4300326 - Introdução à Física de Plasmas e Fusão Nuclear

Ministrado por

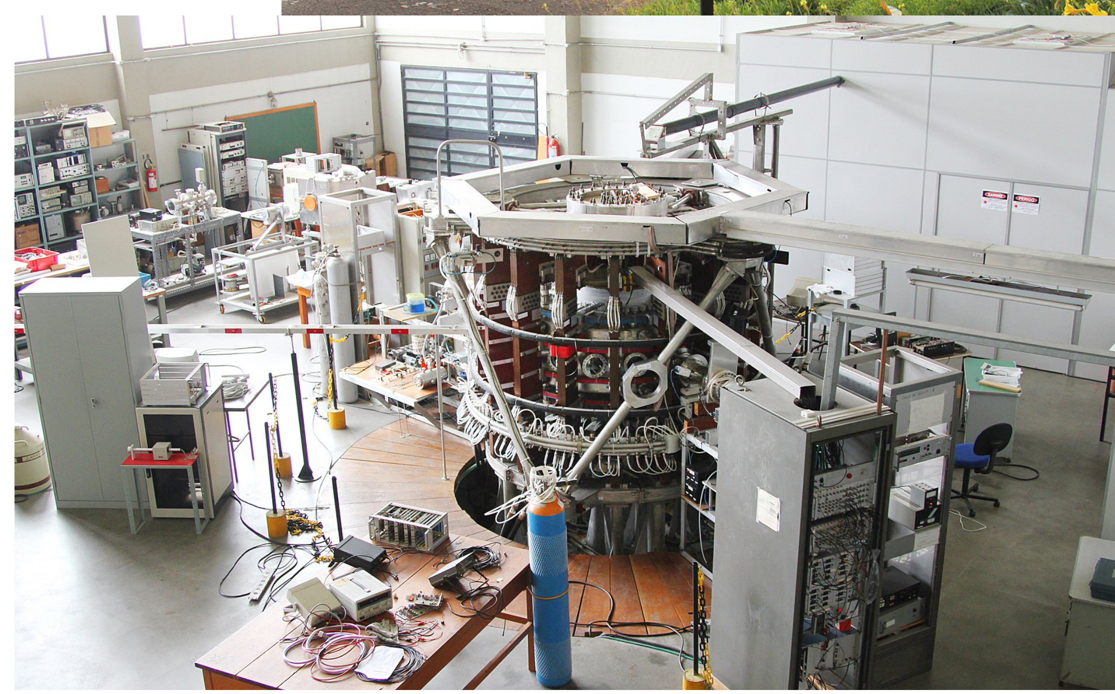
Prof. Gustavo Paganini Canal

Laboratório de Física de Plasmas

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física

Universidade de São Paulo



Curso de graduação oferecido pelo

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

IFUSP
Instituto de Física da USP

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 09 de agosto de 2023

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Introdução*
  - *Campo elétrico estático e uniforme*
  - *Campo magnético estático e uniforme*
  - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Introdução*
  - *Campo elétrico estático e uniforme*
  - *Campo magnético estático e uniforme*
  - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria relativística de órbitas de partículas: introdução

- **Conhecer a trajetória de partículas carregadas em campos EMs é importante, pois nos dá informação sobre a física de alguns processos dinâmicos**

- **Aqui, estamos interessados no movimento de partículas carregadas na presença de campos elétricos ($\mathbf{E}$) e magnéticos ($\mathbf{B}$) em função de $\mathbf{r}$ e t**
  - Portanto, os campos não são afetados pelas partículas carregadas

- **A equação relativística de movimento para uma partícula carregada sob a ação da força de Lorentz devido aos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ é**

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

  - Aqui, $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ é o momento relativístico da partícula, onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

    q e m_0 são a carga e a massa de repouso da partícula, respectivamente

    $c = 2.99 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo

A teoria clássica/não-relativística de órbitas de partículas: introdução

- **Em muitas situações de interesse prático, o termo $v^2/c^2 \ll 1$**
  - Nessas situações, $\gamma \approx 1$ e $m = \gamma m_0 \approx m_0$ pode ser considerada constante

- **Efeitos relativísticos são importantes apenas para partículas de alta energia**
  - Um próton de 1 MeV tem $v = 1.4 \times 10^7$ m/s, ou seja, $v^2/c^2 = 0.002 \ll 1$
  - Aqui, efeitos radiativos, que são efeitos relativísticos, serão desprezados

- **Nessas situações, a equação de movimento se reduz à**

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- **Se a velocidade obtida com esta equação não satisfizer a condição $v^2/c^2 \ll 1$, então a equação relativística do movimento deve ser usada em seu lugar**

A teoria clássica de órbitas de partículas: introdução

- **Vamos considerar a energia cinética da partícula:**

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

- **Usando a equação de movimento, esta equação torna-se**

$$\frac{dW}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{v} = q\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\right) + \cancel{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\right)$$

- **Da equação acima, conclui-se que**
  - Qualquer mudança na energia cinética da partícula se dá apenas pela presença de campos elétricos
  - Campos magnéticos não realizam trabalho sobre partículas carregadas, ou seja, a energia cinética da partícula se conserva quando há apenas um campo magnético

A teoria de órbitas de partículas: um modelo de primeiros princípios

- **Equações de movimento de uma carga (de tipo j) em um campo EM:**

$$\frac{d\mathbf{r_j}}{dt} = \mathbf{v_j}$$

$$m_j \frac{d\mathbf{v_j}}{dt} = \mathbf{F_j} = q_j \left(\mathbf{E} + \mathbf{v_j} \times \mathbf{B} \right)$$

- **Equações de Maxwell:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- **Relações constitutivas**

$$\rho = \rho_{ext} + \rho_{plasma} = \rho_{ext} + \sum_j q_j \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r_j}(t)] \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E_{ext}} + \mathbf{E_{plasma}}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J_{ext}} + \mathbf{J_{plasma}} = \mathbf{J_{ext}} + \sum_j q_j \mathbf{v_j}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r_j}(t)] \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B_{ext}} + \mathbf{B_{plasma}}$$

A teoria de órbitas de partículas: um modelo de primeiros princípios

- **A teoria da órbitas de partículas é um modelo auto-consistente bem definido para descrever plasmas, no entanto, este modelo tem limitações na prática**
  - O grande número de partículas (~10^{20} m^{-3}) torna esse modelo inviável
  - A quantidade informação nesse model é desnecessariamente grande:

(# de partículas) x (3 posições) x (3 velocidades) x (# de passos temporais)

- **Para simplificar esse modelo, a resposta/reação das partículas aos campos EM das outras partículas é desprezada ($\mathbf{E}_{\mathbf{ext}} \gg \mathbf{E}_{\mathbf{plasma}}$ and $\mathbf{B}_{\mathbf{ext}} \gg \mathbf{B}_{\mathbf{plasma}}$)**
  - A trajetória da partícula carregada é, portanto, determinada SOMENTE pelos campos EM aplicados externamente
  - Este modelo despreza efeitos coletivos (não é adequado para plasmas)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{ext}} + \cancel{\mathbf{E}_{\mathbf{plasma}}} \qquad \frac{d\mathbf{r_j}}{dt} = \mathbf{v_j}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathbf{ext}} + \cancel{\mathbf{B}_{\mathbf{plasma}}} \qquad m_j \frac{d\mathbf{v_j}}{dt} = q_j \left(\mathbf{E}_{\mathbf{ext}} + \mathbf{v_j} \times \mathbf{B}_{\mathbf{ext}} \right)$$

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Introdução*
  - *Campo elétrico estático e uniforme*
  - *Campo magnético estático e uniforme*
  - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria de órbitas de partículas: campo elétrico estático e uniforme

- **Partículas carregadas em campos EMs aplicados externamente estão sujeitas à força de Lorentz**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}\right)$$

- **No caso em que $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E_0}$ é estático e uniforme, temos que**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E_0}$$

- **A solução desta equação é obtida por integração direta**

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt = \int_0^t \frac{q}{m}\mathbf{E_0}\,dt \quad \rightarrow \quad \int_{\mathbf{v}(0)}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E_0}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{q}{m}\mathbf{E_0}\,t$$

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_0^t \mathbf{v}(0)\,dt + \frac{q}{m}\mathbf{E_0}\int_0^t t\,dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{q}{2m}\mathbf{E_0}\,t^2$$

(Movimento Uniformemente Acelerado)

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Introdução*
  - *Campo elétrico estático e uniforme*
  - *Campo magnético estático e uniforme*
  - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

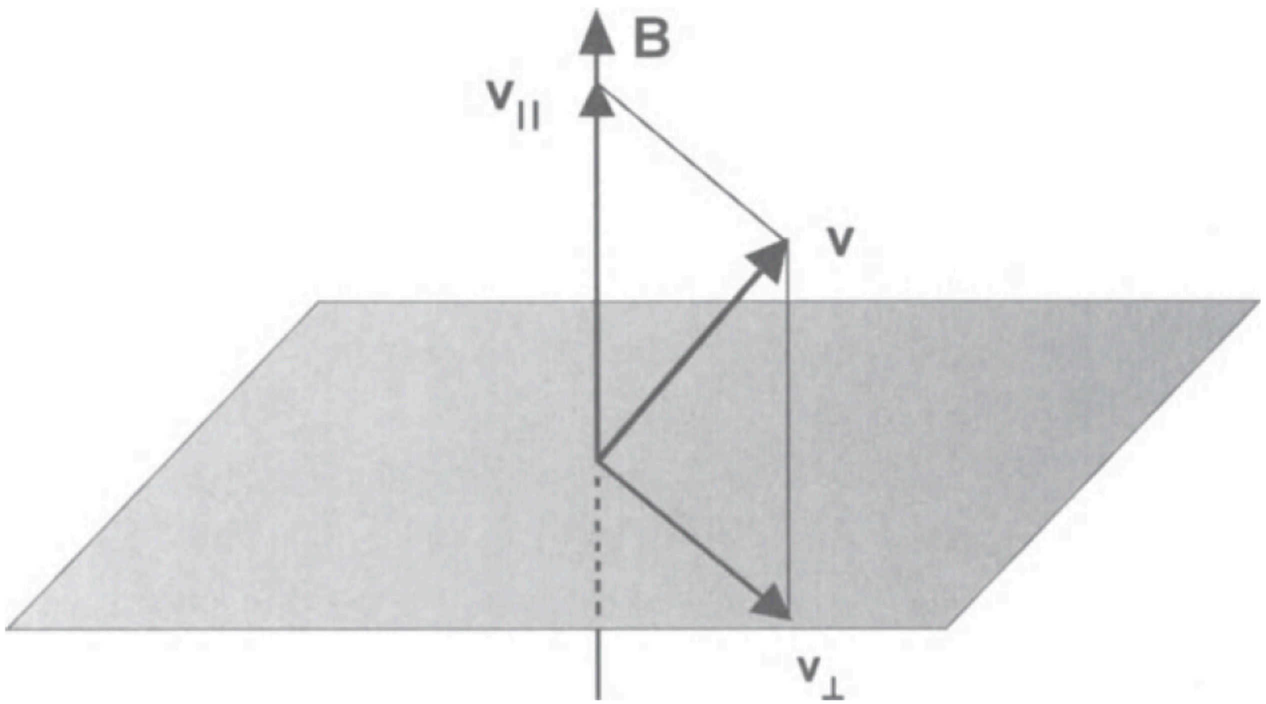
- **No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B_0}$ é estático e uniforme, temos que**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B_0}$$

- **Decompondo $\mathbf{v}$ em suas componentes paralela e perpendicular:** $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}$

$$\frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B_0}$$

(O termo $\mathbf{v}_{||} \times \mathbf{B_0} = 0$, pois $\mathbf{v}_{||} \parallel \mathbf{B_0}$)



As direções paralela e perpendicular são sempre definidas com relação a $\mathbf{B_0}$

A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

- **No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B_0}$ é estático e uniforme, temos que**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B_0}$$

- **Decompondo $\mathbf{v}$ em suas componentes paralela e perpendicular:** $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}$

$$\frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B_0}$$

(O termo $\mathbf{v}_{||} \times \mathbf{B_0} = 0$, pois $\mathbf{v}_{||} \parallel \mathbf{B_0}$)

  - Na direção paralela: movimento retilíneo uniforme

$$\frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{||} = \mathbf{v_0}$$

  - Na direção perpendicular: movimento ciclotrônico

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B_0}$$

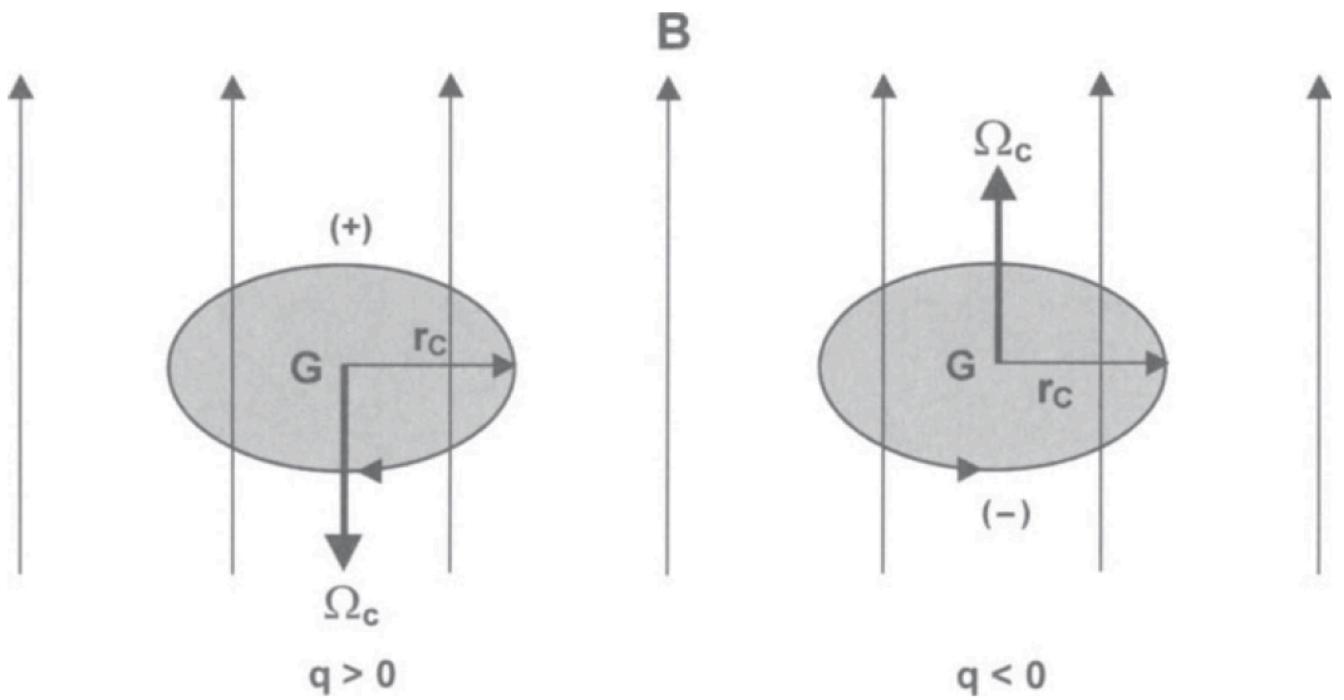
  - Definindo $\mathbf{\Omega_c} = -\frac{q}{m}\mathbf{B_0}$, a equação de movimento torna-se: $\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \mathbf{\Omega_c} \times \mathbf{v}_{\perp}$

A frequência ciclotrônica (frequência de giro ou girofrequência)

- **A quantidade $\mathbf{\Omega_c} = -\dfrac{q}{m}\mathbf{B_0}$ é chamada de frequência ciclotrônica, frequência de giro ou de girofrequência**

(Equação de movimento)

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \mathbf{\Omega_c} \times \mathbf{v}_\perp$$



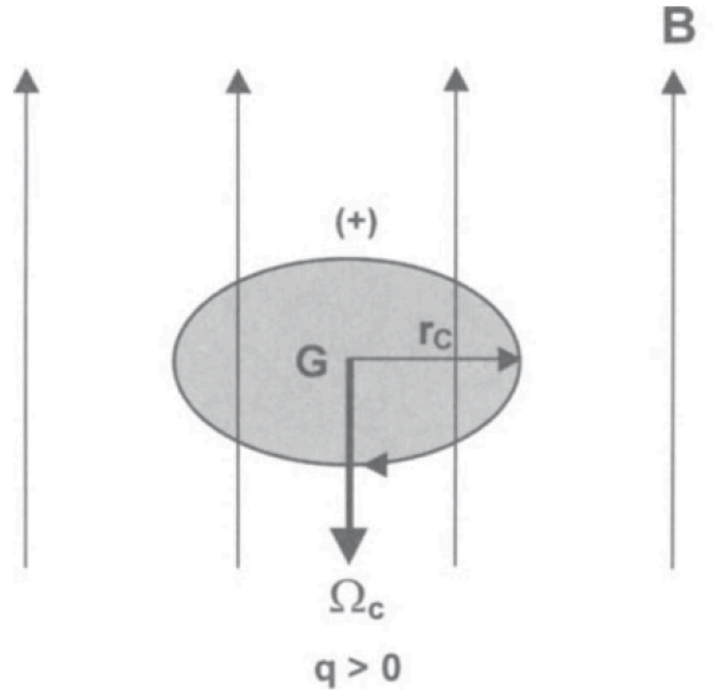
- **A direção de $\mathbf{\Omega_c}$ é definida como a direção que gera um efeito diamagnético**
  - $\mathbf{\Omega_c}$ é oposto ao $\mathbf{B_0}$ para uma carga positiva (q > 0), e esta move-se de modo a produzir um campo magnético oposto ao $\mathbf{B_0}$ (efeito diamagnético)
  - $\mathbf{\Omega_c}$ aponta na direção de $\mathbf{B_0}$ para uma carga negativa (q < 0), e esta também se move de modo a produzir um campo magnético oposto ao $\mathbf{B_0}$
  - Note que $\mathbf{\Omega_c}$ sempre aponta na direção do momento angular da partícula

O raio de Larmor (ou raio de giro)

- **Como $\boldsymbol{\Omega}_c$ é constante, e a energia cinética se conserva, $|\mathbf{v}_\perp|$ também é constante, e a equação de movimento implica que**
  - A aceleração da partícula é constante em magnitude
  - Sua direção é perpendicular tanto à $\mathbf{v}_\perp$ quanto $\mathbf{B_0}$

- **Portanto, a equação de movimento pode ser integrada diretamente**

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{c} \times \mathbf{v}_\perp = \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{c} \times \frac{d\mathbf{r}_\mathbf{c}}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_\perp(t) = \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{c} \times \mathbf{r}_\mathbf{c}(t)$$



G é o centro de giro ou centro guia

  - Aqui, $\mathbf{r_c}$ é um vetor posição da partícula, medido com relação à um dado ponto (G - na figura)
  - O vetor $\mathbf{r_c}$ gira num plano perpendicular ao $\mathbf{B_0}$
  - Como $|\mathbf{v}_\perp|$ é constante, $|\mathbf{r_c}|$ também é constante

- **O vetor $\mathbf{r_c}$ é chamado de raio de Larmor ou raio de giro**

Movimento ciclotrônico em coordenadas cartesianas

- **Vamos supor que o campo magnético $\mathbf{B_0} = B_0\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$. Portanto, $\mathbf{v}_\parallel = \mathrm{v}_{0,\parallel}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$ e**

$$\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B_0} = B_0(v_y\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} - v_x\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y}) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(v_x\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} + v_y\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y}\right) = \frac{qB_0}{m}(v_y\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x} - v_x\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{y})$$

- Decompondo nas direções x e y:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB_0}{m}v_y = \Omega_c v_y \qquad \text{e} \qquad \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB_0}{m}v_x = -\Omega_c v_x$$

- Tomando a derivada temporal da equação x e substituindo na equação y:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \Omega_c^2 v_x = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = v_{0,\perp}\sin(\omega_c t + \theta_0)$$

- Substituindo esse expressão para v_x na equação y, temos

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \Omega_c^2 v_y = 0 \quad \rightarrow \quad v_y = v_{0,\perp}\cos(\omega_c t + \theta_0)$$

Movimento ciclotrônico em coordenadas cartesianas

- **Integrando as equações de movimento, temos as equações da trajetória da partícula no campo magnético**

$$x(t) = X_0 - \frac{v_{0,\perp}}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t + \theta_0)$$

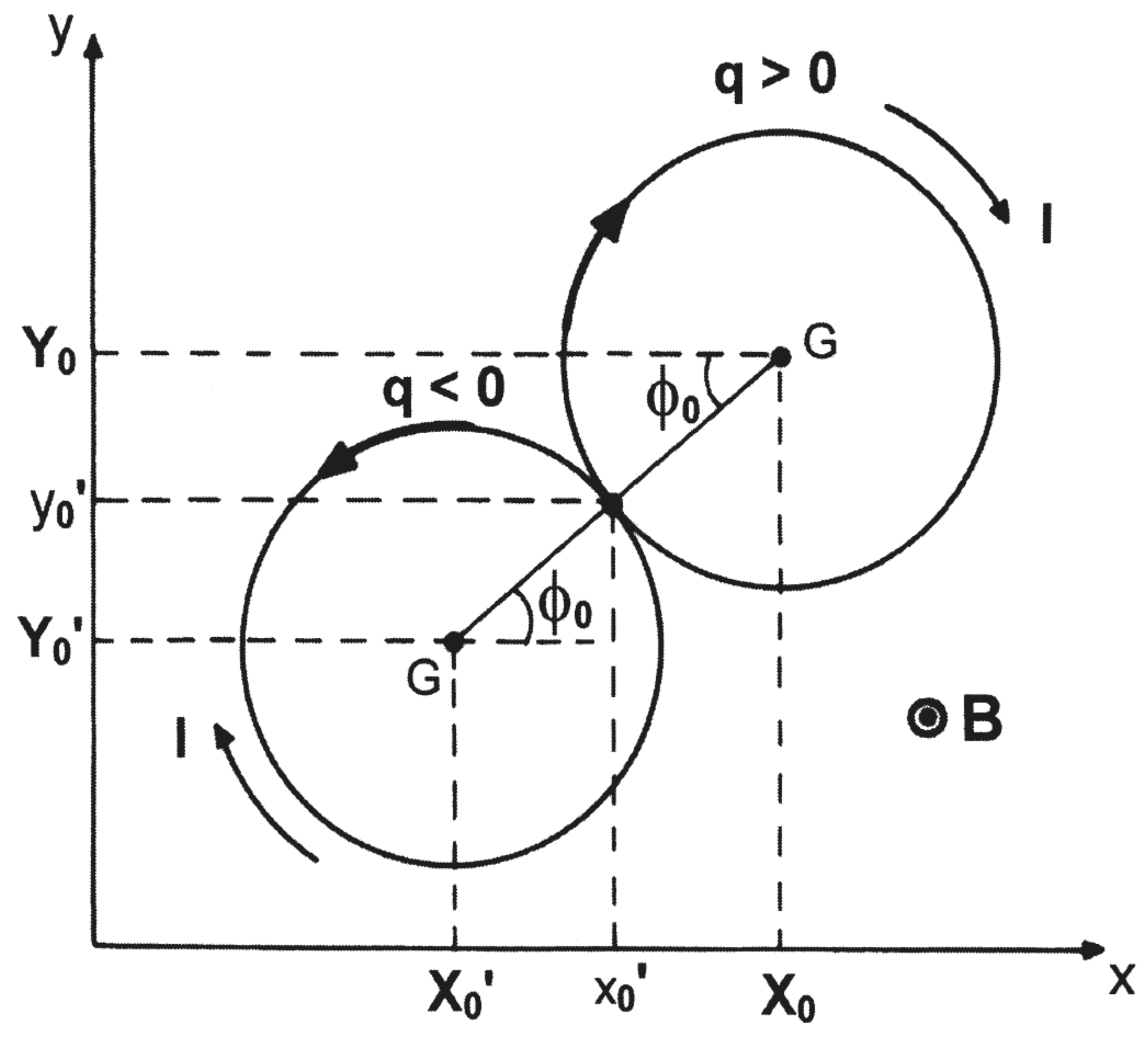
$$y(t) = Y_0 + \frac{v_{0,\perp}}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t + \theta_0)$$

$$z(t) = z_0 + \mathrm{v}_{0,\parallel} t$$

  - Note que

$$(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\Omega_c}\right)^2 = r_c^2$$

(Equação de um círculo de raio r_c com centro em X_0 e Y_0)



Frequência ciclotrônica e raio de Larmor: ordem de grandeza

- **Raio de Larmor:** $r_c = v_\perp/\Omega_c = \dfrac{m\mathrm{v}_\perp}{|q|B_0}$ Podemos estimar: $v_\perp \approx = v_{th} = \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}}$

- **Frequência ciclotrônica:** $\Omega_c = |q|B_0/m$
  - Eletrociclotrônica: $f_{\mathrm{ce}} = \Omega_{\mathrm{ce}}/2\pi = 28.0 \times \mathrm{B}_0$ (GHz)
  - Ionciclotrônica: $f_{\mathrm{ci}} = \Omega_{\mathrm{ci}}/2\pi = 15.2 \times \mathrm{B}_0$ (MHz)

- **Frequência ciclotrônica e raio de Larmor em plasmas**
  - Tokamaks ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg;\ B_0 = 1.5\ T;\ T = 1 \times 10^8\ K$)

$$f_{\mathrm{ce}} = 42\ GHz,\ f_{\mathrm{ci}} = 22.8\ MHz,\ r_{ce} = 0.15\ mm \text{ e } r_{ci} = 6.3\ mm$$

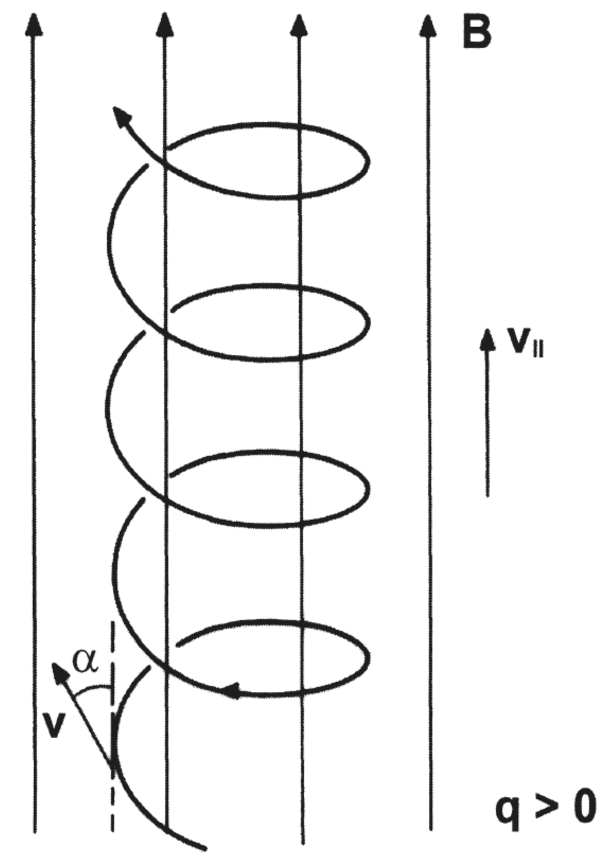
  - Coroa solar ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg;\ B_0 = 0.1\ T;\ T = 1 \times 10^6\ K$)

$$f_{\mathrm{ce}} = 2.8\ GHz,\ f_{\mathrm{ci}} = 1.5\ MHz,\ r_{ce} = 0.22\ mm \text{ e } r_{ci} = 9.5\ mm$$

- **Quando $r_{ce}, r_{ci} \ll L$ (dimensão do plasma), elétrons/ions estão "magnetizados"**

A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

- **A trajetória da partícula é dada pela superposição de um movimento retilíneo uniforme ao longo de $\mathbf{B}_0$ e um movimento ciclotrônico perpendicular a $\mathbf{B}_0$**
  - A trajetória da partícula descreve uma hélice



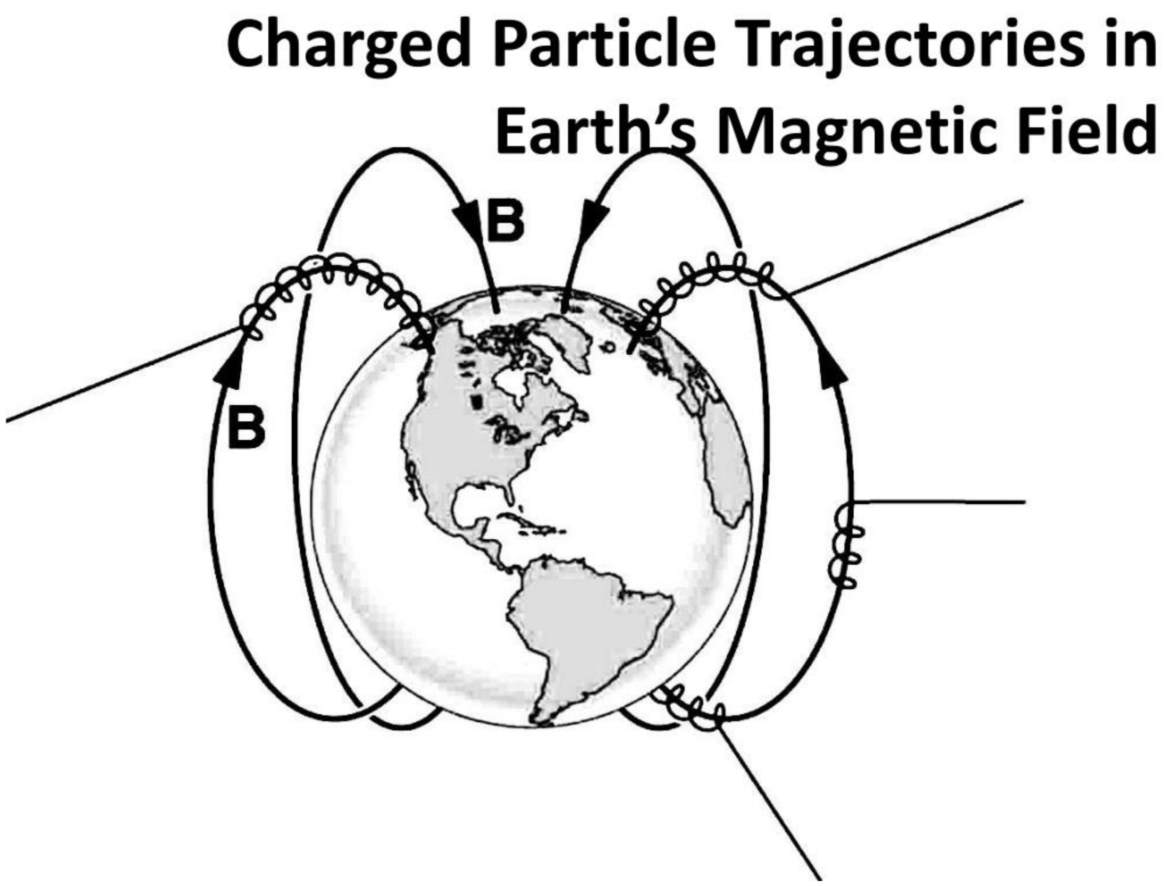
- **O ângulo entre $\mathbf{B}_0$ e a direção da velocidade da partícula é chamado de ângulo de inclinação (ou de ataque)**

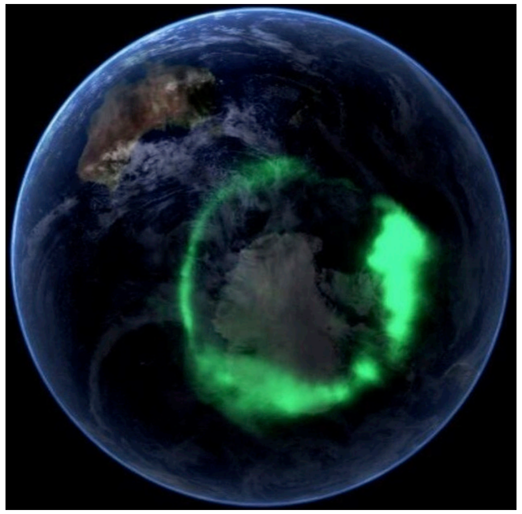
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{v_\perp}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_\perp}{v_\parallel}\right)$$

  - Aqui, $v = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2}$ é o módulo da velocidade $\mathbf{v}$
  - Quando $v_\parallel = 0$ e $v_\perp \neq 0$, temos $\alpha = \pi/2$ (Movimento circular/ciclotrônico)
  - Quando $v_\parallel \neq 0$ e $v_\perp = 0$, temos $\alpha = 0$ (Movimento Retilíneo Uniforme)

A teoria de órbitas de partículas é bem adequada para estudar a trajetória de partículas carregadas que entram na atmosfera da Terra

- **Partículas carregadas que chegam à atmosfera terrestre são direcionadas para os pólos pelo campo magnético terrestre**
  - A colisão dessas partículas carregadas com as moléculas do ar na atmosfera dão origem as auroras





Momento magnético associado ao movimento ciclotrônico

- **O momento magnético devido à uma corrente circular (I) é normal à área A**

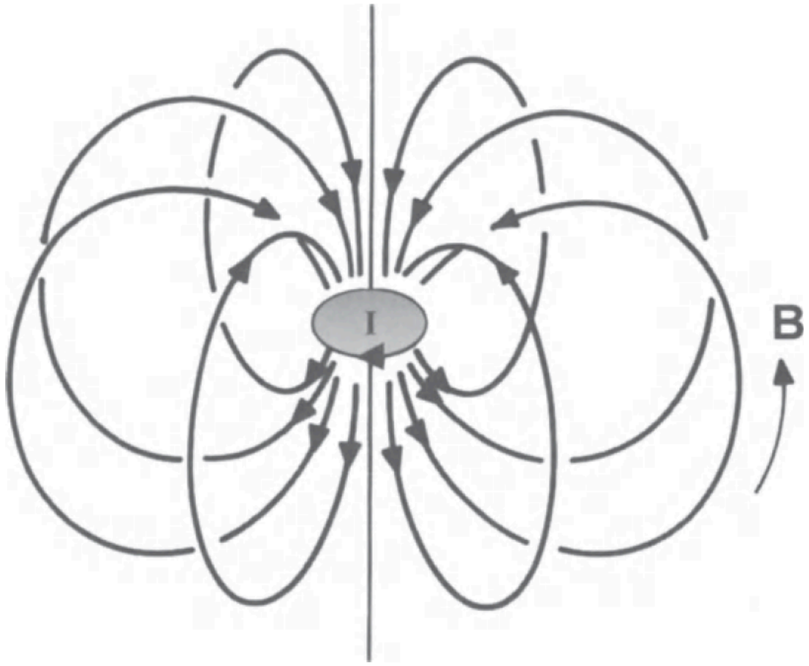
$$|\mathbf{m}| = I\,A$$

  - A corrente devido ao movimento ciclotrônico é

$$I = \frac{|q|}{T_c} = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi}$$

  - A área definida pelo movimento ciclotrônico é

$$A = \pi r_c^2$$



- **Portanto, o momento magnético é**

$$|\mathbf{m}| = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi}\pi r_c^2 = \frac{1}{2}|q|\Omega_c r_c^2 = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B_0} = \frac{W_\perp}{B_0}$$

- **Em notação vetorial, o momento magnético associado ao movimento ciclotrônico é**

$$\mathbf{m} = -\frac{W_\perp}{B_0^2}\mathbf{B_0}$$

Corrente de magnetização associada ao movimento ciclotrônico

- **A magnetização $\mathbf{M}$ devido ao movimento ciclotrônico de várias partículas é**

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\delta V}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{m_j} = \frac{N}{\delta V}\mathbf{m} = n\mathbf{m} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{M} = -\frac{nW_\perp}{B_0^2}\mathbf{B_0}$$

- **Do eletromagnetismo clássico, a corrente de magnetização é $\mathbf{J_M} = \nabla \times \mathbf{M}$ Escrevendo $\mathbf{J_{total}} = \mathbf{J} + \mathbf{J_M}$, onde $\mathbf{J}$ é a corrente devido ao movimento das cargas (sem ser o movimento ciclotrônico), a equação de Ampère-Maxwell torna-se**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \mathbf{J_M} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$, where $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

- **Uma relação simples entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ exist quando $\mathbf{M}$ é proporcional ao $\mathbf{B}$ ou ao $\mathbf{H}$**
  - Por exemplo, $\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$, onde χ_m é a susceptibilidade magnética do meio

- **Em um plasma, no entanto, $M \propto 1/B$ (não-linear). Portanto, não é conveniente modelar o plasma como sendo um meio magnético**

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Introdução*
  - *Campo elétrico estático e uniforme*
  - *Campo magnético estático e uniforme*
  - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

- **No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E_0}$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B_0}$ são estáticos e uniformes, temos que**

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E_0} + \mathbf{v} \times \mathbf{B_0}\right)$$

- **Decompondo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{E_0}$ em suas componentes paralela and perpendicular:**

$$m\frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} + m\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\left(\mathbf{E}_{\mathbf{0},||} + \mathbf{E}_{\mathbf{0},\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B_0}\right)$$

  - Direção paralela

$$m\frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} = q\mathbf{E}_{\mathbf{0},||} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{||}(0) + \frac{q}{m}\mathbf{E}_{\mathbf{0},||}\, t \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_{||}(t) = \mathbf{r}_{||}(0) + \mathbf{v}_{||}(0)t + \frac{q}{2m}\mathbf{E}_{\mathbf{0},||}\, t^2$$

  - Direção perpendicular

$$m\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\left(\mathbf{E}_{\mathbf{0},\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B_0}\right)$$

A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

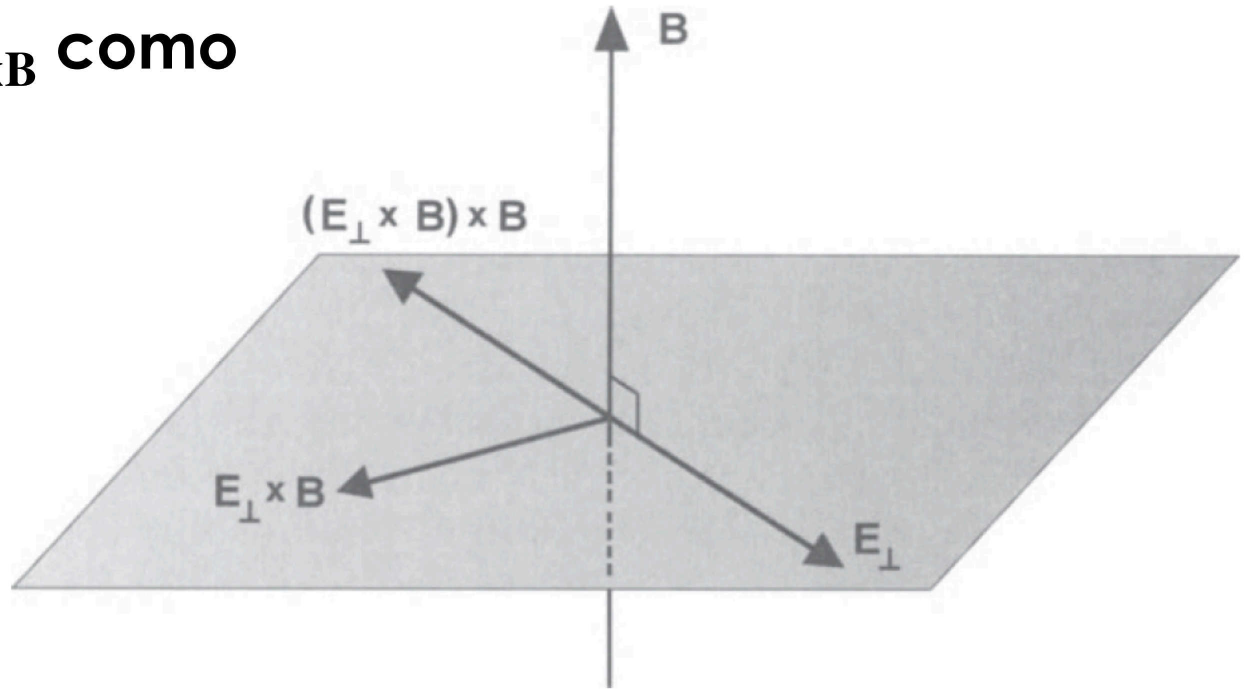
- **Para resolver a equação perpendicular, vamos fazer:** $\mathbf{v}_\perp(t) = \mathbf{v_c}(t) + \mathbf{v_{ExB}}$

(Troca de referencial)

$$m\frac{d\mathbf{v_c}}{dt} = q\left(\mathbf{E_{0,\perp}} + \mathbf{v_c}\times\mathbf{B_0} + \mathbf{v_{ExB}}\times\mathbf{B_0}\right)$$

- **Escolhendo a velocidade (constante)** $\mathbf{v_{ExB}}$ **como**

$$\mathbf{v_{ExB}} = \frac{\mathbf{E_{0,\perp}}\times\mathbf{B_0}}{B_0^2}$$



- **A equação de movimento torna-se**

$$\frac{d\mathbf{v_c}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v_c}\times\mathbf{B_0}$$

  - A solução dessa equação, novamente, fornece um movimento ciclotrônico:

$$\mathbf{v_c}(t) = \mathbf{\Omega_c}\times\mathbf{r_c}(t)$$

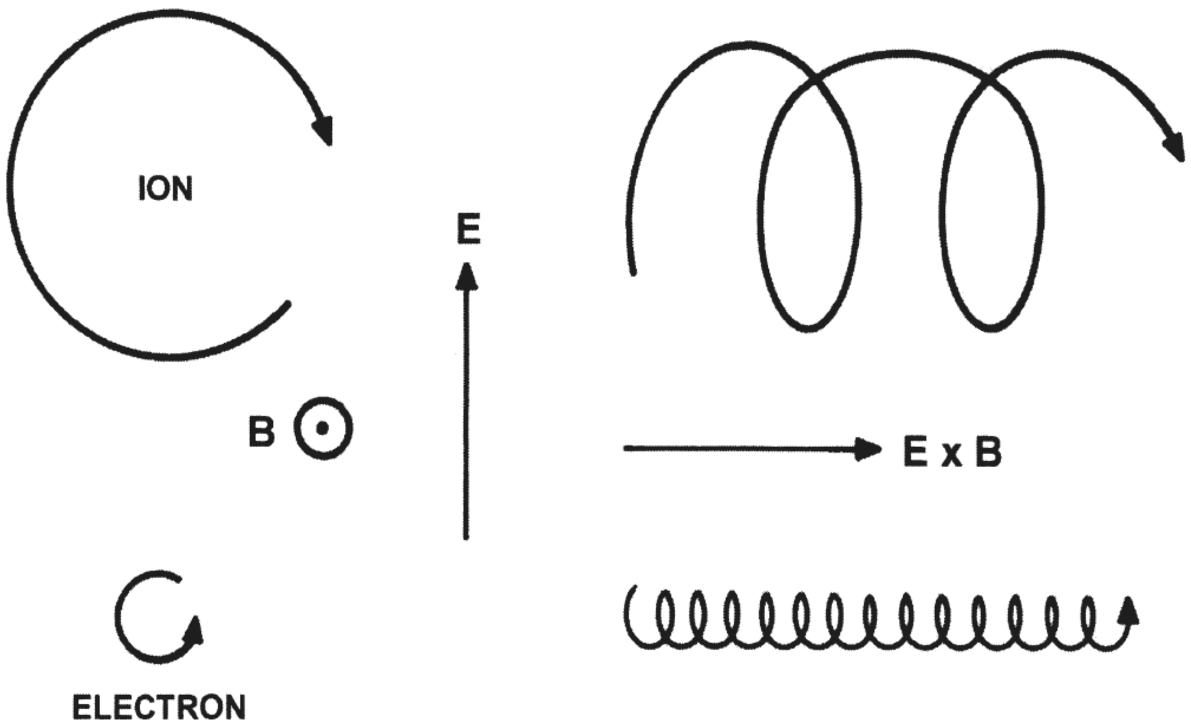
A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

- **Portanto, a solução desse problema é**

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\parallel}(t) + \mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{\mathbf{0},\parallel} + \frac{q\,\mathbf{E}_{\mathbf{0},\parallel}}{m}t + \mathbf{\Omega}_{\mathbf{c}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{ExB}}$$

- **A velocidade constante $\mathbf{v}_{\mathbf{ExB}} = \mathbf{E}_{\mathbf{0},\perp} \times \mathbf{B}_{\mathbf{0}}/B_0^2$ é chamada de deriva ExB**
  - Note que $\mathbf{v}_{\mathbf{ExB}}$ é independente da massa e da carga da partícula
  - Como $\mathbf{E}_{\mathbf{0},\parallel} \times \mathbf{B}_{\mathbf{0}} = 0$, podemos escrever $\mathbf{v}_{\mathbf{ExB}} = \mathbf{E}_{\mathbf{0}} \times \mathbf{B}_{\mathbf{0}}/B_0^2$

$$r_c = v_{\perp}/\Omega_c = \frac{m v_{\perp}}{|q|B_0}$$



A deriva devido à uma força de origem não-eletromagnética

- No caso em que, além de campos EMs, exista uma força $\mathbf{F}$ (de origem não-EM) atuando sobre a partícula, a equação de movimento torna-se

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E_0} + \mathbf{v} \times \mathbf{B_0}\right) + \mathbf{F}$$

- O efeito dessa força é análogo ao efeito de $\mathbf{E_0}$, ou seja, além de $\mathbf{v_{ExB}}$ teremos

$$\mathbf{v_F} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B_0}}{qB_0^2}$$

- No caso de haver um campo gravitacional uniforme ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$), essa deriva será

$$\mathbf{v_g} = \frac{m}{q}\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B_0}}{B_0^2}$$

- Associada à deriva gravitacional, existirá uma densidade de corrente elétrica:

$$\mathbf{J_g} = \frac{1}{\delta V}\sum_j q_j\,\mathbf{v_j} = \frac{1}{\delta V}\left(\sum_j m_j\right)\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B_0}}{B_0^2} = \rho_m\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B_0}}{B_0^2}$$

  - Essa corrente contribui para a formação do chamado Eletrojato Equatorial

Exercícios

- **O que acontece com a velocidade de deriva ExB quando o campo magnético tende a zero enquanto o campo elétrico permanece finito?**

- **Exercícios do F.F. Chen:**
  - *2.1, 2.2, 2.3, 2.6 e 2.7*

- **Exercícios do Bittencourt:**
  - *2.1, 2.2, 2.3 e 2.4*

Referências

- **F.F. Chen**
  - *Capítulo 2, seções 2.1 e 2.1*

- **Referência adicional**
  - *Bittencourt: Cap. 2*