à função **ode** do **Scilab** para simular o modelo matemático não-linear do sistema da Fig.1, considerando os valores indicados na Tab.1 a seguir.

Note que as condições iniciais propostas, referentes aos ângulos φ e ψ são, respectivamente, 30° e 60° ou $30,1^\circ$ e $60,1^\circ$. Para facilitar a análise, chamaremos às primeiras de ‘condições iniciais de referência’ e às segundas de ‘condições iniciais perturbadas’.

Tabela 1. dados para a simulação do sistema não-linear.

M	m	a	θ_0	$\dot{\theta}_0$	φ_0	$\dot{\varphi}_0$	ψ_0	$\dot{\psi}_0$
10,0	1,0	1,0	20°	0,0	30°	0,0	60°	0,0
10,0	1,0	1,0	20°	0,0	$30,1^\circ$	0,0	$60,1^\circ$	0,0
1,0	1,0	1,0	30°	0,0	30°	0,0	60°	0,0
1,0	1,0	1,0	30°	0,0	$30,1^\circ$	0,0	$60,1^\circ$	0,0
kg	kg	m	grau	grau/s	grau	grau/s	grau	grau/s

Analise os resultados obtidos. Para tanto, construa as curvas $\psi = \psi(\theta, \varphi)$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\theta, \varphi)$ ou quaisquer outras que relacionem 3 variáveis do espaço de fases do problema, desenhe-as com auxílio da função **comet3D** do **Scilab** e avalie o efeito das pequenas perturbações nas condições iniciais sobre a forma dessas curvas. Por exemplo, determine o tempo necessário para que $\left| \frac{[\psi_r(t) - \psi_p(t)]}{\psi_r(t)} \right| > 0,10$, em que $\psi_r(t)$ e $\psi_p(t)$ se referem ao valor do ângulo ψ para as condições iniciais ‘de referência’ e ‘perturbadas’, respectivamente.

4. Modelo matemático linear do sistema

Para que se possa melhor investigar o fenômeno de transferência de vibrações referido no item 1 desta apostila, é recomendável operar com a versão linear do modelo dinâmico do sistema, a qual se obtém aproximando-se ambas as funções T e V por formas quadráticas.

Em assim procedendo, chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{m} + 2\right)\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + 2\left(\frac{M}{2m} + 1\right)\frac{g}{a}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\varphi = 0 \\ \ddot{\theta} + \ddot{\psi} + \frac{g}{a}\psi = 0 \end{cases} \quad (4-1)$$

Adotando-se a notação

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{M}{2m} + 1 \\ \omega^2 &= \frac{g}{a} \end{aligned} \quad (4-2)$$

o sistema (4-1) adquire a forma:

$$\begin{cases} 2k^2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + 2k^2\omega^2\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \\ \ddot{\theta} + \ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

TAREFA 3

Utilizando o método de aproximação por séries de Taylor apresentado no curso de Mecânica 2, obtenha aproximações quadráticas das funções T (eq.2-5) e V (eq.2-6). Em seguida, aplique as equações de Lagrange a essas funções, de modo a obter o modelo dinâmico linear (4-3).

Resolvendo-se o sistema (4-3) como um sistema linear nas incógnitas $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, ou seja, na forma

$$\begin{bmatrix} 2k^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k^2\omega^2\theta \\ -\omega^2\varphi \\ -\omega^2\psi \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

obtém-se:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2(k^2 - 1)}(\varphi + \psi) - \frac{2k^2\omega^2}{2(k^2 - 1)}\theta \\ \ddot{\varphi} = -\frac{\omega^2}{2(k^2 - 1)}(\varphi + \psi) + \frac{k^2\omega^2}{k^2 - 1}\theta - \omega^2\varphi \\ \ddot{\psi} = -\frac{\omega^2}{2(k^2 - 1)}(\varphi + \psi) + \frac{k^2\omega^2}{k^2 - 1}\theta - \omega^2\psi \end{cases} \quad (4-5)$$

TAREFA 4

Após verificar se a passagem de (4-4) para (4-5) está correta (utilize alguma ferramenta de matemática simbólica, como, por exemplo, o *Maxima*), represente o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (4-5) na forma de espaço de estados. Em seguida, utilize a função **ode** do **Scilab** para integrar as equações diferenciais de primeira ordem resultantes.

Considere os seguintes conjuntos de valores dos parâmetros do sistema:

- i) $M = 100kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- ii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- iii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 2m, g = 10 m/s^2$

Adote as seguintes condições iniciais:

$$\theta(0) = 2^\circ, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = -1^\circ, \dot{\varphi}(0) = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0$$

Simule essas equações por um tempo adequado à observação dos efeitos dos parâmetros sobre o comportamento dinâmico do sistema. Analise os resultados obtidos.

5. Frequências naturais e modos de vibrar

A análise do sistema de equações diferenciais (4-3) se torna muito mais simples se se fizer uma mudança de variáveis que transforme as funções energia cinética T e energia potencial V em somas de quadrados (isto é, sem os termos cruzados $\dot{\theta}\dot{\varphi}$ e $\dot{\theta}\dot{\psi}$, portanto). Em tais circunstâncias, o sistema (4-3) fica descrito na **forma canônica** e suas novas coordenadas generalizadas representam os **modos naturais** de vibrar do sistema.

Do ponto de vista algébrico, esse problema se enquadra na categoria dos **problemas de autovalores e autovetores**. No caso, os autovalores correspondem às **frequências naturais** do sistema e os autovetores são as **amplitudes máximas** das **autofunções** (harmônicos) que descrevem os modos naturais de vibrar do sistema.

Para formular matematicamente esse problema, devemos representar o sistema de equações diferenciais (4-3) na forma:

$$[M][\ddot{x}] + [K][x] = [0] \quad (5-1)$$

em que

$[M]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez do sistema.

Em assim procedendo, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} 2k^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k^2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

de modo que

$$[M] = \begin{bmatrix} 2k^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

e

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k^2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

Antes de prosseguir, examinaremos um problema amplamente conhecido: um sistema massa-mola, descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5-5}$$

A solução dessa equação diferencial é:

$$x(t) = A \cos(pt + \alpha) \tag{5-6}$$

onde A e α são determinados a partir das condições iniciais e p é a frequência natural.

Observe-se que, nesse caso, a aceleração de x é dada por:

$$\ddot{x}(t) = -p^2 A \cos(pt + \alpha) \tag{5-7}$$

Substituindo-se (5-6) e (5-7) em (5-5), obtém-se:

$$\begin{aligned} m[-p^2 A \cos(pt + \alpha)] + kA \cos(pt + \alpha) &= 0 \\ \Rightarrow A[p^2 m - k] \cos(pt + \alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{5-8}$$

Para que a equação (5-8) tenha solução diferente da trivial, deve-se ter:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5-9}$$

Retornando ao problema original e levando em conta a equação característica de um sistema massa-mola (eq. 5-8), as frequências naturais p_1, p_2, p_3 do sistema (5-2) são determinadas resolvendo-se a equação característica a seguir:

$$|p^2[M] - [K]| = 0 \tag{5-10}$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} 2(pk)^2 - 2(k\omega)^2 & p^2 & p^2 \\ p^2 & p^2 - \omega^2 & 0 \\ p^2 & 0 & p^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5-11}$$

As amplitudes $\theta_i^{max}, \varphi_i^{max}, \psi_i^{max}$ (autovetores) são determinadas, a menos de um fator de escala, substituindo-se, uma a uma, as frequências naturais $p_i, i = 1, \dots, 3$, na equação linear homogênea abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2(p_i k)^2 - 2(k\omega)^2 & p_i^2 & p_i^2 \\ p_i^2 & p_i^2 - \omega^2 & 0 \\ p_i^2 & 0 & p_i^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i^{max} \\ \varphi_i^{max} \\ \psi_i^{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-12}$$

É conveniente normalizar as amplitudes máximas, introduzindo-se a restrição

$$(\theta_i^{max})^2 + (\varphi_i^{max})^2 + (\psi_i^{max})^2 = 1 \tag{5-13}$$

de modo que, das equações (5-12) e (5-13), se obtenham os respectivos valores normalizados dessas amplitudes.

TAREFA 5

Utilizando funções apropriadas do **Scilab** (como, por exemplo, a função **spec**), determine as frequências naturais p_1, p_2, p_3 e os respectivos autovetores do modelo linear do sistema da Fig.1, adotando os seguintes valores para os seus parâmetros:

- i) $M = 100kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- ii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- iii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 2m, g = 10 m/s^2$

6. Exemplo auxiliar

Para que se possa melhor compreender a estrutura do problema apresentado no tópico anterior, analisaremos um problema mais conhecido – o da oscilação de uma corda ligada a 3 massas concentradas, sujeita a uma tensão P aplicada em suas extremidades, conforme indicado na Fig.2.

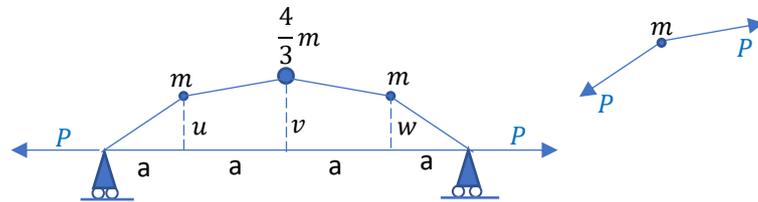


Figura 2. Vibração de corda tensa ligada a 3 massas concentradas.

Chamando-se de u, v, w aos deslocamentos das partículas e aplicando-se a segunda lei de Newton ao sistema, tem-se:

$$\begin{cases} m\ddot{u} = P \left(\frac{v-u}{a} - \frac{u}{a} \right) \\ \frac{4}{3}m\ddot{v} = P \left(\frac{u-v}{a} + \frac{w-v}{a} \right) \\ m\ddot{w} = P \left(\frac{u-w}{a} - \frac{w}{a} \right) \end{cases} \quad (6-1)$$

Definindo-se

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{2ma}} \quad (6-2)$$

e fazendo-se as devidas substituições, chega-se a um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\omega^2(2u - v) = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{v} + 2\omega^2(-u + 2v - w) = 0 \\ \ddot{w} + 2\omega^2(2w - v) = 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

Após a identificação das matrizes $[M]$ e $[K]$ mediante análise do sistema de equações diferenciais anteriores, a equação (5-11) fornece as 3 frequências naturais do sistema, ou seja,

$$p_1 = \omega, p_2 = 2\omega, p_3 = \sqrt{6}\omega \quad (6-4)$$

Em seguida, substituindo-se uma a uma as frequências naturais p_1, p_2, p_3 no sistema de equações

$$[p_i^2[M] - [K]] \begin{bmatrix} u_i^{max} \\ v_i^{max} \\ w_i^{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

obtem-se o seguinte conjunto de autovetores:

$$\begin{aligned} \text{modo 1: } & u_1^{max} = 2\alpha, v_1^{max} = 3\alpha, w_1^{max} = 2\alpha \\ \text{modo 2: } & u_2^{max} = \alpha, v_2^{max} = 0, w_2^{max} = -\alpha \\ \text{modo 3: } & u_3^{max} = \alpha, v_3^{max} = -\alpha, w_3^{max} = \alpha \end{aligned} \quad (6-6)$$

onde α é um parâmetro real.

Na Fig. 3 esboçam-se os 3 modos principais de vibrar desse sistema.

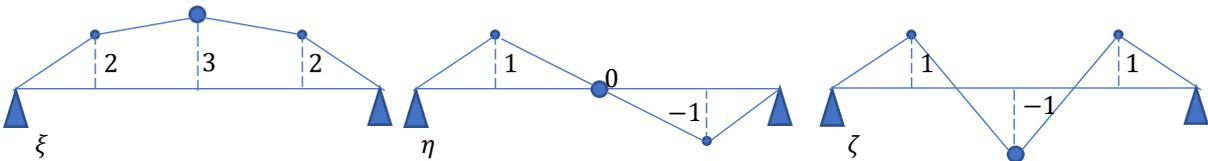


Figura 3. Modos de vibrar da corda tensa.

Designando-se as **coordenadas modais** relativas aos modos 1, 2 e 3 por ξ, η, ζ , respectivamente, as amplitudes u, v, w do sistema ficam expressas na forma

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

Em outras palavras: a evolução temporal de cada uma das amplitudes u, v, w pode ser expressa como uma combinação linear da evolução temporal das coordenadas modais ξ, η, ζ , do sistema. Da mesma forma, invertendo-se a matriz 3x3 do sistema de equações anterior, pode-se expressar as coordenadas modais como uma combinação linear das amplitudes u, v, w , ou seja:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/10 & -2/5 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

Sabemos que a evolução temporal das coordenadas modais do sistema da Fig.2 é dada pelas funções

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi^{max} \cos(p_1 t + \alpha) = (\xi^{max} \cos \alpha) \cos p_1 t - (\xi^{max} \sin \alpha) \sin p_1 t \\ \eta(t) &= \eta^{max} \cos(p_2 t + \beta) = (\eta^{max} \cos \beta) \cos p_2 t - (\eta^{max} \sin \beta) \sin p_2 t \\ \zeta(t) &= \zeta^{max} \cos(p_3 t + \gamma) = (\zeta^{max} \cos \gamma) \cos p_3 t - (\zeta^{max} \sin \gamma) \sin p_3 t \end{aligned} \quad (6-9)$$

as quais podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t \\ \eta(t) &= A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t \\ \zeta(t) &= A_3 \cos p_3 t + B_3 \sin p_3 t \end{aligned} \quad (6-10)$$

onde as constantes A_i, B_i são determinadas **a partir das condições iniciais**.

Derivando-se as equações acima, obtém-se a evolução temporal das **velocidades modais** do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -A_1 p_1 \sin p_1 t + B_1 p_1 \cos p_1 t \\ \dot{\eta}(t) &= -A_2 p_2 \sin p_2 t + B_2 p_2 \cos p_2 t \\ \dot{\zeta}(t) &= -A_3 p_3 \sin p_3 t + B_3 p_3 \cos p_3 t \end{aligned} \quad (6-11)$$

Admitiremos que, no instante inicial, as coordenadas u, v, w e suas velocidades $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ tenham os valores:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & v(0) = 0 & w(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = U & \dot{v}(0) = 0 & \dot{w}(0) = 0 \end{cases} \quad (6 - 12)$$

(Note que essas condições **são compatíveis com a aplicação de uma percussão sobre a massa 1**, a partir do estado de repouso).

Da equação (6-8) e de (6-12), conclui-se que, para $t = 0$, as coordenadas modais valem

$$\xi(0) = 0 \quad \eta(0) = 0 \quad \zeta(0) = 0 \quad (6 - 13)$$

Derivando-se a equação (6-8), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/10 & -2/5 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (6 - 14)$$

Aplicando-se a equação acima para $t = 0$, conclui-se que, nesse instante, as velocidades modais valem:

$$\dot{\xi}(0) = \frac{U}{10} \quad \dot{\eta}(0) = \frac{U}{2} \quad \dot{\zeta}(0) = \frac{3U}{10} \quad (6 - 15)$$

Substituindo-se (6-13) e (6-15) em (6-10) e (6-11), respectivamente, obtêm-se as constantes A_i, B_i , ou seja:

$$\begin{aligned} A_1 = 0 & \quad B_1 = \frac{U}{10p_1} \\ A_2 = 0 & \quad B_2 = \frac{U}{2p_2} \\ A_3 = 0 & \quad B_3 = \frac{3U}{10p_3} \end{aligned} \quad (6 - 16)$$

Portanto, ao longo do tempo (vide eq. 6-10) as **autofunções** do sistema da Fig.2 são:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{U}{10p_1} \sin p_1 t \\ \eta(t) &= \frac{U}{2p_2} \sin p_2 t \\ \zeta(t) &= \frac{3U}{10p_3} \sin p_3 t \end{aligned} \quad (6 - 17)$$

Substituindo-se (6-17) em (6-7), obtêm-se, finalmente, a **evolução temporal** das amplitudes u, v, w para as condições iniciais (6-12), ou seja,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{U}{10} \left(\frac{2}{p_1} \sin p_1 t + \frac{5}{p_2} \sin p_2 t + \frac{3}{p_3} \sin p_3 t \right) \\ v(t) &= \frac{3U}{10} \left(\frac{1}{p_1} \sin p_1 t - \frac{1}{p_3} \sin p_3 t \right) \\ w(t) &= \frac{U}{10} \left(\frac{2}{p_1} \sin p_1 t - \frac{5}{p_2} \sin p_2 t + \frac{3}{p_3} \sin p_3 t \right) \end{aligned} \quad (6 - 18)$$

onde p_1, p_2, p_3 são determinadas a partir da equação (5-11).

As equações (6-18) constituem a solução analítica do sistema de equações diferenciais (6-1).

TAREFA 6

Utilizando a abordagem apresentada no exemplo anterior (item 6), determine a **solução analítica** das equações diferenciais lineares (5-2), ou seja, o conjunto de três funções $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ expressas como **combinações lineares de suas autofunções** $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ (vide equações 6-17 e 6-18).

Adote para os parâmetros do sistema os seguintes valores:

- i) $M = 100kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- ii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 1m, g = 10 m/s^2$
- iii) $M = 10kg, m = 1kg, a = 2m, g = 10 m/s^2$

Adote as seguintes condições iniciais:

$$\theta(0) = 2^\circ, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = -1^\circ, \dot{\varphi}(0) = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0$$

Confronte a solução analítica com os resultados das simulações numéricas realizadas na Tarefa 4. Calcule o erro médio quadrático em cada caso e, a partir desses dados, estabeleça suas conclusões.

7. Um exame analítico do fenômeno de transferência de oscilações

Representando-se o modelo linear (4-5) em termos de suas coordenadas modais e adotando-se parâmetros físicos e condições iniciais compatíveis com o surgimento do fenômeno de transferência de oscilações descrito no tópico 1 desta apostila, obtêm-se soluções analíticas para $\varphi = \varphi(t)$ e $\psi = \psi(t)$ que evidenciam as causas que dão origem ao fenômeno em consideração.

Para tanto, aplicaremos transformações lineares ao sistema de equações diferenciais (4-5), de modo a representá-las na forma desacoplada (canônica), ou seja,

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + p_1^2 \xi &= 0 \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \eta &= 0 \\ \ddot{\zeta} + p_3^2 \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (7-1)$$

onde ξ, η, ζ são as coordenadas modais do sistema.

Esse procedimento pode ser realizado utilizando-se alguma ferramenta de apoio à matemática simbólica, mas nesta apostila seguiremos o desenvolvimento estabelecido em (Pars, 1965), aplicando uma seqüência de operações algébricas sobre as equações diferenciais (4-3), abaixo renumeradas,

$$2k^2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + 2k^2\omega^2\theta = 0 \quad (7-2)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (7-3)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0 \quad (7-4)$$

de modo a convertê-las à forma (7-1).

Subtraindo-se (7-4) de (7-3) obtém-se:

$$\ddot{\varphi} - \ddot{\psi} + \omega^2(\varphi - \psi) = 0 \quad (7-5)$$

Somando-se (7-3) e (7-4) e, em seguida, multiplicando-se o resultado por k , obtém-se:

$$2\ddot{\theta}k + (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi})k + \omega^2k(\varphi + \psi) = 0 \quad (7-6)$$

Somando-se (7-6) e (7-2) e fazendo-se todo o desenvolvimento algébrico subsequente, chega-se a:

$$(k+1)(2k\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) + k\omega^2(2k\theta + \varphi + \psi) = 0 \quad (7-7)$$

Subtraindo-se (7-6) de (7-2) e desenvolvendo-se a expressão resultante, obtém-se:

$$(k - 1)(2k\ddot{\theta} - \ddot{\varphi} - \ddot{\psi}) + \omega^2 k(2k\theta - \varphi - \psi) = 0 \quad (7 - 8)$$

Neste ponto, nota-se que as transformações anteriores produziram o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$(k + 1)(2k\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) + k\omega^2(2k\theta + \varphi + \psi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \ddot{\psi} + \omega^2(\varphi - \psi) = 0 \quad (7 - 9)$$

$$(k - 1)(2k\ddot{\theta} - \ddot{\varphi} - \ddot{\psi}) + \omega^2 k(2k\theta - \varphi - \psi) = 0$$

Uma simples inspeção visual desse sistema põe em evidência suas 3 coordenadas modais, a saber,

$$\xi = 2k\theta + \varphi + \psi \quad (7 - 10)$$

$$\eta = \varphi - \psi \quad (7 - 11)$$

$$\zeta = 2k\theta - \varphi - \psi \quad (7 - 12)$$

bem como suas 3 freqüências naturais, ou seja,

$$p_1^2 = \frac{k}{k + 1} \omega^2$$

$$p_2^2 = \omega^2 \quad (7 - 13)$$

$$p_3^2 = \frac{k}{k - 1} \omega^2$$

Chega-se, assim, à forma (7-1) pretendida.

O próximo passo da análise consiste em **estabelecer, com rigor, os valores dos parâmetros compatíveis com o fenômeno de transferência de oscilações**. Assim, admitindo-se que $M \gg m$, o parâmetro

$$k = \sqrt{\frac{M}{2m} + 1} \quad (7 - 14)$$

adquire um valor elevado e, por conseguinte, as freqüências naturais p_1, p_2, p_3 , dadas por (7-13), **assumem valores próximos**. Portanto, o sistema exibirá o conhecido fenômeno de **batimento**. Os próximos passos tornarão esse fato ainda mais evidente.

Somando-se (7-10) e (7-12), obtém-se:

$$\theta = \frac{\xi + \zeta}{4k} \quad (7 - 15)$$

Multiplicando-se (7-11) por 2, somando-se com (7-10) e subtraindo-se (7-12), obtém-se:

$$\varphi = \frac{\xi + 2\eta - \zeta}{4} \quad (7 - 16)$$

Multiplicando-se (7-11) por (-2), somando-se com (7-10) e subtraindo-se (7-12), obtém-se:

$$\psi = \frac{\xi - 2\eta - \zeta}{4} \quad (7 - 17)$$

Finalmente, admitiremos que o sistema realize um movimento com as seguintes condições iniciais:

$$\theta = \frac{\alpha}{2k} \quad \dot{\theta} = 0$$

$$\varphi = \alpha \quad \dot{\varphi} = 0$$

$$\psi = 0 \quad \dot{\psi} = 0 \quad (7 - 18)$$

No instante $t = 0$ as coordenadas modais, de acordo com (7-10) a (7-12), valem

$$\begin{aligned}\xi &= 2\alpha \\ \eta &= \alpha \\ \zeta &= 0\end{aligned}\tag{7-19}$$

Portanto, em um tempo subsequente, os respectivos modos (**autofunções**) correspondem às funções

$$\begin{aligned}\xi &= 2\alpha \cos p_1 t \\ \eta &= \alpha \cos p_2 t \\ \zeta &= 0\end{aligned}\tag{7-20}$$

e os ângulos φ e ψ , de acordo com as equações (7-16) e (7-17), se expressam como

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha(\cos p_1 t + \cos p_2 t)\tag{7-21}$$

e

$$\psi = \frac{1}{2}\alpha(\cos p_1 t - \cos p_2 t)\tag{7-22}$$

Notando que, quando $M \gg m$, p_1 é ligeiramente menor do que p_2 (vide equações 7-13), podemos expressar p_1 como:

$$p_1 = p_2 - 2\varepsilon\tag{7-23}$$

em que ε tem um valor muito pequeno.

Assim, a evolução temporal dos ângulos φ e ψ passa a ser governada pelas funções

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha[\cos(p_2 - \varepsilon)t + \cos p_2 t]\tag{7-24}$$

e

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\alpha[\cos(p_2 - \varepsilon)t - \cos p_2 t]\tag{7-25}$$

as quais, mediante desenvolvimento algébrico, se transformam em:

$$\varphi(t) = \alpha \cos \varepsilon t \cos(p_2 - \varepsilon)t\tag{7-26}$$

e

$$\psi(t) = \alpha \sin \varepsilon t \sin(p_2 - \varepsilon)t\tag{7-27}$$

Analisando-se as expressões de $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, vemos que elas se assemelham a **movimentos harmônicos** de períodos $2\pi/(p_2 - \varepsilon) \approx 2\pi/p_2$ **modulados por um sinal de longo período** $2\pi/\varepsilon$. A diferença entre ambas reside na fase.

Observemos também que:

- $\varphi(t)$ é máximo para $t = 0, \pi/\varepsilon, 2\pi/\varepsilon, \dots$
- $\psi(t)$ é mínimo para $t = 0, \pi/\varepsilon, 2\pi/\varepsilon, \dots$
- $\varphi(t)$ é mínimo para $t = 0, \pi/2\varepsilon, 3\pi/2\varepsilon, \dots$
- $\psi(t)$ é máximo para $t = 0, \pi/2\varepsilon, 3\pi/2\varepsilon, \dots$

TAREFA 7

Simule o sistema de equações diferenciais lineares (4-3) adotando $a = 1m, g = 10 m/s^2$ e demais parâmetros e condições iniciais **em conformidade com os valores estabelecidos no tópico 7**. Mostre, com toda a clareza, que a transferência de oscilações é uma decorrência do fenômeno de batimento.

8. Bibliografia

- [1] Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*. Dover Publications, 2010.
- [2] Pars, L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heinemann, London, 1965.
- [3] Pérès, J., *Mécanique Générale*. Masson et C^{ie}, Éditeurs, Paris, 1962.
- [4] Wells, D.A., *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*. Shaum's Outline Series, 1967.