

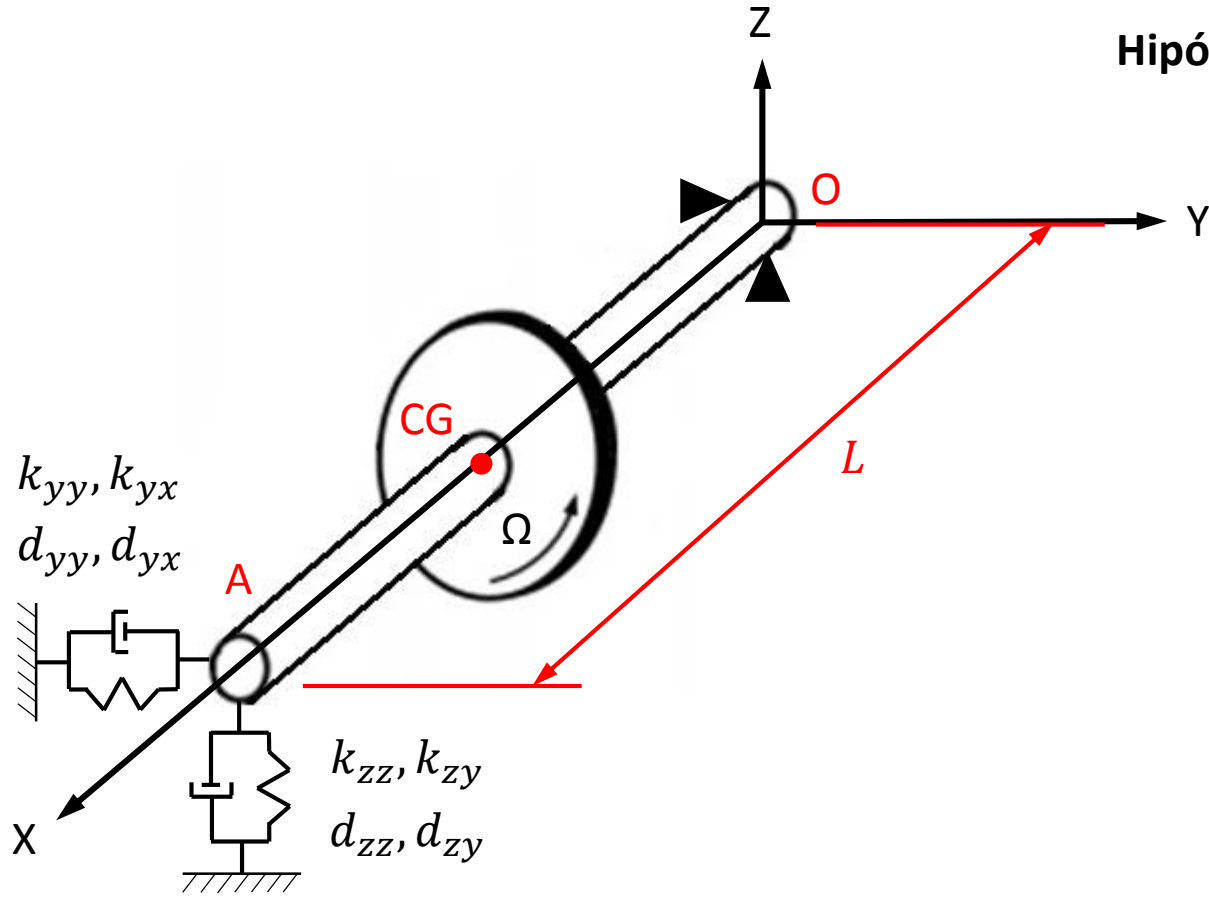
# SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

AULA 4 – Rotor sobre Mancal Anisotrópico e Análise de Estabilidade

Prof. Rodrigo Nicoletti



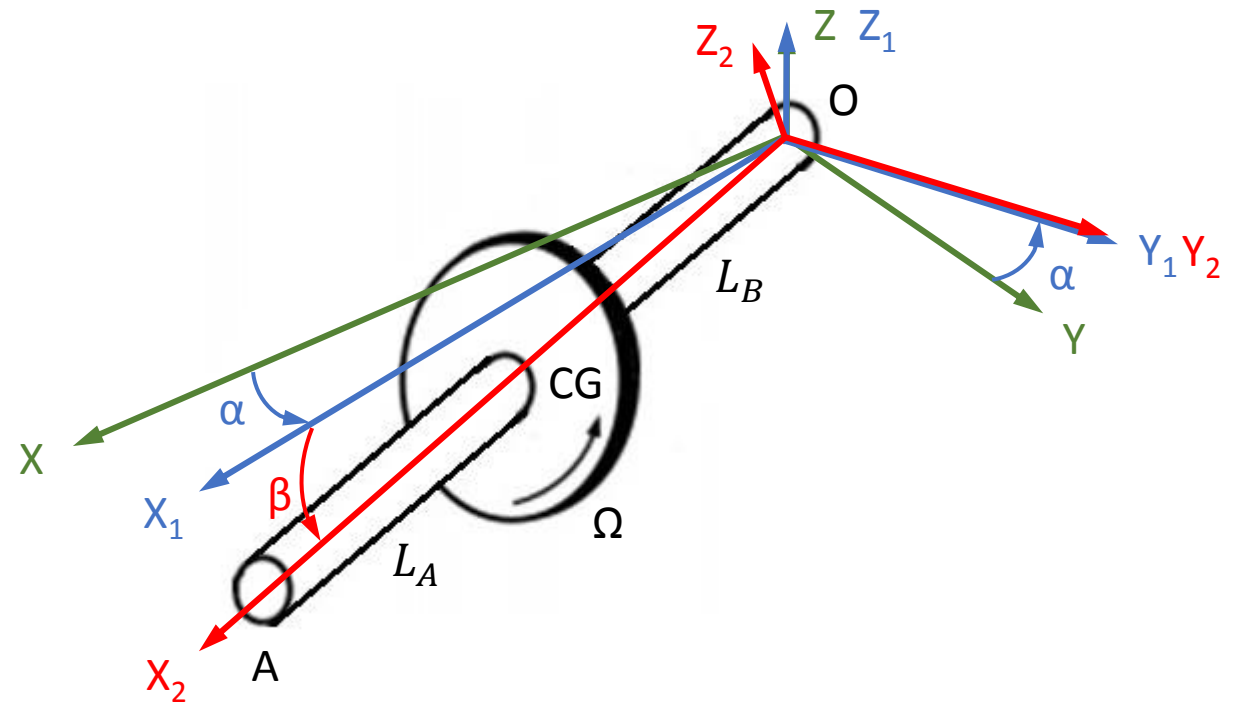
# Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Anisotrópicos



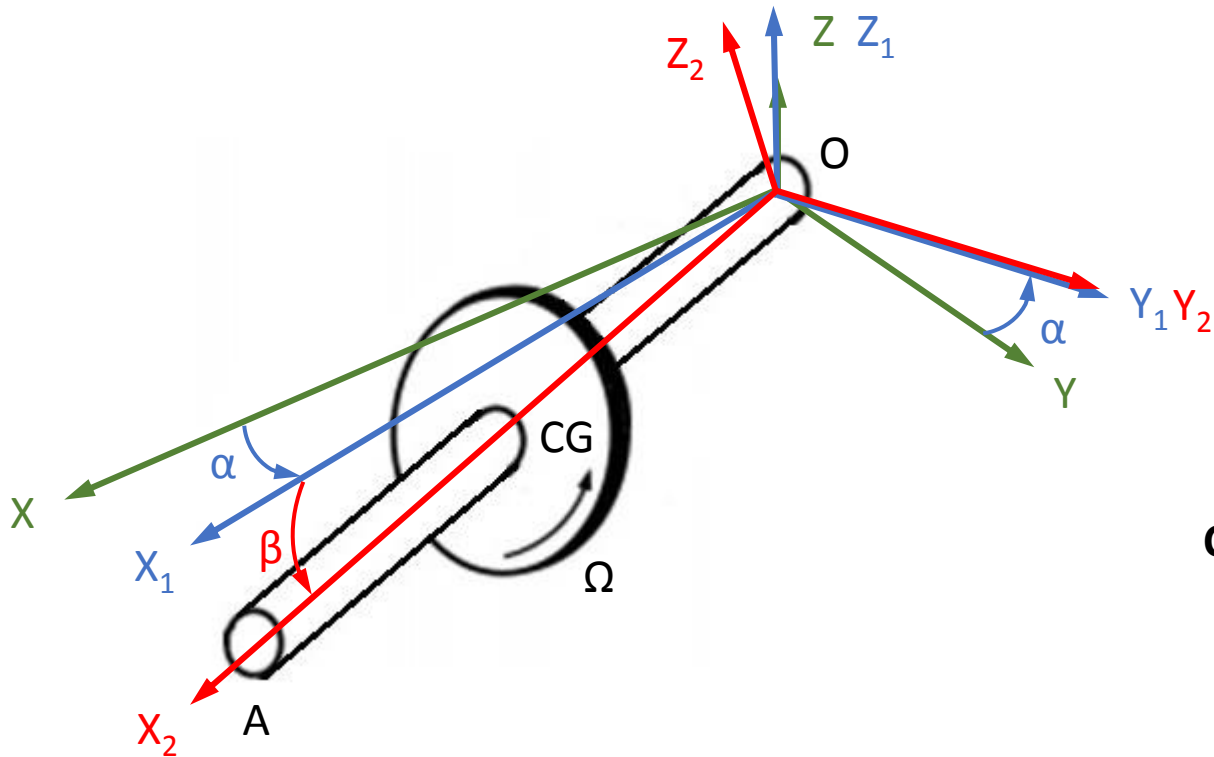
Hipóteses:

- rotor não centrado no eixo ( $L_A \neq L_B$ )
- eixo rígido
- CG do disco alinhado com centro do disco
- mancais anisotrópicos

$$K = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix}$$



# Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Anisotrópicos



Matrizes de Transformação:

$${}_{B1}\mathbf{v} = \mathbf{T}_\alpha {}_I\mathbf{v} \quad \text{onde:} \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{v} = \mathbf{T}_\beta {}_{B1}\mathbf{v} \quad \text{onde:} \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Conservação da Qtde. de Movimento Angular:

$$\frac{d}{dt} ({}_{B2}\mathbf{H}_O) + {}_{B2}\boldsymbol{\Omega}_2 \times {}_{B2}\mathbf{H}_O = \sum {}_{B2}\mathbf{M}_O$$

Vetor Qtde. de Movimento Angular em relação ao CG:

$${}_{B2}\mathbf{H}_O = {}_{B2}\mathbf{I}_O {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_R$$

*(tensor de inércia permanece constante na base B2)*

# Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Anisotrópicos

Então, o tensor de inércia:  ${}_{B2}I_O = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & I_t & \\ & & I_t \end{bmatrix} = cte.$

$I_p$  = momento de inércia polar em relação ao ponto O

$I_t$  = momento de inércia transversal em relação ao ponto O

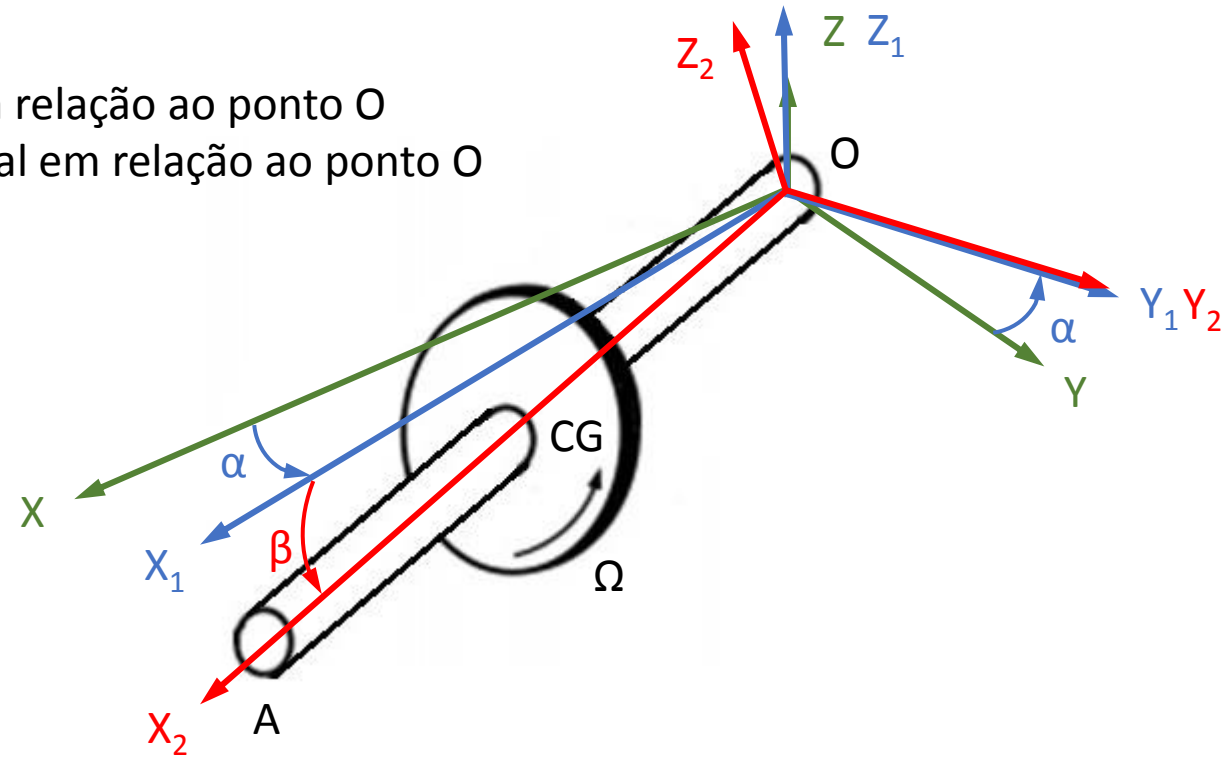
Velocidades Angulares:

$${}_I\dot{\alpha} = {}_{B1}\dot{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad {}_{B1}\dot{\beta} = {}_{B2}\dot{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_{B2}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A velocidade angular do rotor:

$${}_{B2}\omega_R = \underbrace{{}_{B2}\dot{\alpha}}_{{}^T_{\beta B1}\dot{\alpha}} + {}_{B2}\dot{\beta} + {}_{B2}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \Omega - \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}$$

Velocidade Angular da Base B2:  ${}_{B2}\Omega_2 = {}_{B2}\dot{\alpha} + {}_{B2}\dot{\beta} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}$



# Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Anisotrópicos

Portanto:

$${}_{B2}\mathbf{H}_O = \begin{Bmatrix} I_p \Omega - I_p \dot{\alpha} \sin \beta \\ I_t \dot{\beta} \\ I_t \dot{\alpha} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Conservação da Qtde. de Movimento Angular

$$\frac{d}{dt} ({}_{B2}\mathbf{H}_O) + {}_{B2}\boldsymbol{\Omega}_2 \times {}_{B2}\mathbf{H}_O = \sum {}_{B2}\mathbf{M}_O$$

Somatório de Momentos em relação ao ponto O:

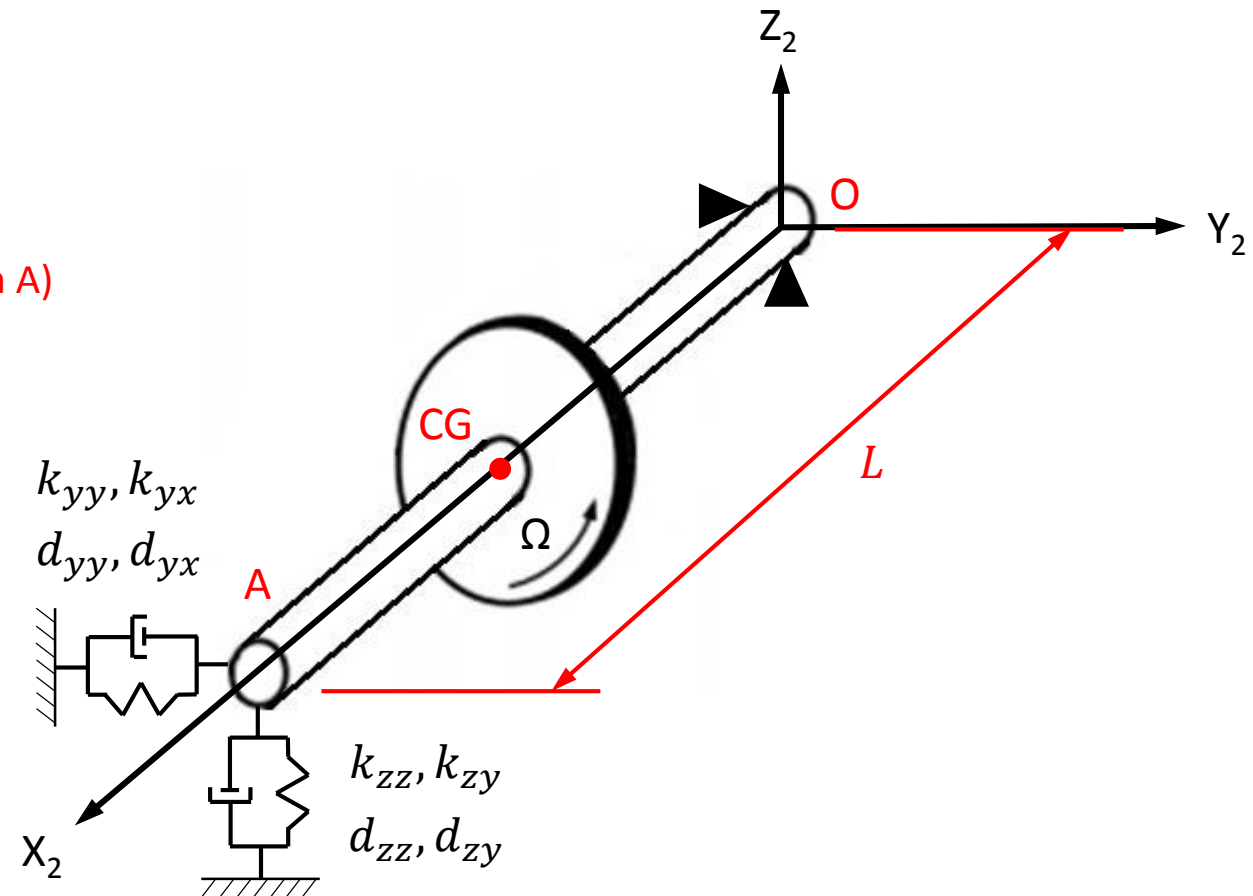
$$\sum {}_{B2}\mathbf{M}_O = {}_{B2}\mathbf{r}_A \times {}_{B2}\mathbf{f}_A$$

Onde:  ${}_I\mathbf{f}_A = -\mathbf{K} {}_I\mathbf{r}_A - \mathbf{D} {}_I\mathbf{v}_A$  (forças no mancal em A)

Vetor posição do ponto A:

$${}_{B2}\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I\mathbf{r}_A = \mathbf{T}_\alpha^T \mathbf{T}_\beta^T {}_{B2}\mathbf{r}_A = \begin{Bmatrix} L \cos \alpha \cos \beta \\ L \sin \alpha \cos \beta \\ -L \sin \beta \end{Bmatrix}$$



# Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Anisotrópicos

**Vetor velocidade do ponto A:**  ${}_I \mathbf{v}_A = \frac{d}{dt} ({}_I \mathbf{r}_A) = \left\{ \begin{array}{l} -L\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - L\dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \\ L\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - L\dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta \\ -L\dot{\beta} \cos \beta \end{array} \right\}$

Portanto, substituindo na equação de Conservação da Qtde. de Movimento Angular e linearizando:

$$\begin{array}{l} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \\ \theta \dot{\theta} \approx 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_t \ddot{\alpha} + d_{yy} L^2 \dot{\alpha} - d_{yz} L^2 \dot{\beta} - \Omega I_p \dot{\beta} + k_{yy} L^2 \alpha - k_{yz} L^2 \beta = 0 \\ I_t \ddot{\beta} + d_{zz} L^2 \dot{\beta} - d_{zy} L^2 \dot{\alpha} + \Omega I_p \dot{\alpha} + k_{zz} L^2 \beta - k_{zy} L^2 \alpha = 0 \end{array} \right.$$

*Equações Linearizadas*

Matricialmente, temos:

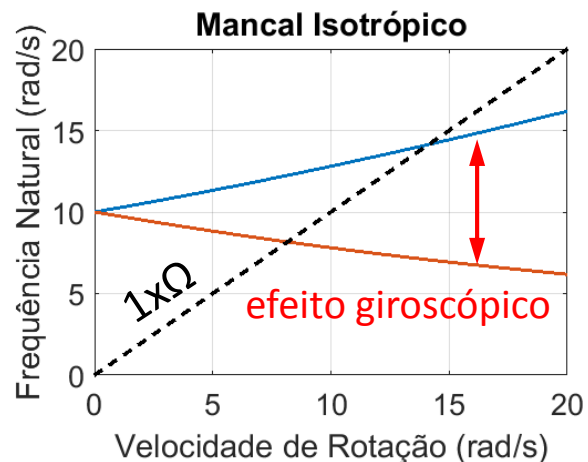
$$\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \left( L^2 \begin{bmatrix} d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + L^2 \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Diagramas de Campbell

$$(L = 1 \text{ m}, I_t = 1 \text{ kg.m}^2, I_p = 0,5 I_t)$$

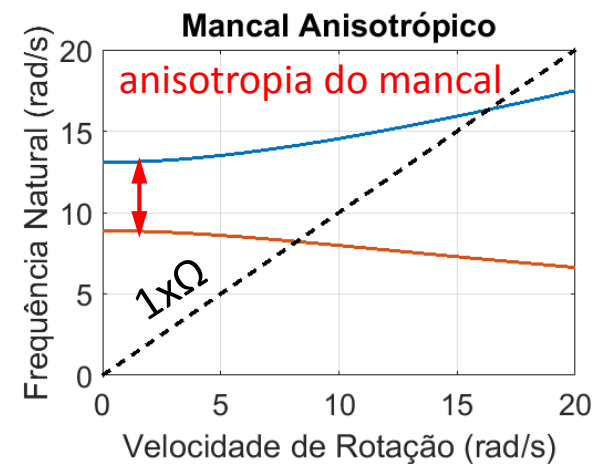
$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



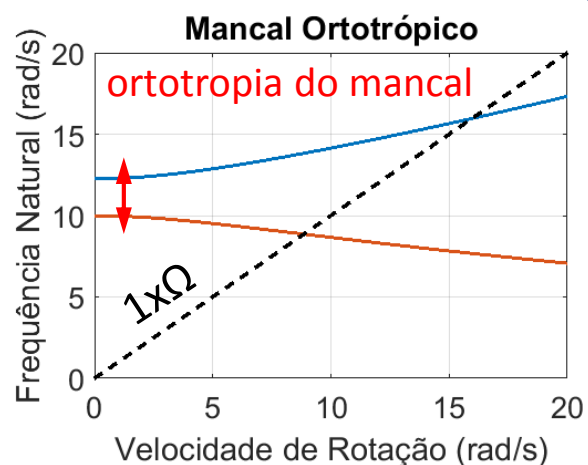
$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 30 & 150 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



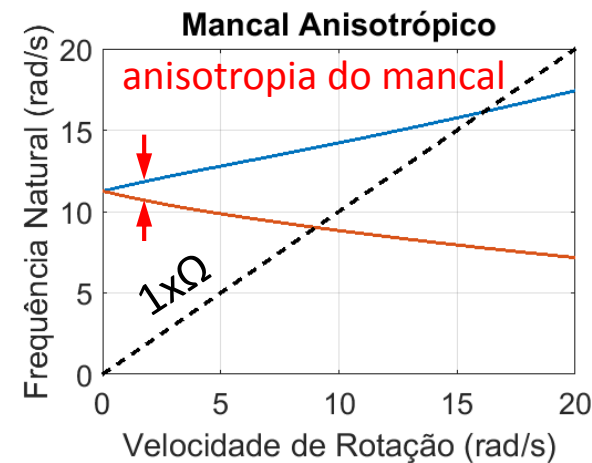
$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

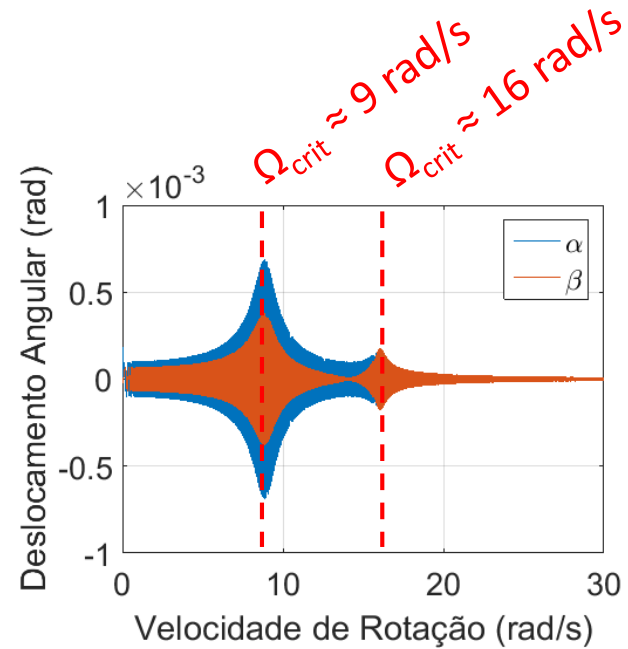
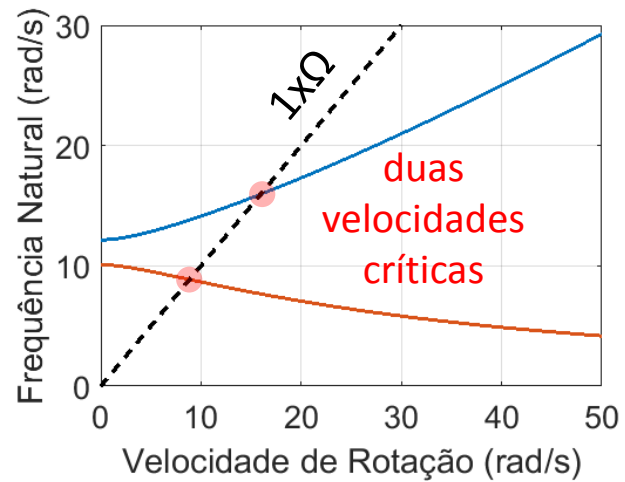
$$K = \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ -30 & 150 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



# Resposta ao Desbalanço $(L = 1 \text{ m}, I_t = 1 \text{ kg.m}^2, I_p = 0,5 I_t)$

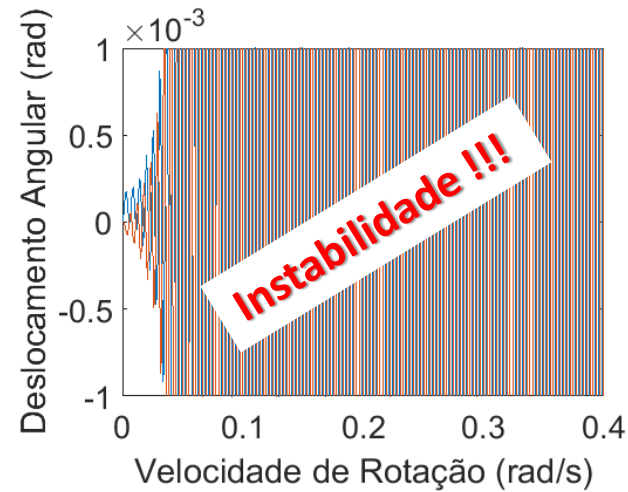
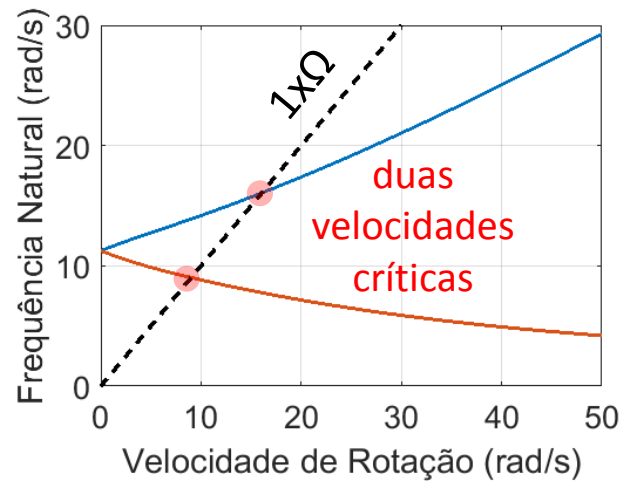
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ 40 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$



Será que dá pra determinar?

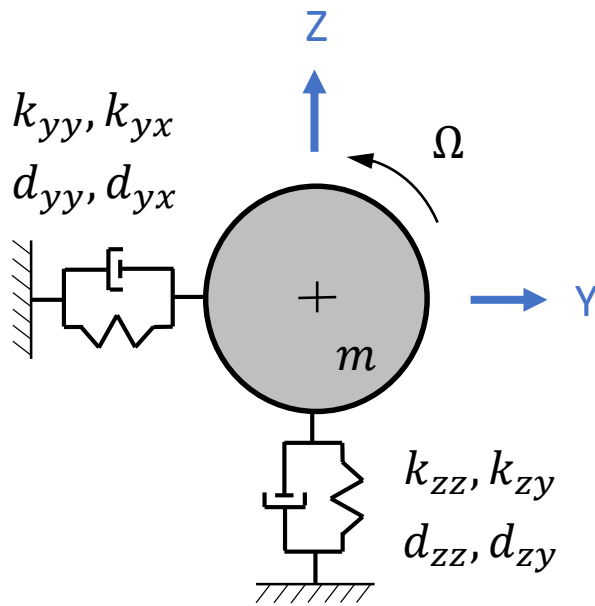




# Análise de Estabilidade

LUND, J.W., *Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings*,  
*Journal of Tribology* 109(1), pp.37-41, 1987

Suponha um rotor suportado por mancal anisotrópico:



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

Tomando-se solução da forma:  $\mathbf{s} = \mathbf{S}e^{\lambda t}$

Tem-se:  $(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{S} = \mathbf{0}$

Para solução não trivial:  $\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}) = 0$

# Análise de Estabilidade

Para solução não trivial:  $\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}) = 0$



(polinômio característico)

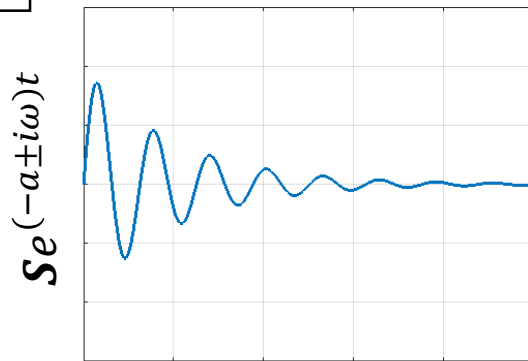
$$(m^2)\lambda^4 + (d_{yy}m + d_{zz}m)\lambda^3 + (d_{yy}d_{zz} - d_{yz}d_{zy} + k_{yy}m + k_{zz}m)\lambda^2 + (k_{yy}d_{zz} + k_{zz}d_{yy} - k_{yz}d_{zy} - k_{zy}d_{yz})\lambda + (k_{yy}k_{zz} - k_{yz}k_{zy}) = 0$$

Polinômio de 4ª ordem cuja solução tem a forma:

$$\lambda = a \pm i\omega$$

(autovalores do sistema)

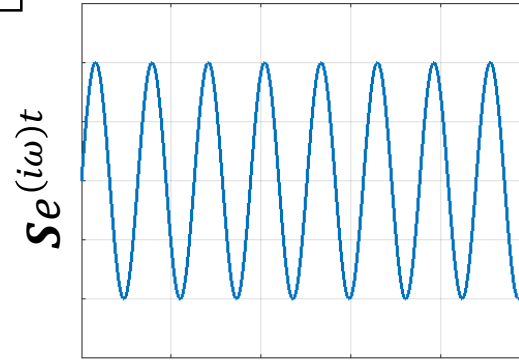
$$a < 0$$



Tempo

*movimento estável*

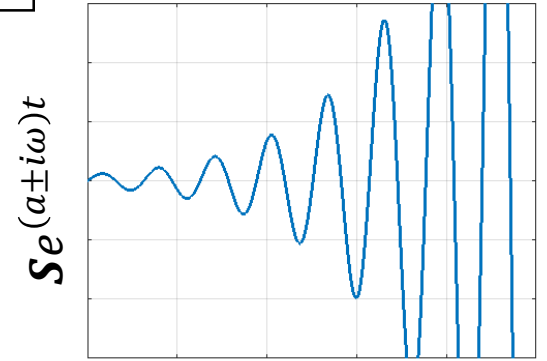
$$a = 0$$



Tempo

*movimento marginalmente estável*

$$a > 0$$



Tempo

*movimento instável*

# Análise de Estabilidade

Portanto, no **limite de estabilidade**:  $a = 0 \Rightarrow \lambda = i\omega$

Substituindo-se no polinômio característico, chega-se a:  $f(\omega) + i g(\omega) = 0$

$$\text{Assim: } \begin{cases} f(\omega) = 0 & (1) \\ g(\omega) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), tem-se:

$$m\omega^2 = \frac{k_{yy}d_{zz} + k_{zz}d_{yy} - k_{yz}d_{zy} - k_{zy}d_{yz}}{d_{yy} + d_{zz}} \equiv k_c$$

Substituindo em (1):

$$\omega^2 = \frac{(k_{yy} - k_c)(k_{zz} - k_c) - k_{yz}k_{zy}}{d_{yy}d_{zz} - d_{yz}d_{zy}} \equiv \Omega_c^2$$

**Limite de Estabilidade**  
(velocidade em que  
ocorre a instabilidade)

## Observação:

- válido somente para rotores rígidos sem efeito giroscópico !!!!
- mas permite ter uma ideia do nível de estabilidade do sistema

## Rotor de Laval

$$k_{yy} = k_{zz} = k$$

$$d_{yy} = d_{zz} = d$$

$$k_{yz} = k_{zy} = d_{yz} = d_{zy} = 0$$

$$k_c = k \Rightarrow \Omega_c^2 = 0$$

Não tem limite de estabilidade !!!

## Rotor sobre Mancal Órtotropico

$$k_{yy} = k_y$$

$$k_{zz} = k_z$$

$$d_{yy} = d_{zz} = d$$

$$k_{yz} = k_{zy} = d_{yz} = d_{zy} = 0$$

$$k_c = \frac{k_y + k_z}{2} \Rightarrow \Omega_c^2 = \frac{-(k_y - k_z)^2}{4d^2} < 0$$

Não tem limite de estabilidade !!!

# Análise de Estabilidade

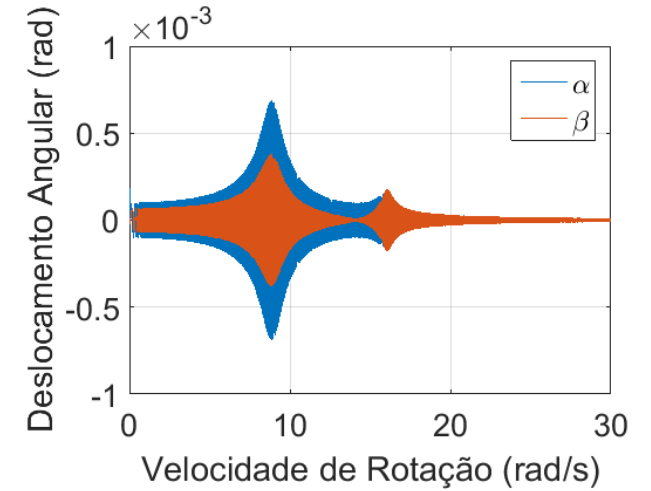
## Rotor sobre Mancal Anisotrópico

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$k_c = 125 \Rightarrow \Omega_c^2 = -525 < 0$$

**Não tem limite de estabilidade !!!**

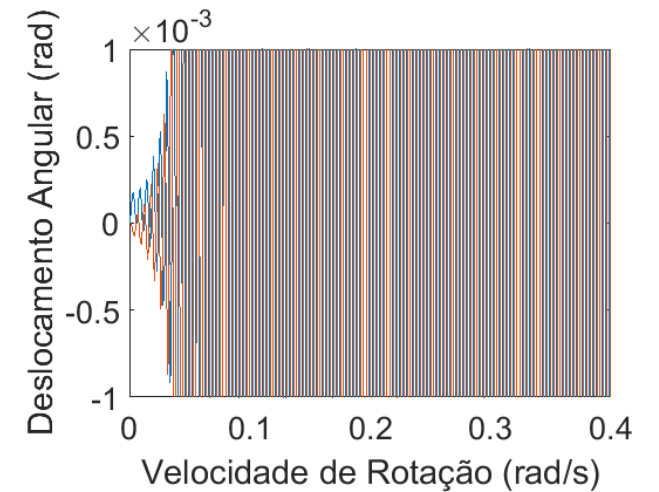


$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ 40 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$k_c = 125 \Rightarrow \Omega_c^2 = 975 > 0$$

**Possui limite de estabilidade !!!**



# Análise de Estabilidade

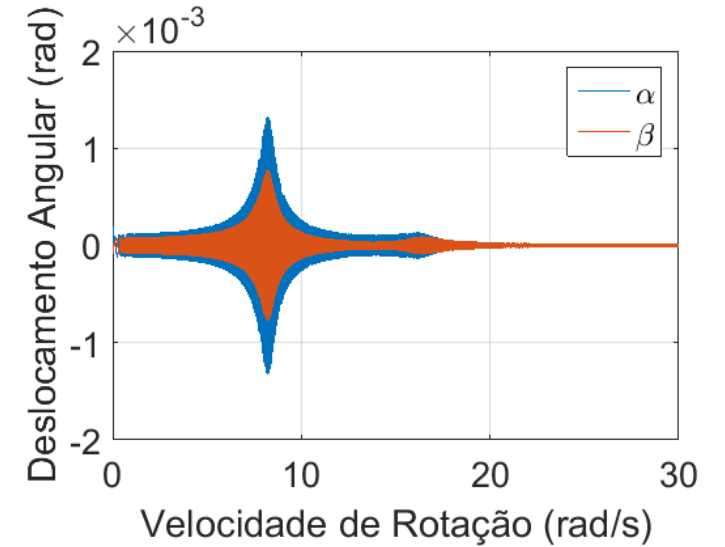
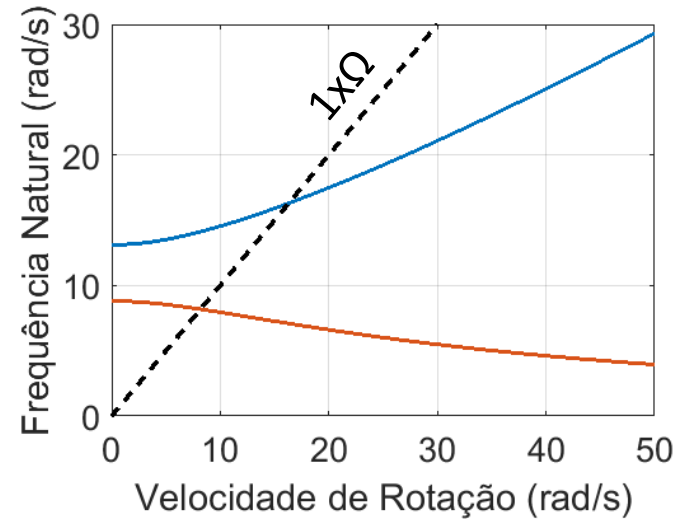
## Rotor sobre Mancal Anisotrópico

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 40 \\ 40 & 100 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$k_c = 125 \Rightarrow \Omega_c^2 = -2225 < 0$$

**Não tem limite de estabilidade !!!**

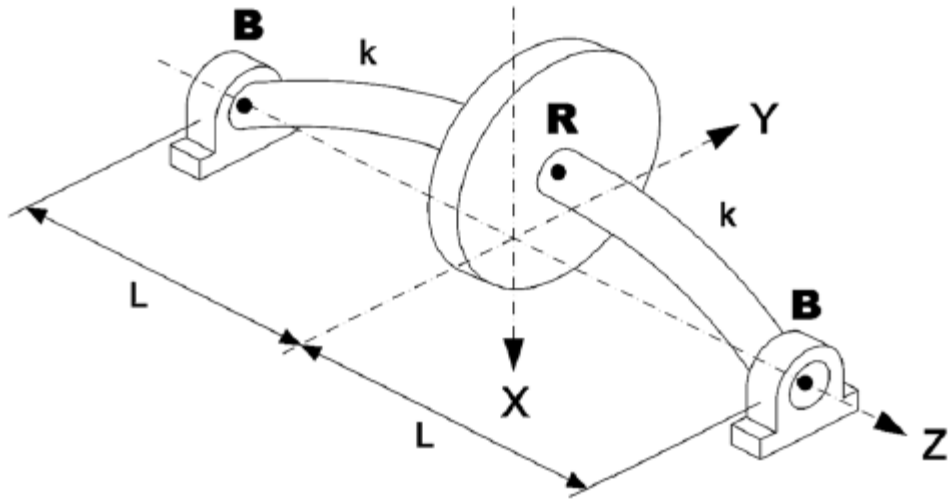


Portanto:

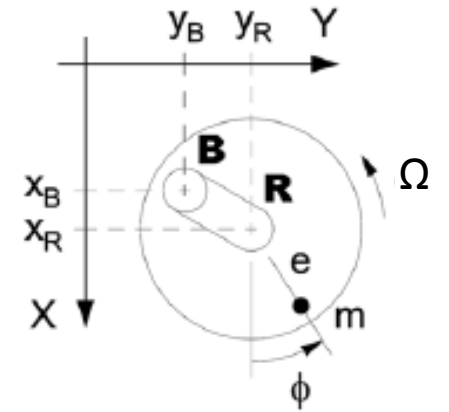
- Anisotropia pode causar instabilidade
- Instabilidade está relacionada aos coeficientes cruzados

# Exemplo

NICOLETTI, R., *Optimization of Journal Bearing Profile for Higher Dynamic Stability Limits*,  
*Journal of Tribology* 135(1), p.011702, 2013



- Eixo flexível
- Rigidez do eixo  $k$  (isotrópico)
- Mancais anisotrópicos
- Disco se movimenta no plano X-Y



Equações de movimento do sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_R + 2k(x_R - x_B) = me\Omega^2 \cos \phi \\ m\ddot{y}_R + 2k(y_R - y_B) = me\Omega^2 \sin \phi \\ d_{xx}\dot{x}_B + d_{xy}\dot{y}_B + k_{xx}x_B + k_{xy}y_B + k(x_B - x_R) = 0 \\ d_{yx}\dot{x}_B + d_{yy}\dot{y}_B + k_{yx}x_B + k_{yy}y_B + k(y_B - y_R) = 0 \end{cases}$$

# Exemplo

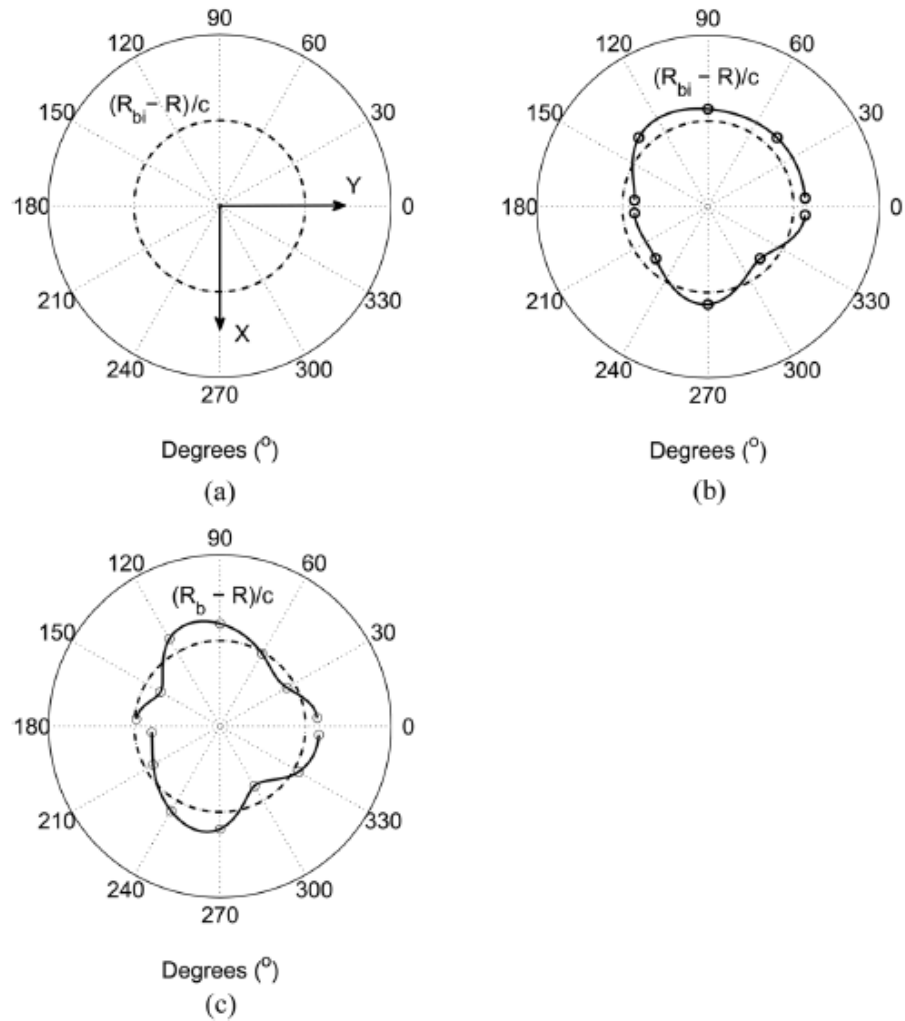


Fig. 14 Shape of the optimized bearings in comparison to the original journal bearing shape (best results): (a) reference frame; (b) 10 points/S = 1.0; (c) 14 points/S = 2.0.

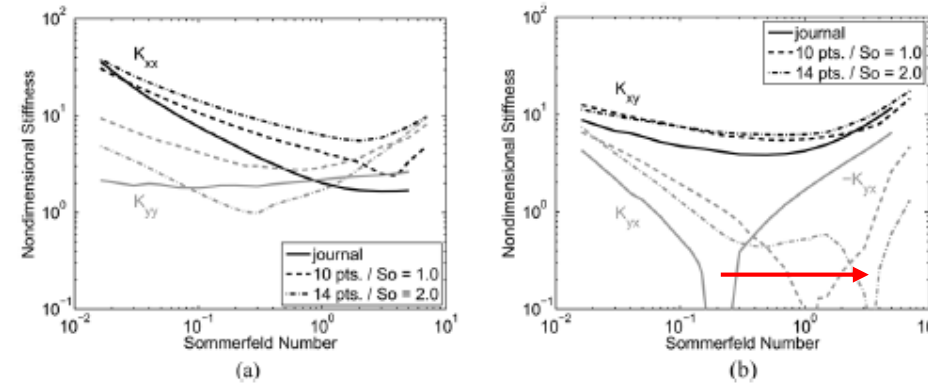


Fig. 17 Stiffness coefficients of the optimized bearings in comparison to those of the journal bearing: (a) direct coefficients; (b) cross-coupling coefficients

Coeficientes cruzados trocam de sinal em velocidades mais altas !!!

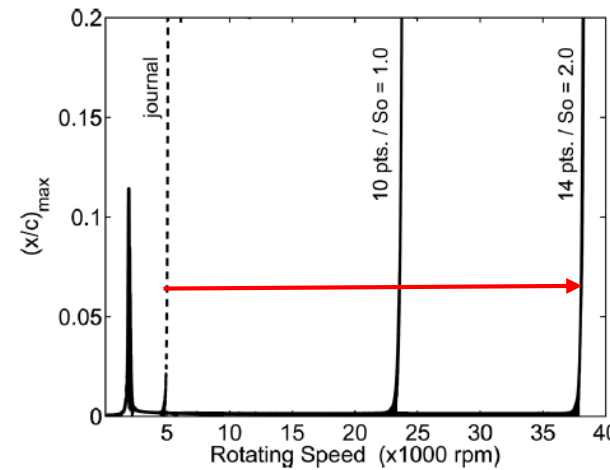


Fig. 16 Maximum amplitude of the unbalance response of the rotor-bearing system during run-up with conventional and optimized bearings

Limite de estabilidade ocorre em velocidades mais altas !!!



# Conclusão

## Anisotropia dos mancais

- altera o comportamento do sistema (*move as curvas no Diagrama de Campbell*)
- pode causar **instabilidade dinâmica**
- instabilidade está associada aos **coeficientes cruzados negativos** ou **muito grandes**

## Análise de estabilidade

- permite estimar se há limite de estabilidade no sistema rotativo
- Devido às simplificações na obtenção das equações, **não deve ser usado “cegamente”**  
(*integrar no tempo as equações de movimento do sistema de interesse*)

$$m\omega^2 = \frac{k_{yy}d_{zz} + k_{zz}d_{yy} - k_{yz}d_{zy} - k_{zy}d_{yz}}{d_{yy} + d_{zz}} \equiv k_c$$

$$\omega^2 = \frac{(k_{yy} - k_c)(k_{zz} - k_c) - k_{yz}k_{zy}}{d_{yy}d_{zz} - d_{yz}d_{zy}} \equiv \Omega_c^2$$

**Dúvidas ?**

