Lista Zero de Mecânica Quântica: 10/8/23

Revisão de Física Moderna - consulte notas no eDisciplinas

1. Sugestões de leitura: Cap. 4 do Tipler, itens 4.3 e 4.6. Cohen, Cap.I, itens A1, A2, B1 e B2 e Complementos A_1, B_1 e D_1. Eisberg, Fundamentos da Física Moderna, Cap. 6 e 7 itens 1, 2 e 3. Caruso e Oguri, Física Moderna, Cap. 14 (IFSC 539C329f).

2. Um elétron é acelerado do repouso por uma diferença de potencial V (em volts). Mostre que seu comprimento de onda (de De Broglie) em nanometros é dado por $\lambda = 1.226/\sqrt{V}$. Considere o regime não relativístico em que $eV << mc^2$. Para qual potencial V o comprimento de onda se torna da ordem de um espaçamento cristalino?

3. Há uma correspondência entre a intensidade I da radiação e o número de fótons detectados no experimento da dupla fenta. Considere um fluxo uniforme de N fótons de frequência ν por unidade de área, por segundo. Cada fóton tem momento linear $p = h\nu/c$ (certo?). Mostre que a pressão exercida numa superfície plana de área A é dada por $P = Nh\nu/c$. Para isso contabilize o número de fótons que são absorvidos em A num intervalo de tempo Δt, e divida a variação de momento total por Δt, obtendo assim a força exercida em A. Divida por A e terá a pressão. Mas no eletromagnetismo de Maxwell foi determinado que $P = I/c$. Comparando, vem que $I = Nh\nu$, assim estabelecendo a conexão entre a formulação ondulatória da luz (que usa I) com a corpuscular (que usa N).

4. Faça um resumo das idéias que levaram à criação de uma grandeza ondulatória, $\psi(x,t)$, interpretada como amplitude de probabilidade. Mencione o experimento de dupla fenda, para fótons e para elétrons, a hipótese de de Broglie, e a interpretação de Max Born. Sugiro a leitura do Cap. 6 do livro do Eisberg, Fundamentos da Física Moderna. Como revisão de tópicos, sugiro o Cap. 4 do Tipler, itens 4.3 e 4.6.

5. Considere a passagem de elétrons com comprimento de onda (de De Broglie) λ por uma dupla fenda separada pela distância d. Digamos que eu determine por qual fenda ele passou. Isso significa que a incerteza em sua posição (ao longo do plano das duas fendas) no ato de passagem é $\Delta x < d/2$. Determine a incerteza em seu momento linear (também ao longo do plano das duas fendas). Mostre que essa incerteza acarreta numa incerteza quanto à posição que esse elétron irá ter ao ser detectado num anteparo logo à frente. Dessa maneira, o padrão de interferência não aparecerá. Em outras palavras, devido à incerteza acarretada pela observação de por qual fenda ele passou, elétrons são detectados mesmo

nas posições correspondentes aos mínimos do padrão de interferência e difração: se ele tinha "intenção" de ir para um máximo, a observação na fenda o "chuta" incontrolavelmente para outro lugar no anteparo!

6. Na procura pela equação diferencial para a função de onda $\psi(x,t)$ de uma partícula livre de massa m, e velocidade v, poderíamos ter tentado a da eletrodinâmica:
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)\ .$$
Como você sabe, a solução dessa equação é da forma $\psi(x,t) = f(\xi)$, com $\xi = kx - \omega t$ e $f(\xi)$ uma função qualquer (diferenciável). Mostre, por simples substituição, que essa não é a equação procurada na Mecânica Quântica, pois ela implica em $\omega = kv$ e portanto $E = pv$ A relação correta é $E = p^2/2m \to \hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$. Lembre-se, por Planck, $E = \hbar\omega$, enquanto por De Broglie, $p = \hbar k$.

7. A solução geral da equação da eletrodinâmica, escrita acima, é da forma $f(kx - \omega t)$, sendo f uma função diferenciável qualquer. Por exemplo, $\cos(kx - \omega t)$, ou $\sin(kx - \omega t)$. Verifique que não é o caso da Eq. de Schrödinger, isto é, nem toda função da forma $f(kx - \omega t)$ é solução. Teste $\cos(kx - \omega t)$, ou $\sin(kx - \omega t)$ e verifique que de fato não são. No entanto, $e^{i(\pm kx - \omega t)}$, como sabemos, são!

8. Resolva a Eq. de Schrödinger para uma partícula (massa m) submetida ao potencial constante V_0. Mostre que uma solução particular é do tipo $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$, desde que a seguinte relação for obedecida: $\hbar\omega = (\hbar k)^2/2m + V_0$. Veja que essa relação implica em $E = p^2/2m + V_0$, exatamente a relação que temos que ter para uma partícula livre! Indício que a equação que o Schrödinger postulou deve ser a correta!

9. As funções $e^{i(kx-\omega t)}$ e $e^{i(-kx-\omega t)}$, soluções da Eq. de Schrödinger, descrevem ondas planas caminhando em direções opostas (certifique-se de entender isso). Como essa equação é linear, a soma dessas soluções, isto é, $2e^{-i\omega t}\cos kx$, também é solução. Verifique. A subtração também é solução. Verifique. Escreva as densidades de probabilidade para essas soluções. São elas estacionárias?
Na verdade, qualquer combinação linear de soluções, tipo $\Psi(x,t) = \sum_i A_i e^{i(k_i x - \omega_i t)}$, também é solução desde que $\hbar^2 k_i^2/2m = \hbar\omega_i$. Prove isso.

10. Uma partícula de massa m está confinada numa região unidimensional de largura L. Grosseiramente, qual a incerteza em sua posição, dado o seu caracter ondulatório? Isso implica em quais incertezas em seu momento linear e em sua energia?

11. Para se ter um ideia de quando fenômenos quânticos são relevantes, use os resultados do item anterior para as incertezas nas seguintes situações:

(a) uma massa $m \approx 10^{-6}$ grama e $L \approx 10^{-3}$ mm.

(b) Um elétron confinado numa largura da ordem do tamanho de um átomo, isto é, $L \approx 1\mathring{A}$.

(c) Em qual dessas situações o carácter ondulatório é relevante?

12. Vamos estimar o raio, a_0, e a energia, E_1, do estado fundamental do hidrogênio. Tome para a incerteza na posição uma variável a. Considere que o valor do momento linear seja da ordem de sua incerteza Δp, que por Heisenberg deve ser da ordem de $\hbar/a$. Coloque isso tudo na expressão da energia do elétron, $E = p^2/2m - e^2/r$. Minimize-a com relação ao parâmetro a e você obterá $a_0 = \hbar^2/me^2$ e $E_1 = -me^4/2\hbar^2$, resultados conhecidos do formalismo de Bohr. Veja, isso é apenas uma estimativa; o fato de ter dado exatamente igual é apenas uma felicidade.

13. Utilizando procedimento análogo ao do item anterior, estime a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico quântico, de frequência natural ω. O resultado não é zero; classicamente seria.

14. Um próton está confinado entre duas paredes rígidas separadas pela distância L. Ele se move livremente e de forma unidimensional. Sua função de onda é estacionária (a justificativa disso virá no Cap. 6) com nós nas paredes, tal qual uma corda presa nas extremidades. Mostre que os comprimentos de onda permitidos são dados por $\lambda_n = 2L/n$, com n = 1, 2, 3, ...Qual a expressão para a energia (cinética) desse próton? Esse é um exemplo em que a condição de contorno (nós nas paredes) leva à quantização da energia. Qual a ordem de grandeza do estado de menor energia (fundamental) se L for da ordem do diâmetro de um núcleo atômico?

15. A função de onda de um elétron sob potencial do oscilador harmônico é $\psi(x,t) = Ae^{-\alpha x^2}e^{-i\omega t}$, sendo α uma constante real positiva, ω a frequência natural de oscilação e A uma constante em geral complexa. Esse elétron pode ser encontrado em qualquer posição, desde $-\infty$ até $+\infty$. Escreva a densidade de probabilidade de se achar esse elétron (note que ela independe do tempo, daí essa função de onda levar o nome de estacionária). Determine a constante de normalização A (lembre-se, em algum lugar esse elétron deve estar !). Resp.: $A = (2\alpha/\pi)^{1/4}$. Por que podemos adotar A real?