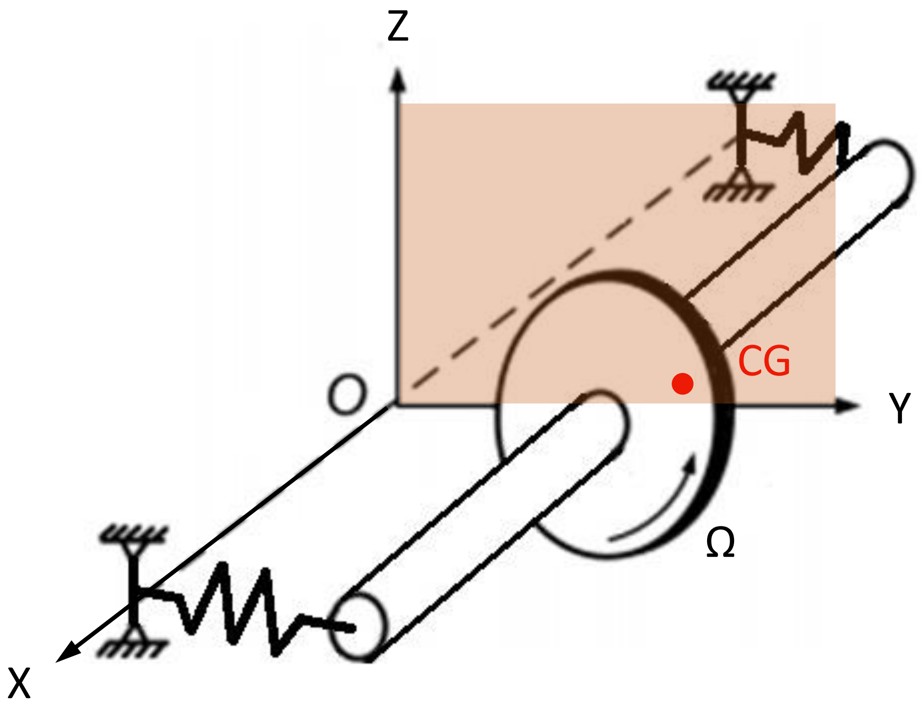
SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

AULA 3 – Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

(efeito giroscópico)

Prof. Rodrigo Nicoletti

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancal Ortotrópico (aula anterior)



Hipóteses:

- rotor centrado no eixo (equidistante dos mancais)
- eixo rígido
- eixo tem amortecimento d
- massa do eixo muito menor que massa do disco
- CG do disco não alinhado com centro do disco
- mancais com rigidez ortotrópica ($k_y \neq k_z$)

Matriz de rigidez depende da posição do eixo!!!

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -2m\Omega \\ 2m\Omega & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} +$$

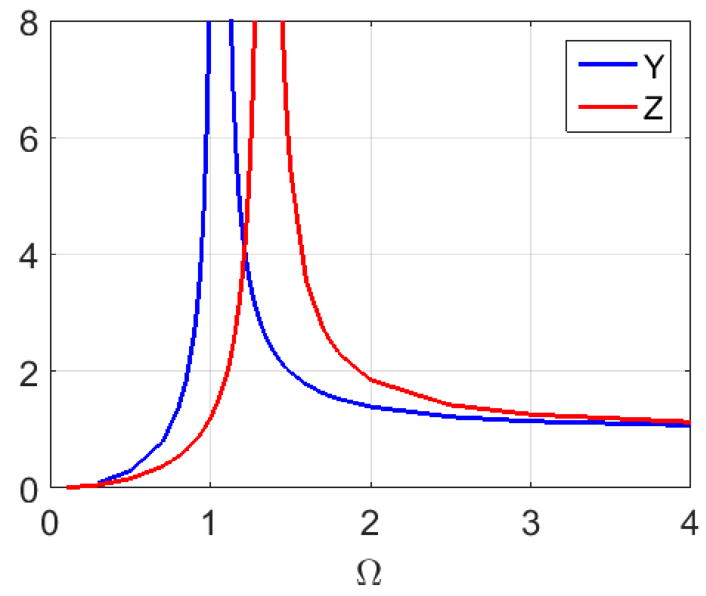
$$\boxed{\begin{bmatrix} \left(k_y \cos^2\phi + k_z \sin^2\phi - m\Omega^2\right) & \left[\left(k_z - k_y\right)\sin\phi\cos\phi - d\Omega - m\dot{\Omega}\right] \\ \left[\left(k_z - k_y\right)\sin\phi\cos\phi + d\Omega + m\dot{\Omega}\right] & \left(k_y \sin^2\phi + k_z \cos^2\phi - m\Omega^2\right) \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\Omega^2 \\ -me\dot{\Omega} \end{Bmatrix}$$

Equação de Movimento do Rotor Rígido sobre Mancal Flexível Ortotrópico

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancal Ortotrópico (aula anterior)

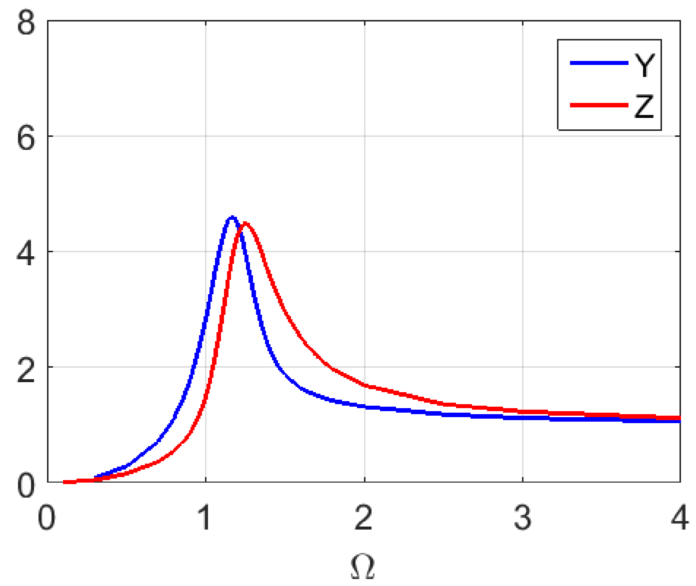
Rotor Rígido em Mancal Ortotrópico (baixo amortecimento)

- Apresenta órbitas elípticas
- Duas velocidades críticas (uma para cada direção)
- **Precessão Direta** em $\Omega < \omega_y$ e $\Omega > \omega_z$
  (órbita no mesmo sentido da rotação do eixo)
- **Precessão Retrógrada** em $\omega_y < \Omega < \omega_z$
  (órbita em sentido contrário ao da rotação do eixo)
- Autocentragem em $\Omega >> \omega_z$

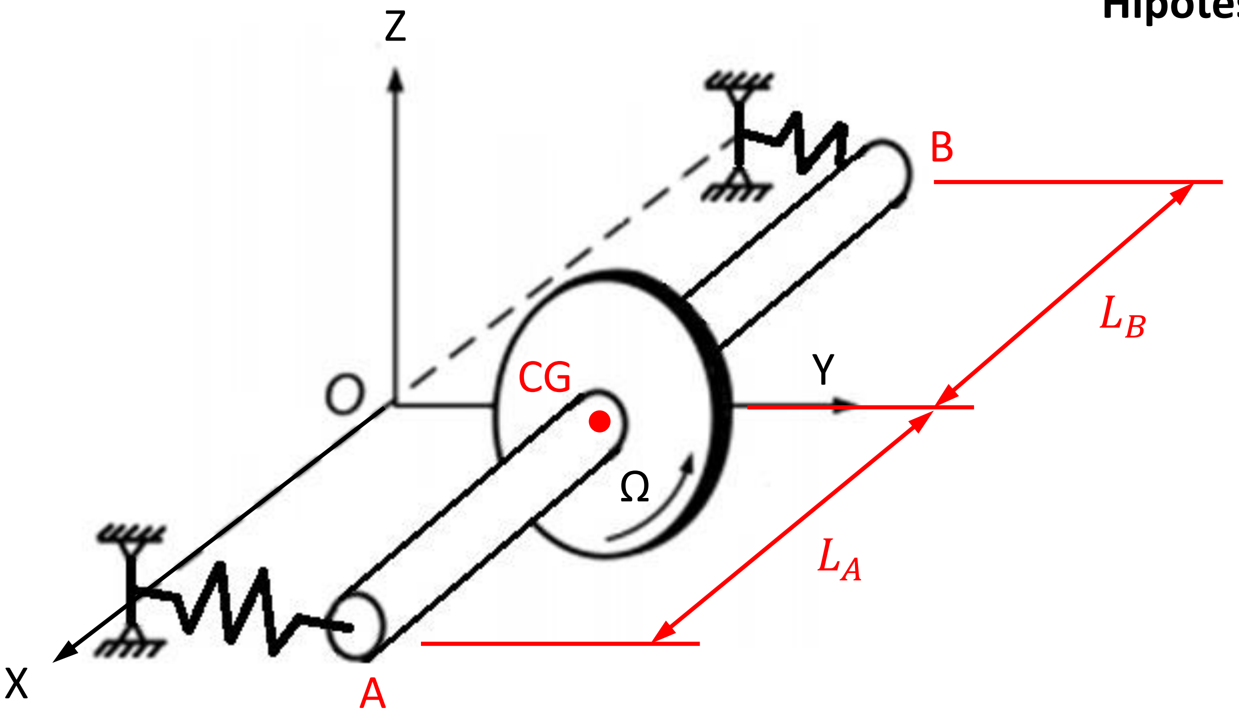


Rotor Rígido em Mancal Ortotrópico (alto amortecimento)

- Praticamente uma velocidade crítica apenas
- **Não ocorre precessão retrógrada**
- Apresenta órbitas elípticas
- Autocentragem em $\Omega >> \omega_z$

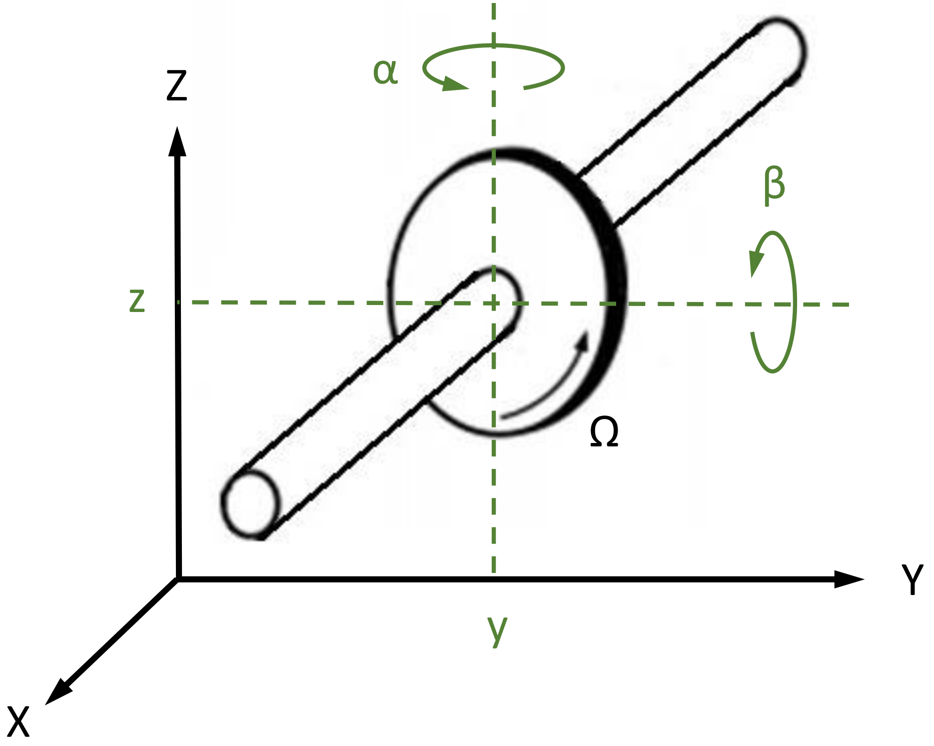


Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

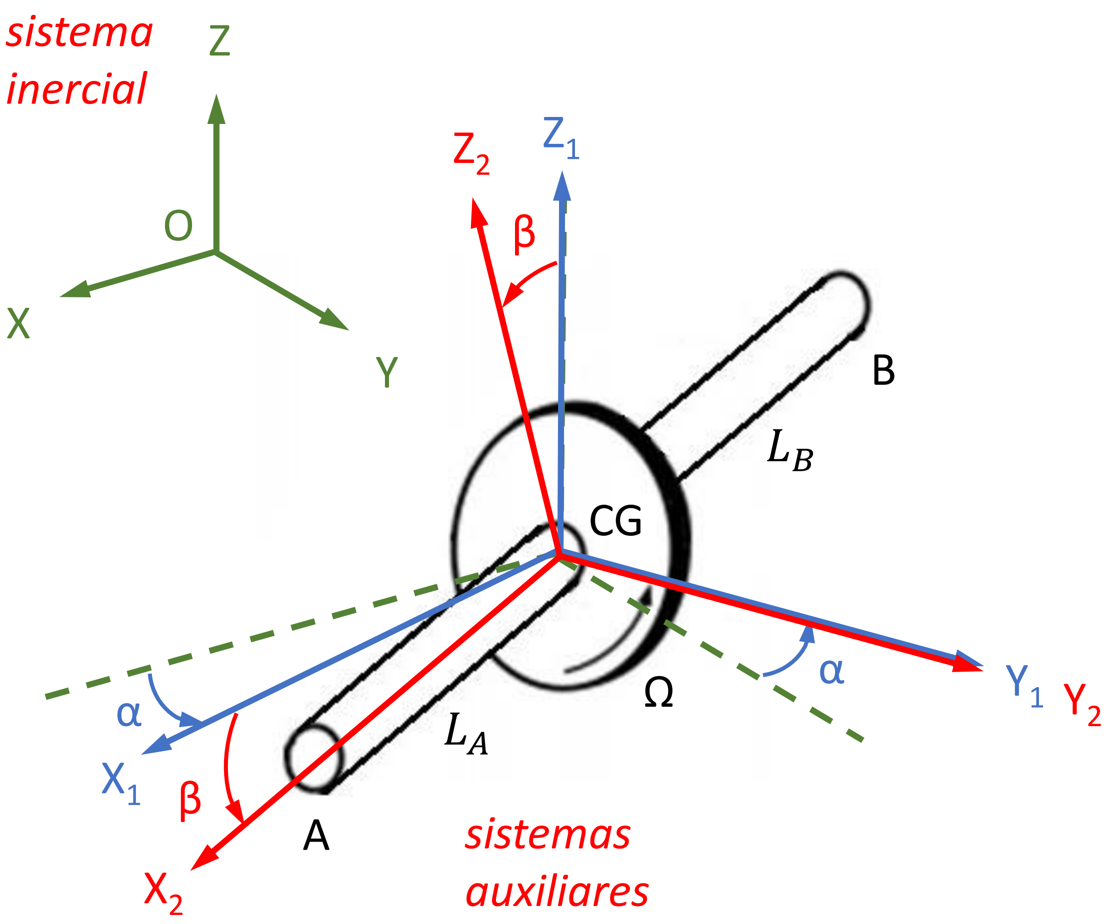


Hipóteses:

- rotor não centrado no eixo ($L_A \neq L_B$)
- eixo rígido
- mancais com rigidez *k* amortecimento *d*
- CG do disco alinhado com centro do disco
- mancais isotrópicos ($k_y = k_z$, $d_y = d_z$)



Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos



Matrizes de Transformação:

$$_{B1}\mathbf{v} = \boldsymbol{T}_{\alpha\ I}\mathbf{v} \qquad \text{onde:} \qquad \boldsymbol{T}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_{B2}\mathbf{v} = \boldsymbol{T}_{\beta\ B1}\mathbf{v} \qquad \text{onde:} \qquad \boldsymbol{T}_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

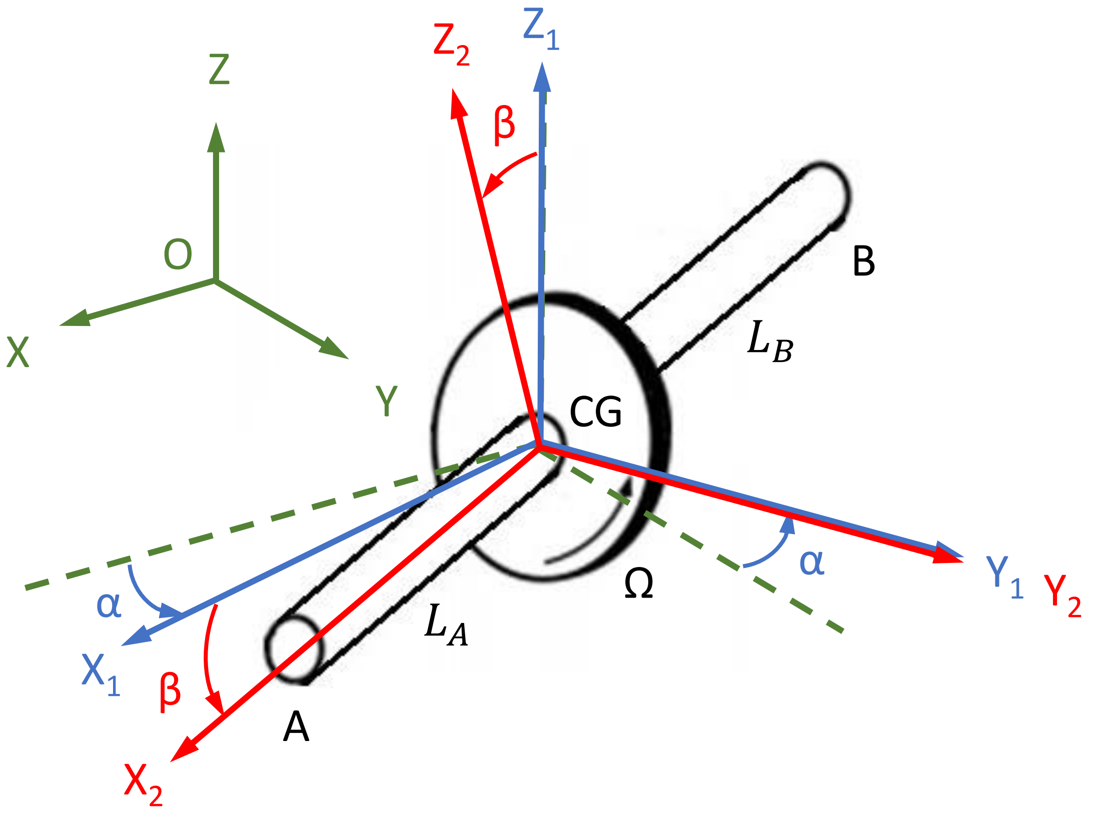
Velocidades Angulares:

$$_{I}\dot{\boldsymbol{\alpha}} = {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \qquad {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{Bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vetores Posição:

$$_{I}\boldsymbol{r}_{CG} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad {}_{B2}\boldsymbol{r}_{A/CG} = \begin{Bmatrix} L_A \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad {}_{B2}\boldsymbol{r}_{B/CG} = \begin{Bmatrix} -L_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos



Equação de Newton:

$$m \; {}_I\boldsymbol{a}_{CG} = \; {}_I\boldsymbol{f}_{mancal} = -k \; {}_I\boldsymbol{r}_A - d \; {}_I\boldsymbol{v}_A - k \; {}_I\boldsymbol{r}_B - d \; {}_I\boldsymbol{v}_B$$

Mas: $${}_I\boldsymbol{a}_{CG} = \frac{d^2}{dt^2}\left({}_I\boldsymbol{r}_{CG}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

$${}_I\boldsymbol{r}_A = \; {}_I\boldsymbol{r}_{CG} + \underbrace{{}_I\boldsymbol{r}_{A/CG}}_{\boldsymbol{T}_\alpha^T \boldsymbol{T}_\beta^T \, {}_{B2}\boldsymbol{r}_{A/CG}} = \begin{Bmatrix} L_A \cos\alpha \cos\beta \\ y + L_A \sin\alpha \cos\beta \\ z - L_A \sin\beta \end{Bmatrix}$$

$${}_I\boldsymbol{r}_B = \; {}_I\boldsymbol{r}_{CG} + \underbrace{{}_I\boldsymbol{r}_{B/CG}}_{\boldsymbol{T}_\alpha^T \boldsymbol{T}_\beta^T \, {}_{B2}\boldsymbol{r}_{B/CG}} = \begin{Bmatrix} -L_B \cos\alpha \cos\beta \\ y - L_B \sin\alpha \cos\beta \\ z + L_B \sin\beta \end{Bmatrix}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

Então: $${}_I\boldsymbol{v}_A = \frac{d}{dt}\left({}_I\boldsymbol{r}_A\right) = \begin{Bmatrix} -L_A\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta - L_A\dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta \\ \dot{y} + L_A\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - L_A\dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta \\ \dot{z} - L_A\dot{\beta}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

$${}_I\boldsymbol{v}_B = \frac{d}{dt}\left({}_I\boldsymbol{r}_B\right) = \begin{Bmatrix} L_B\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta + L_B\dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta \\ \dot{y} - L_B\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta + L_B\dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta \\ \dot{z} + L_B\dot{\beta}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

Portanto, substituindo na equação de Newton:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + 2d\dot{y} + d(L_A - L_B)\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - d(L_A - L_B)\dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta + 2ky + k(L_A - L_B)\sin\alpha\cos\beta \\ m\ddot{z} + 2d\dot{z} - d(L_A - L_B)\dot{\beta}\cos\beta + 2kz - k(L_A - L_B)\sin\beta \end{cases}$$

Linearizando:

$$\sin\theta \approx \theta$$
$$\cos\theta \approx 1$$
$$\theta\dot{\theta} \approx 0$$

(válido para θ < 20º e baixas frequências)

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{y} + 2d\dot{y} + d(L_A - L_B)\dot{\alpha} + 2ky + k(L_A - L_B)\alpha & (1) \\ m\ddot{z} + 2d\dot{z} - d(L_A - L_B)\dot{\beta} + 2kz - k(L_A - L_B)\beta & (2) \end{cases}$$

Equações Linearizadas

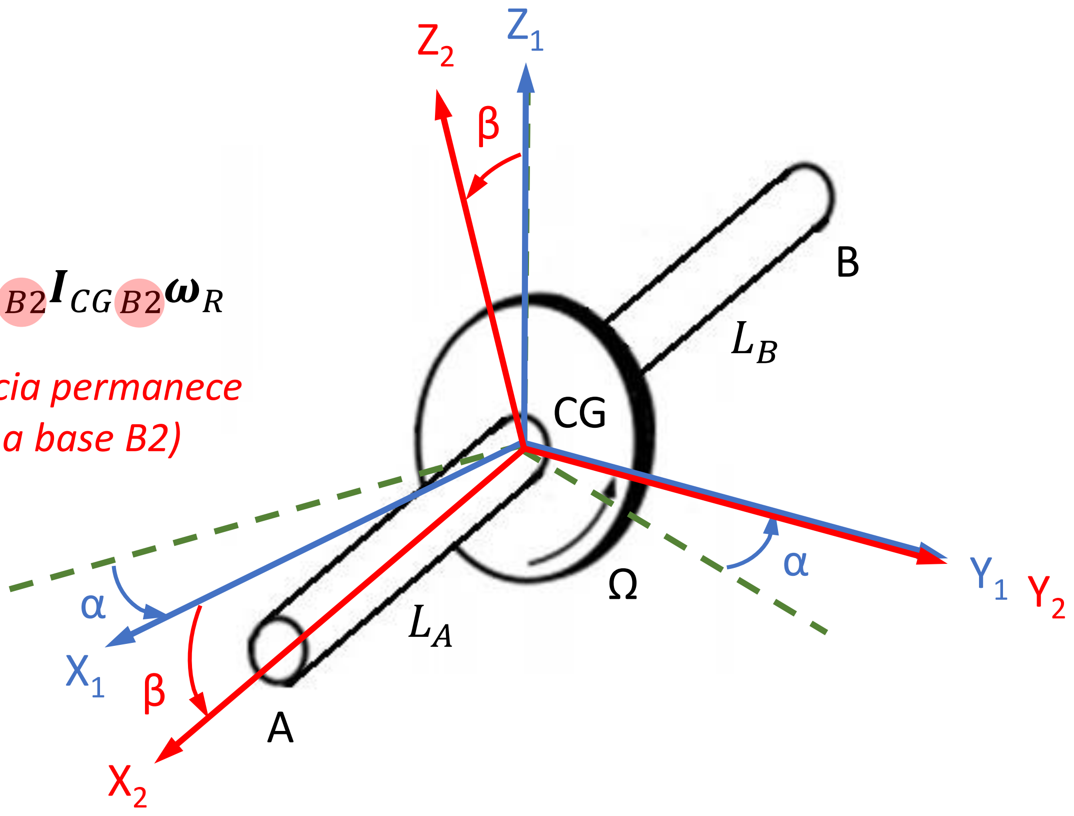
Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

Conservação da Qtde. de Movimento Angular:

$$\frac{d}{dt}\left({}_{B2}\boldsymbol{H}_{CG}\right) + {}_{B2}\boldsymbol{\Omega}_2 \times {}_{B2}\boldsymbol{H}_{CG} = \sum {}_{B2}\boldsymbol{M}_{CG}$$

Vetor Qtde. de Movimento Angular em relação ao CG: $${}_{B2}\boldsymbol{H}_{CG} = {}_{B2}\boldsymbol{I}_{CG}\,{}_{B2}\boldsymbol{\omega}_R$$

(tensor de inércia permanece constante na base B2)



Então, o **tensor de inércia**:

$${}_{B2}\boldsymbol{I}_{CG} = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & I_t & \\ & & I_t \end{bmatrix} = cte.$$

I_p = momento de inércia polar

I_t = momento de inércia transversal

A **velocidade angular do rotor**:

$${}_{B2}\boldsymbol{\omega}_R = \underbrace{{}_{B2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_{\boldsymbol{T}_{\beta\,B1}\dot{\boldsymbol{\alpha}}} + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\beta}} + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{Bmatrix} \Omega - \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

Portanto:

$$_{B2}\boldsymbol{H}_{CG} = \begin{Bmatrix} I_p\Omega - I_p\dot{\alpha}\sin\beta \\ I_t\dot{\beta} \\ I_t\dot{\alpha}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

Conservação da Qtde. de Movimento Angular

$$\frac{d}{dt}\left(_{B2}\boldsymbol{H}_{CG}\right) + {}_{B2}\boldsymbol{\Omega}_2 \times {}_{B2}\boldsymbol{H}_{CG} = \sum {}_{B2}\boldsymbol{M}_{CG}$$

Velocidade Angular da Base B2:

$$_{B2}\boldsymbol{\Omega}_2 = {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

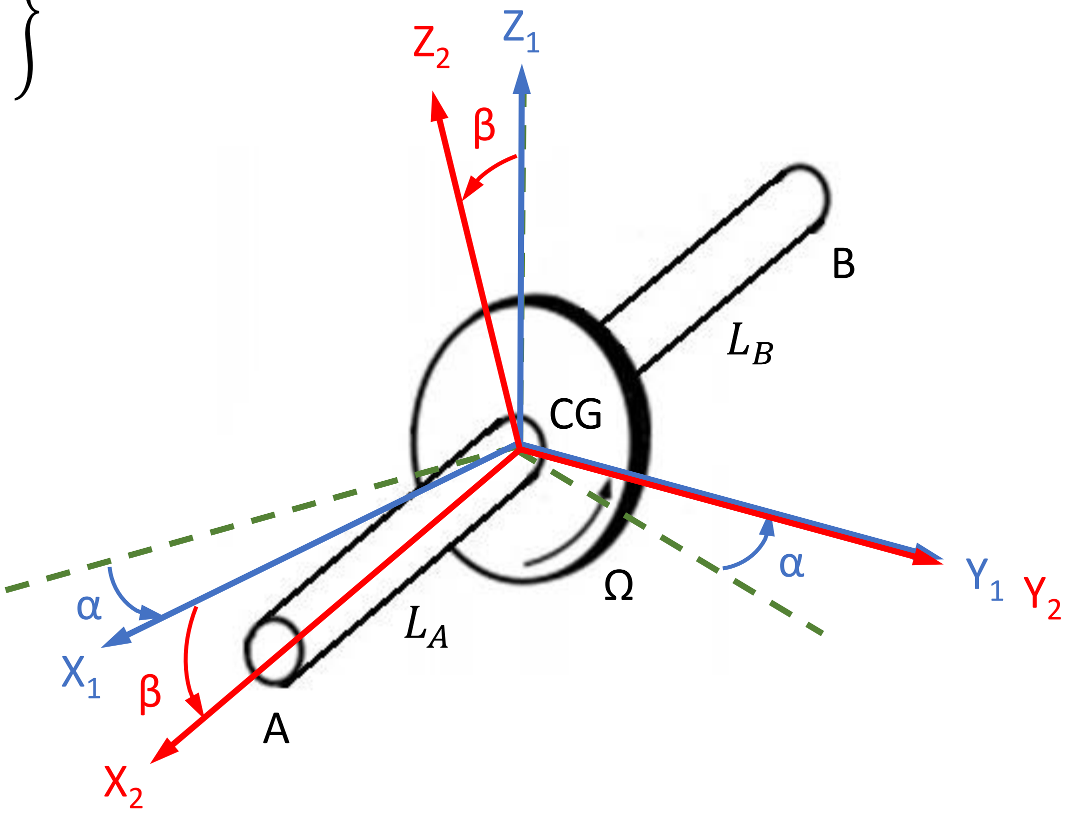
Somatório de Momentos em relação ao CG:

$$\sum {}_{B2}\boldsymbol{M}_{CG} = {}_{B2}\boldsymbol{r}_{A/CG} \times {}_{B2}\boldsymbol{f}_A + {}_{B2}\boldsymbol{r}_{B/CG} \times {}_{B2}\boldsymbol{f}_B$$

Onde:

$_I\boldsymbol{f}_A = -k\ {}_I\boldsymbol{r}_A - d\ {}_I\boldsymbol{v}_A$ (forças no mancal em A)

$_I\boldsymbol{f}_B = -k\ {}_I\boldsymbol{r}_B - d\ {}_I\boldsymbol{v}_B$ (forças no mancal em B)



Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

$\sin\theta \approx \theta$
$\cos\theta \approx 1$
$\theta\dot{\theta} \approx 0$

Assim, substituindo-se os vetores na Eq. Conserv. Qtde. Mov. Angular e linearizando:

$$\begin{cases} I_t\ddot{\beta} + I_p\Omega\dot{\alpha} - d(L_A - L_B)\dot{z} + d(L_A^2 + L_B^2)\dot{\beta} - k(L_A - L_B)z + k(L_A^2 + L_B^2)\beta = 0 & (3) \\ I_t\ddot{\alpha} - I_p\Omega\dot{\beta} + d(L_A - L_B)\dot{y} + d(L_A^2 + L_B^2)\dot{\alpha} + k(L_A - L_B)y + k(L_A^2 + L_B^2)\alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

Equações Linearizadas

Escrevendo-se de forma matricial as equações (1) a (4):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & I_t & \\ & & & I_t \end{bmatrix}}_{\text{matriz de inércia}} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2d & & d(L_A - L_B) & \\ & 2d & & -d(L_A - L_B) \\ d(L_A - L_B) & & d(L_A^2 + L_B^2) & \\ & -d(L_A - L_B) & & d(L_A^2 + L_B^2) \end{bmatrix}}_{\text{matriz de amortecimento}} + \Omega \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & -I_p \\ & & I_p & \end{bmatrix}}_{\textbf{MATRIZ GIROSCÓPICA}} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2k & & k(L_A - L_B) & \\ & 2k & & -k(L_A - L_B) \\ k(L_A - L_B) & & k(L_A^2 + L_B^2) & \\ & -k(L_A - L_B) & & k(L_A^2 + L_B^2) \end{bmatrix}}_{\text{matriz de rigidez}} \begin{Bmatrix} y \\ z \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos

Assim: $$\boldsymbol{M\ddot{s}} + (\boldsymbol{D} + \Omega\boldsymbol{G})\boldsymbol{\dot{s}} + \boldsymbol{Ks} = \boldsymbol{0}$$

Equações Linearizadas

Modelagem no Espaço de Estado: $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\ddot{s}} \\ \boldsymbol{\dot{s}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (\boldsymbol{D} + \Omega\boldsymbol{G}) & \boldsymbol{K} \\ -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\dot{s}} \\ \boldsymbol{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\dot{u}} + \overline{\boldsymbol{K}}(\Omega)\boldsymbol{u} = 0 \quad (5)$$

Considere uma solução harmônica: $$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{U}e^{\boldsymbol{i\omega t}}$$

Substituindo na eq.(5), chega-se ao **problema de autovalor do sistema**: $$[i\omega\overline{\boldsymbol{M}} + \overline{\boldsymbol{K}}(\Omega)]\boldsymbol{U} = 0$$

Cuja solução nos dá os **autovalores** do sistema: $\omega_j = \omega_j(\Omega)$ *frequências naturais*

E os **autovetores** do sistema: $U_j = U_j(\Omega)$ *modos de vibrar*

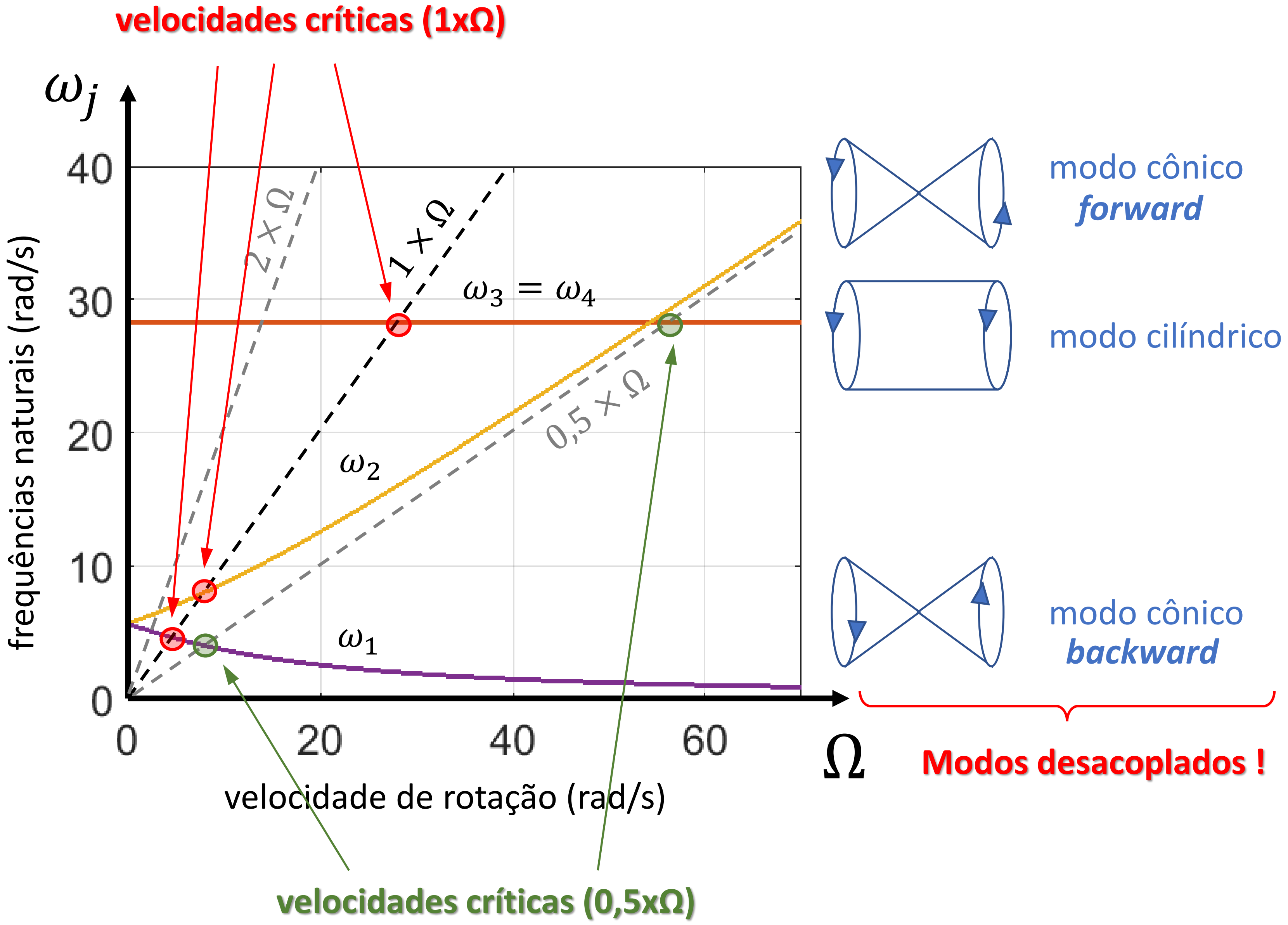
Função da velocidade de rotação Ω !!!

Diagrama de Campbell (rotor simétrico: $L_A = L_B$)

$L_A = L_B = 0{,}2$ m
$I_p = 0{,}5\ I_t$

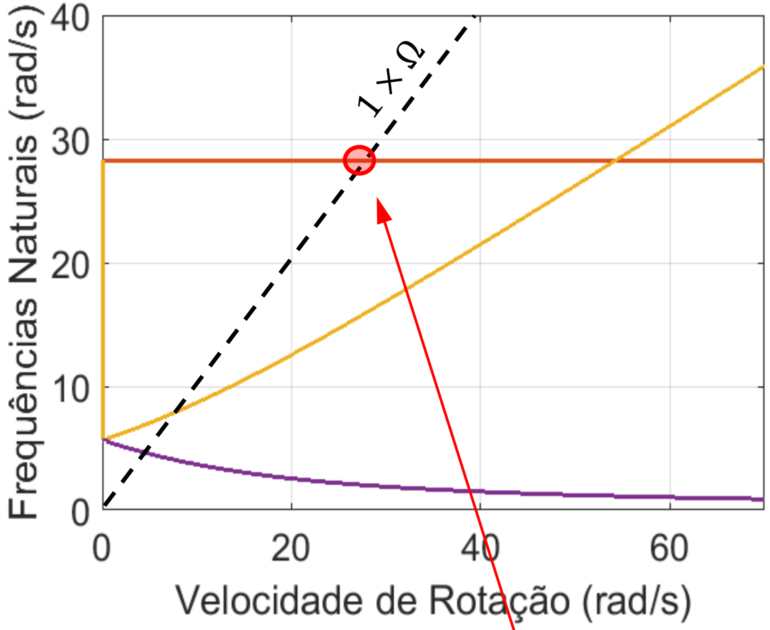
$m = 1$ kg
$k = 400$ N/m
$d = 0.1$ N.s/m

- Frequências naturais não são constantes
- Velocidades críticas dependem da harmônica de rotação



Resposta ao Desbalanço (rotor simétrico: $L_A = L_B$)

Diagrama de Campbell



velocidade crítica

(apenas modo cilíndrico !!!)

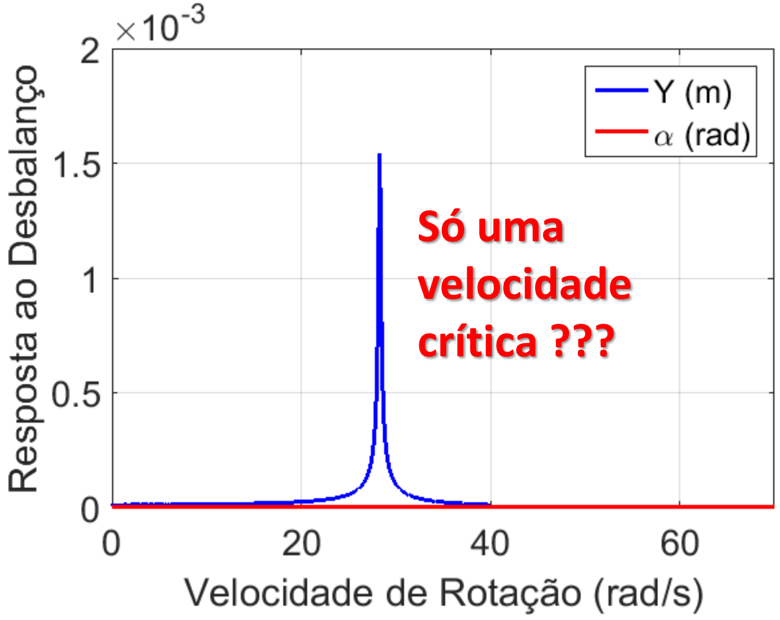
- força de desbalanço não excita deslocamentos angulares do eixo no caso $L_A = L_B$

Equações linearizadas:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{s}} + (\boldsymbol{D} + \Omega\boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{s} = \begin{Bmatrix} m_d e\Omega^2 \cos\Omega t \\ m_d e\Omega^2 \sin\Omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

excitação por desbalanço

Resposta ao Desbalanço

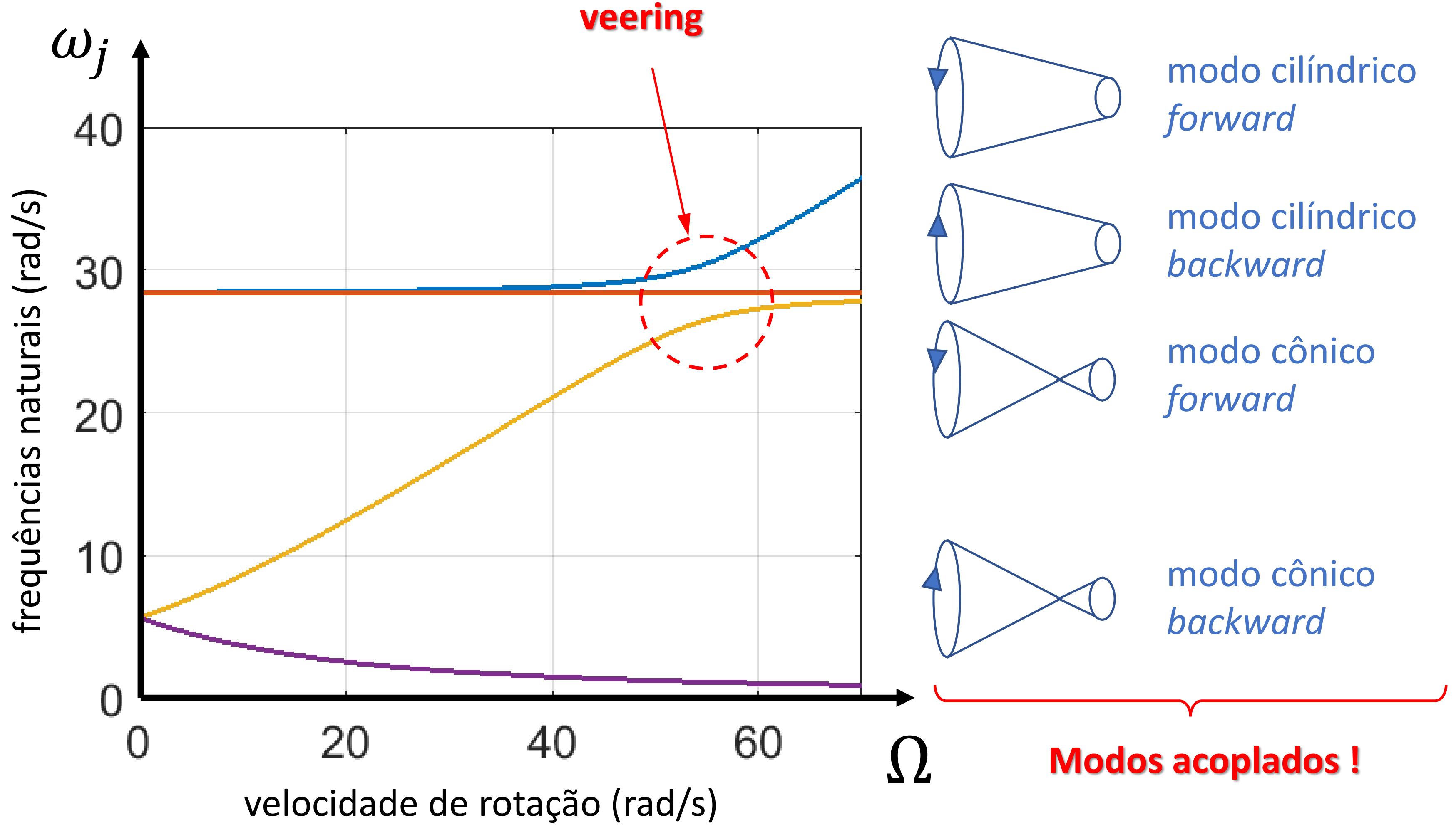


Só uma velocidade crítica ???

Diagrama de Campbell (rotor assimétrico: $L_A \neq L_B$)

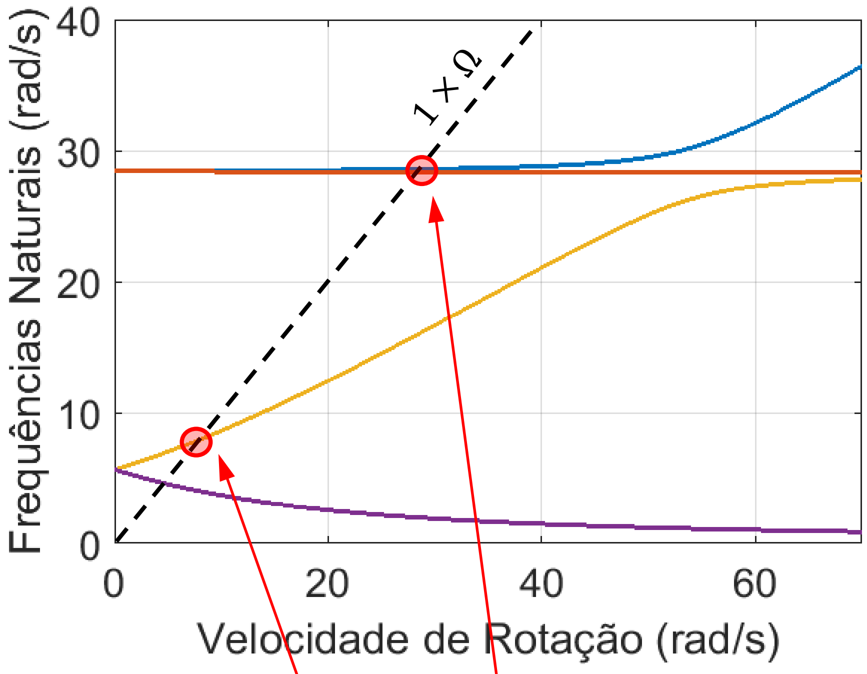
$L_A \neq L_B$
L_A = 0,3 m
L_B = 0,1 m
I_p = 0,5 I_t

m = 1 kg
k = 400 N/m
d = 0



Resposta ao Desbalanço (rotor assimétrico: $L_A \neq L_B$)

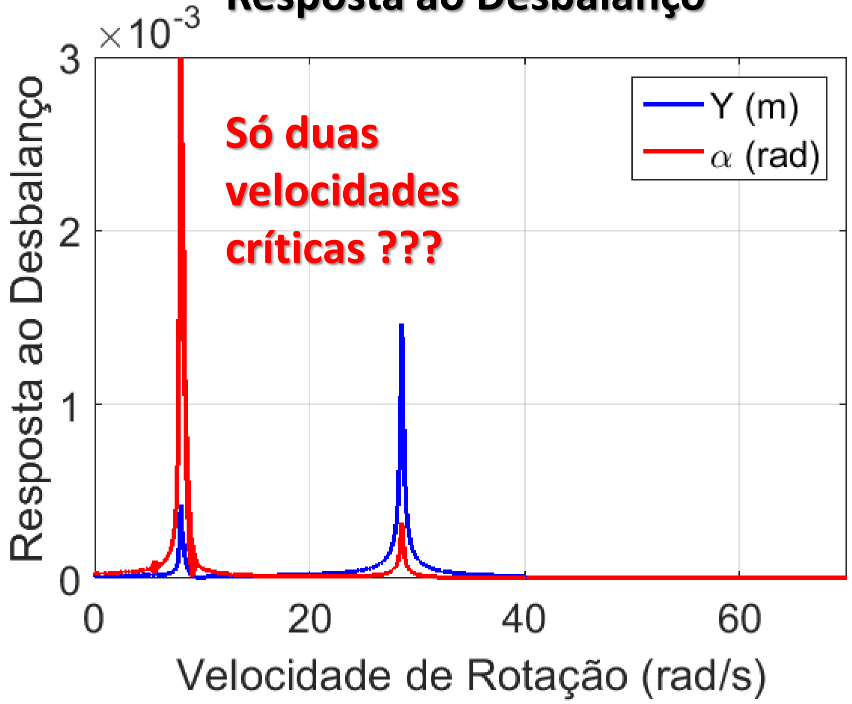
Diagrama de Campbell



velocidades críticas

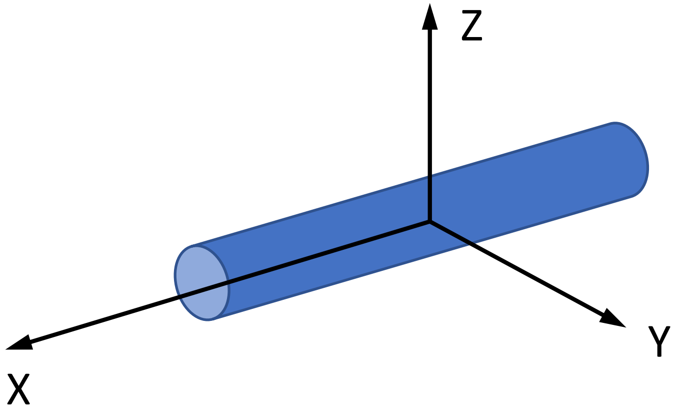
(apenas modos forward !!!)

Resposta ao Desbalanço

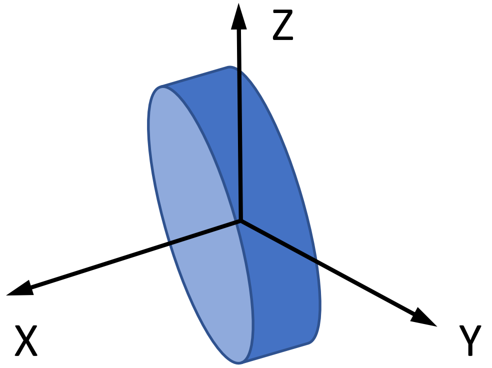


Força de desbalanço não excita modos backward!!!

Efeito da Geometria do Rotor



$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= I_p = \frac{1}{2}mr^2 \\ I_{yy} &= I_{zz} = I_t = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 \end{aligned}\right\} \quad 0 < I_p < I_t$$



$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= I_p = \frac{1}{2}mr^2 \\ I_{yy} &= I_{zz} = I_t \approx \frac{1}{4}mr^2 \end{aligned}\right\} \quad I_p \approx 2I_t$$

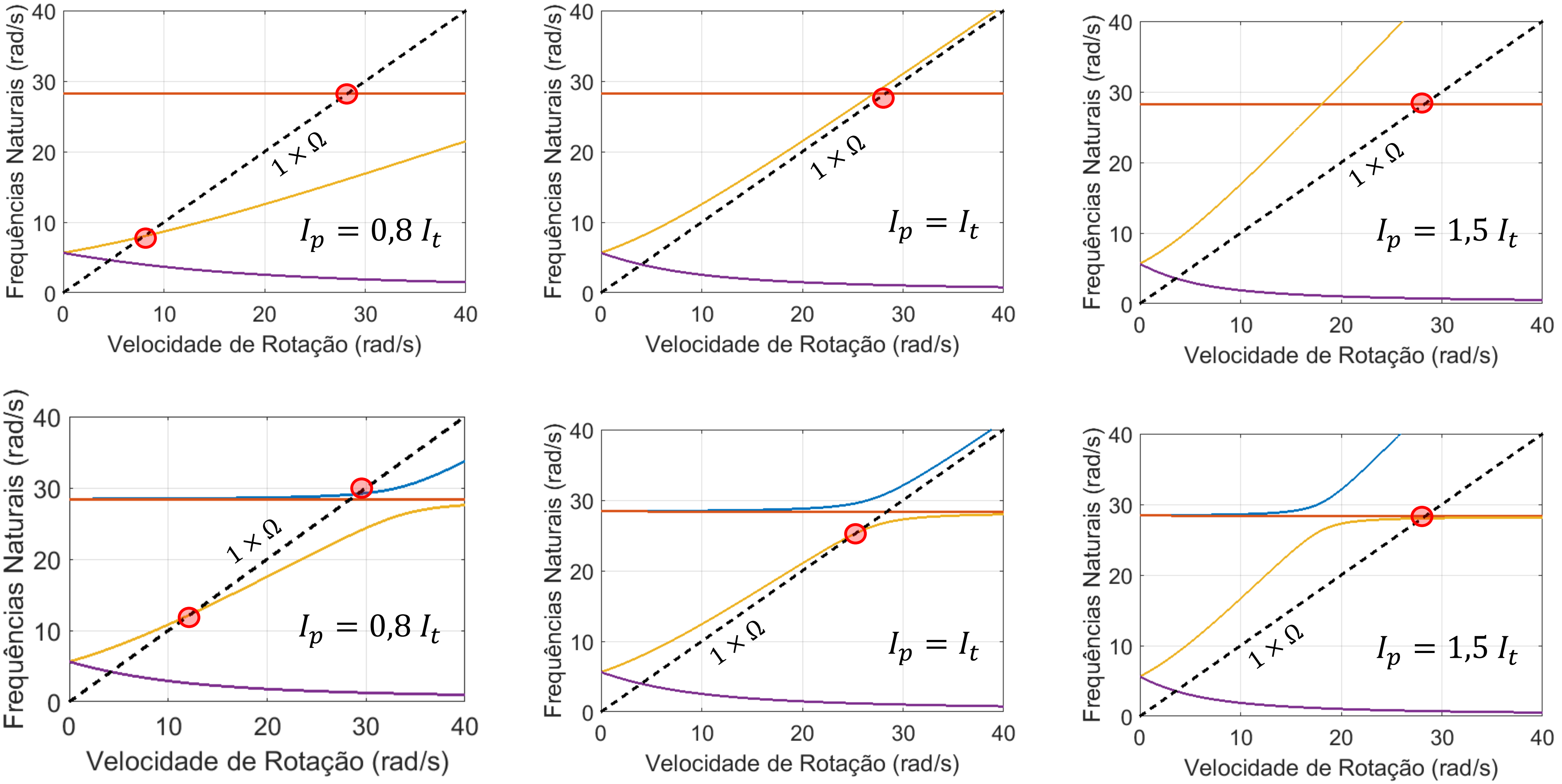
Assim, pode-se definir: $\boxed{I_p = \gamma\, I_t\,, \qquad 0 < \gamma \leq 2}$

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{eixo longo e fino (arame)} \\ \gamma = 2 & \text{disco fino (casca redonda)} \end{cases}$$

Efeito da Geometria do Rotor

$L_A = L_B$

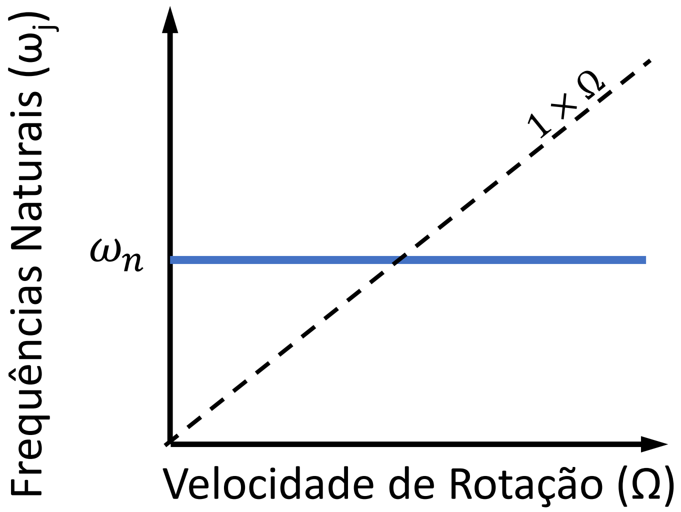
$L_A \neq L_B$



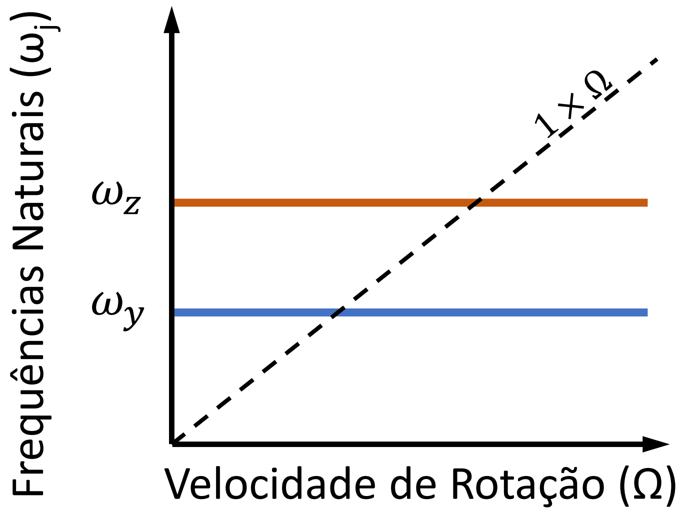
Conclusão

- **Diagrama de Campbell** – gráfico importante para determinar velocidades críticas

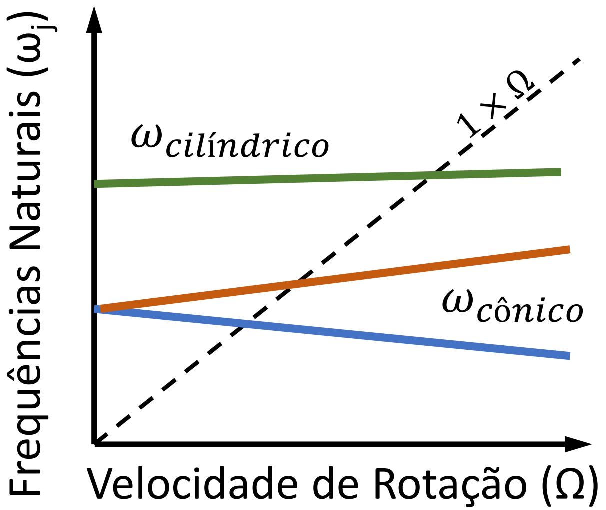
Rotor de Laval (mancais isotrópicos)



Rotor sobre Mancais Ortotrópicos



Rotor com Efeito Giroscópico (mancais isotrópicos)



Conclusão

- **Rotor Rígido sobre Mancais Isotrópicos e Efeito Gisroscópico**

  - dois modos cônicos e dois modos cilíndricos

  - **efeito giroscópico “abre” as frequências dos modos cônicos** *(modos com rotação do plano do disco)*

  - um dos modos é forward e o outro é backward

  - frequência de **backward tende a zero** enquanto a frequência de **forward tende a infinito**

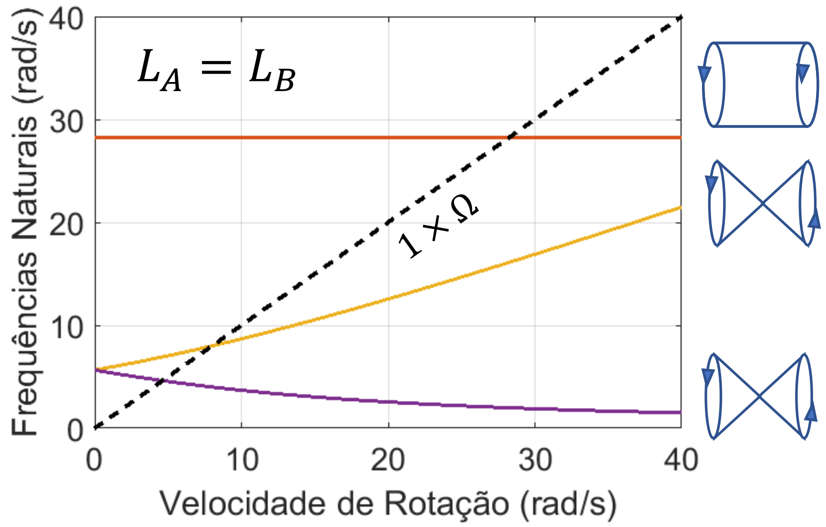
  - velocidades críticas definidas nos cruzamentos com a linha 1xΩ *(desbalanço)*

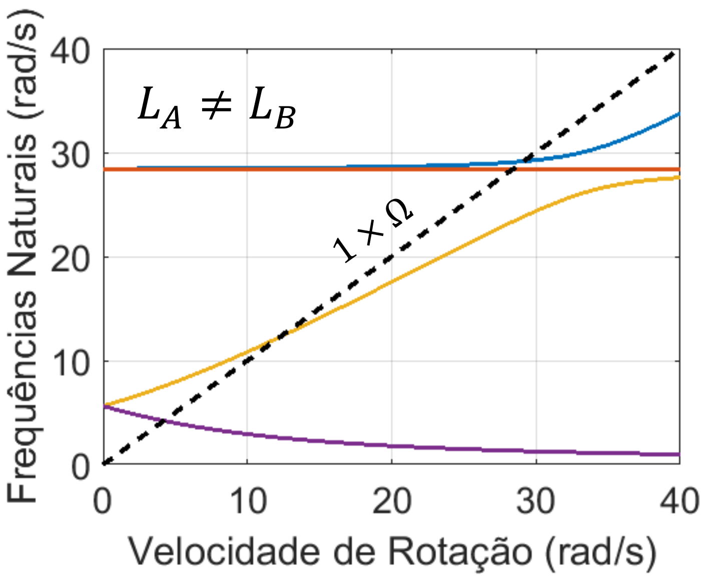
  - desbalanço não excita modos de backward

- **Caso $L_A \neq L_B$**

  - modos cônicos e modos cilíndricos são acoplados

  - ocorre veering das frequências (frequências não se cruzam)





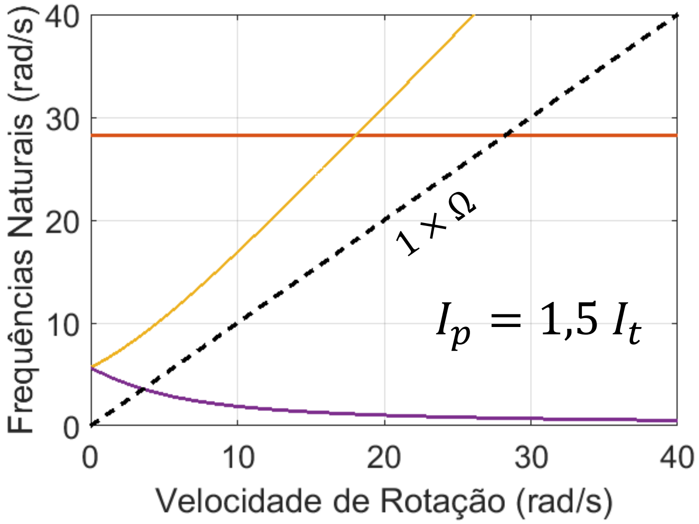
Conclusão

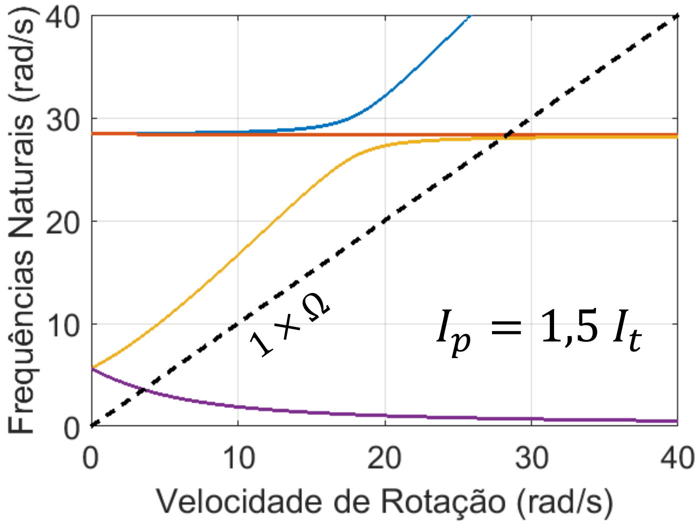
- **Efeito da geometria do eixo**

  - Se $I_p < I_t$, modos cônicos e modos cilíndricos aparecem na resposta ao desbalanço

  - Se $I_p > I_t$: **apenas modos cilíndricos** aparecem na resposta ao desbalanço do **sistema $L_A = L_B$**

    apenas modos cônicos aparecem na resposta ao desbalanço do **sistema $L_A \neq L_B$**





Dúvidas ?