

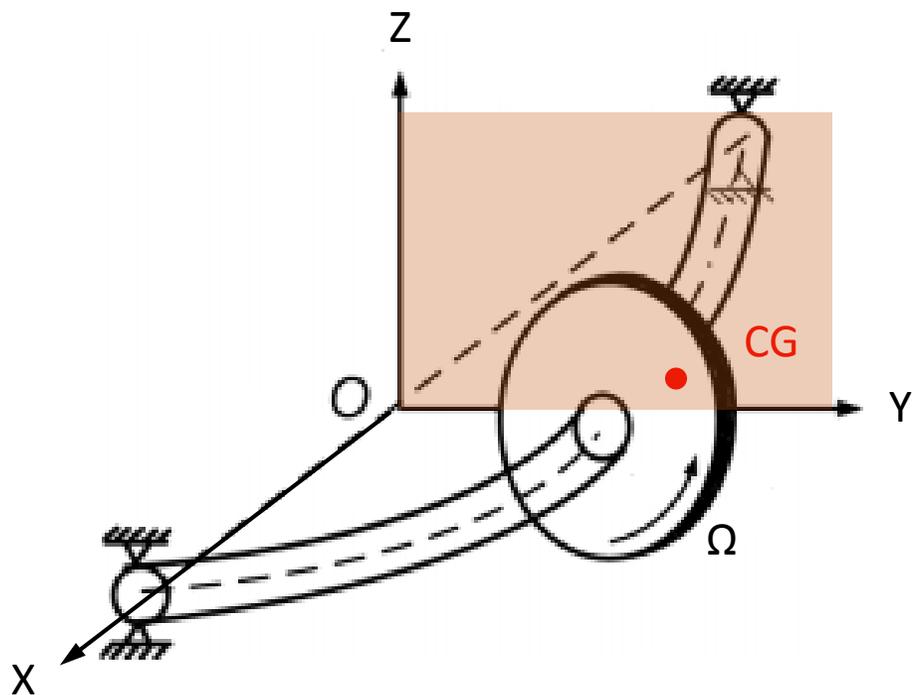
SEM 5903 – Dinâmica de Sistemas Rotativos

AULA 2 – Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos
(movimentos de precessão direta e retrógrada)

Prof. Rodrigo Nicoletti

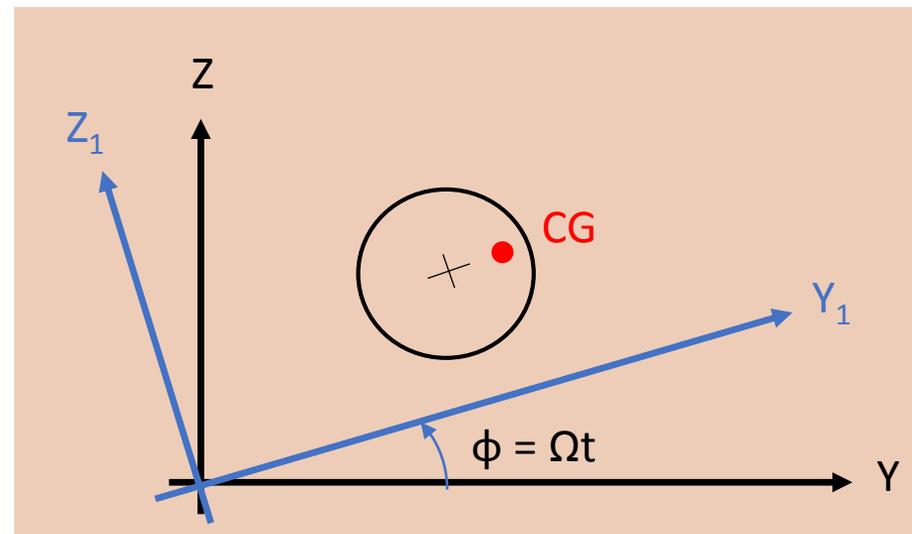


Modelo Matemático do Rotor de Laval (aula anterior)



Hipóteses:

- rotor centrado no eixo (equidistante dos mancais)
- eixo tem rigidez k
- eixo tem amortecimento d
- massa do eixo muito menor que massa do disco
- CG do disco não alinhado com centro do disco
- mancais rígidos



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -2m\Omega \\ 2m\Omega & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} +$$

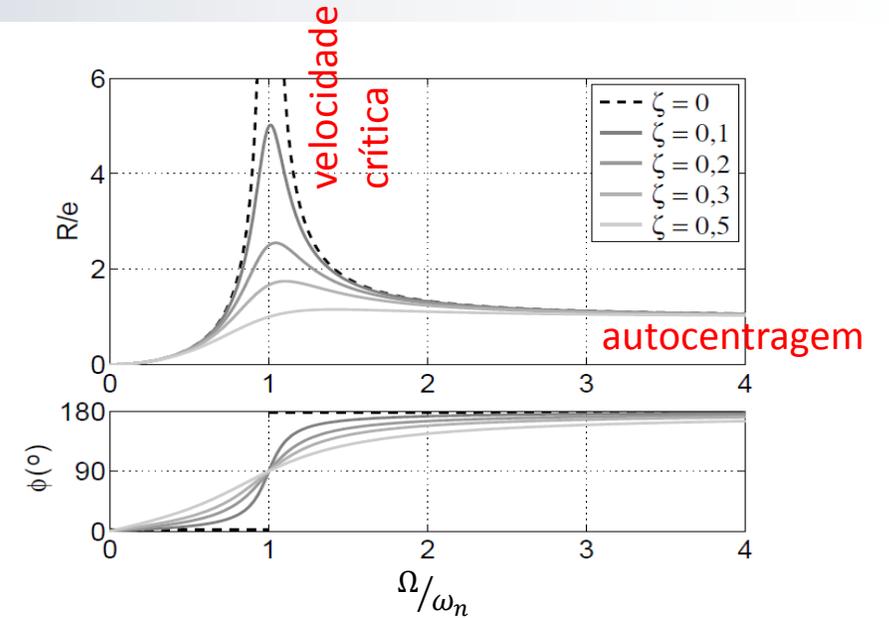
$$\begin{bmatrix} (k - m\Omega^2) & -(m\dot{\Omega} + d\Omega) \\ (m\dot{\Omega} + d\Omega) & (k - m\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\Omega^2 \\ -me\dot{\Omega} \end{Bmatrix}$$

Equação de Movimento do Rotor de Laval

Modelo Matemático do Rotor de Laval (aula anterior)

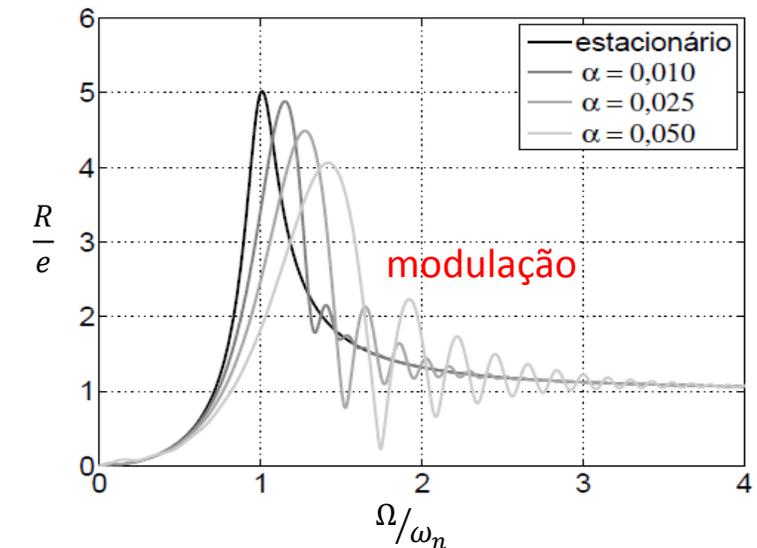
Rotor de Laval em Regime Estacionário

- Apresenta órbitas circulares
- Máximo raio da órbita na velocidade crítica
- Autocentrage em velocidades supercríticas

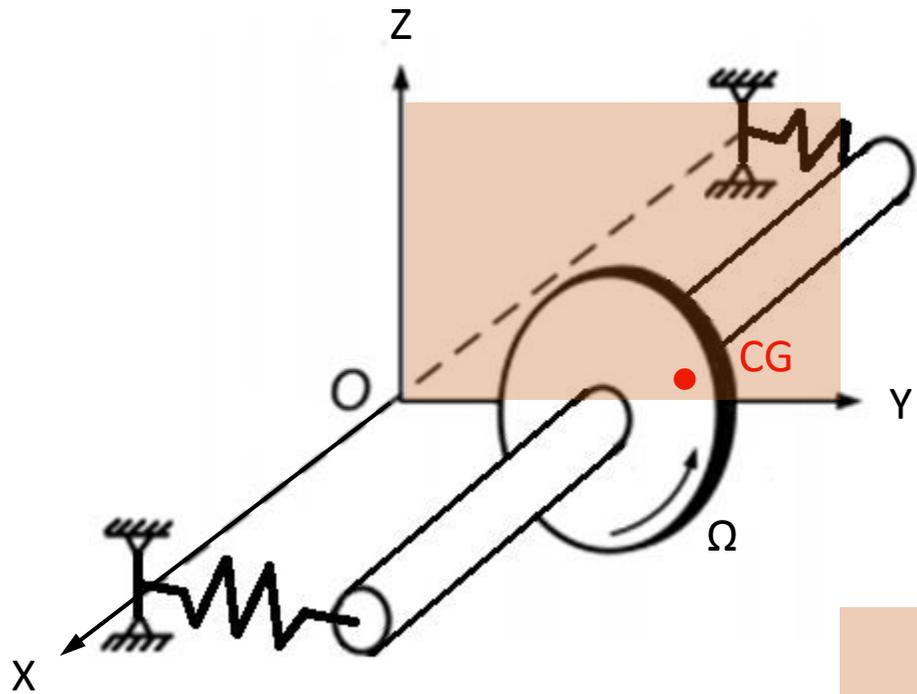


Rotor de Laval em Regime Não Estacionário

- Máxima amplitude não ocorre na velocidade crítica
- Quanto maior a aceleração angular:
 - Menor é o pico de ressonância
 - Maior é a modulação da resposta
- Autocentrage em velocidades supercríticas

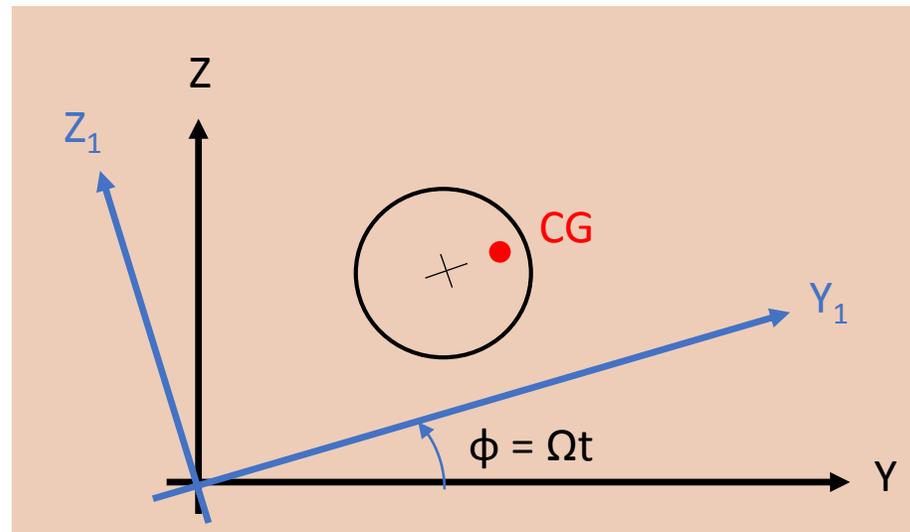


Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

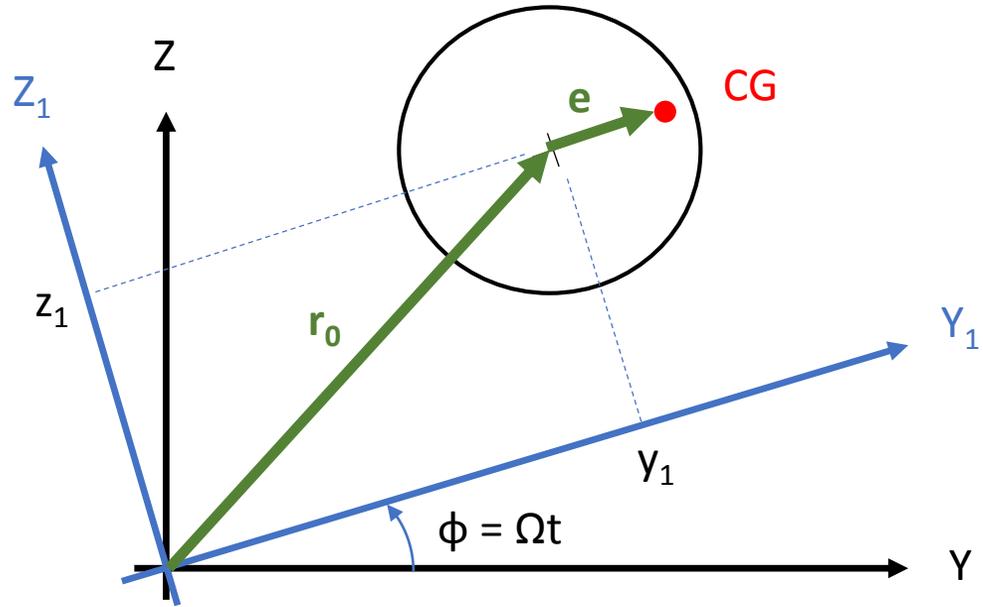


Hipóteses:

- rotor centrado no eixo (equidistante dos mancais)
- **eixo rígido**
- eixo tem amortecimento d
- massa do eixo muito menor que massa do disco
- CG do disco não alinhado com centro do disco
- **mancais com rigidez ortotrópica ($k_y \neq k_z$)**



Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos



Vetores de Posição

$${}_{B1}\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad {}_{B1}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{r}_{CG} = {}_{B1}\mathbf{r}_0 + {}_{B1}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + e \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{Vetor posição do CG}$$

Vetores de Velocidade

$${}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vetor velocidade angular da base } B1$$

$${}_{B1}\mathbf{v}_0 = \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{r}_0) + {}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_1 - \Omega z_1 \\ \dot{z}_1 + \Omega y_1 \end{pmatrix} \quad \text{Vetor velocidade do centro do disco}$$

$${}_{B1}\mathbf{v}_{CG} = \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{r}_{CG}) + {}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{r}_{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y}_1 - \Omega z_1 \\ \dot{z}_1 + \Omega(y_1 + e) \end{pmatrix} \quad \text{Vetor velocidade do CG}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Vetor de Aceleração

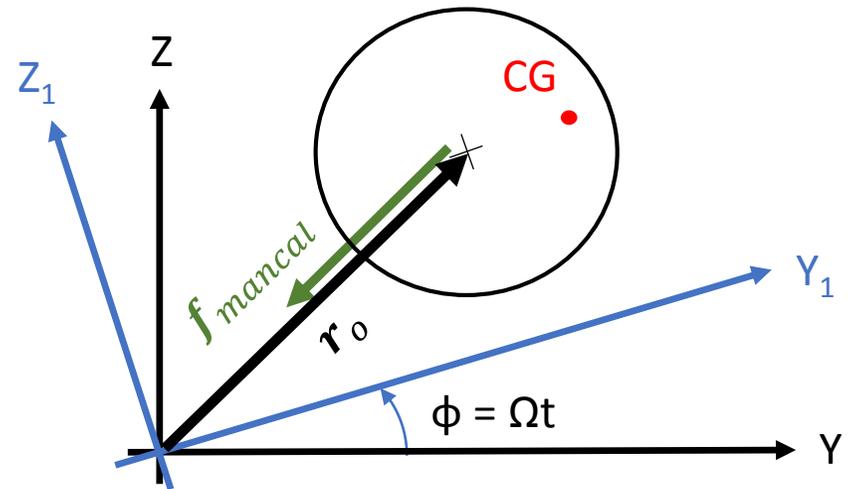
$${}_{B1}\mathbf{a}_{CG} = \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{v}_{CG}) + {}_{B1}\boldsymbol{\Omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{v}_{CG} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_1 - \dot{\Omega}z_1 - 2\Omega\dot{z}_1 - \Omega^2y_1 - \Omega^2e \\ \ddot{z}_1 + \dot{\Omega}y_1 + 2\Omega\dot{y}_1 - \Omega^2z_1 - \dot{\Omega}e \end{Bmatrix}$$

Equação de Newton

$$m_{{}_{B1}\mathbf{a}_{CG}} = \sum {}_{B1}\mathbf{f} = -{}_{B1}\mathbf{f}_{mancal} - d_{{}_{B1}\mathbf{v}_0}$$

Forças nos mancais é melhor descrita no referencial inercial:

$${}_I\mathbf{f}_{mancal} = -\mathbf{K}_m {}_I\mathbf{r}_0 \quad \text{onde:} \quad \mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$



Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Mas:
$${}_I \mathbf{r}_o = \mathbf{T}_{\phi B1}^T {}_I \mathbf{r}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_1 \cos \phi - z_1 \sin \phi \\ y_1 \sin \phi + z_1 \cos \phi \end{Bmatrix}$$

Então:
$${}_I \mathbf{f}_{mancal} = -\mathbf{K}_m {}_I \mathbf{r}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_y (y_1 \cos \phi - z_1 \sin \phi) \\ -k_z (y_1 \sin \phi + z_1 \cos \phi) \end{Bmatrix}$$

Porém, a equação de Newton está escrita no referencial auxiliar $B1$:
$$m_{B1} \mathbf{a}_{CG} = \sum_{B1} \mathbf{f} = -{}_{B1} \mathbf{f}_{mancal} - d_{B1} \mathbf{v}_o$$

Portanto:
$${}_{B1} \mathbf{f}_{mancal} = \mathbf{T}_{\phi} {}_I \mathbf{f}_{mancal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} {}_I \mathbf{f}_{mancal} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}_{B1} \mathbf{f}_{mancal} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(k_y \cos^2 \phi + k_z \sin^2 \phi) y_1 - (k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi z_1 \\ -(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi y_1 - (k_y \cos^2 \phi + k_z \sin^2 \phi) z_1 \end{Bmatrix}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Equação de Newton

$$m_{B1} \mathbf{a}_{CG} = \sum_{B1} \mathbf{f} = -{}_{B1} \mathbf{f}_{mancal} - d_{B1} \mathbf{v}_0$$

Inserindo-se os vetores na equação de Newton:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -2m\Omega \\ 2m\Omega & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (k_y \cos^2 \phi + k_z \sin^2 \phi - m\Omega^2) & [(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi - d\Omega - m\dot{\Omega}] \\ [(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi + d\Omega + m\dot{\Omega}] & (k_y \sin^2 \phi + k_z \cos^2 \phi - m\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\Omega^2 \\ -me\dot{\Omega} \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez depende da posição do eixo!!!

Equação de Movimento do Rotor Rígido sobre Mancal Flexível Ortotrópico

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Condição de Regime Estacionário $\begin{cases} \Omega = cte \\ \dot{\Omega} = 0 \end{cases}$

Então: ${}_{B1}\mathbf{f}_{eq} = \begin{Bmatrix} me\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = cte$

Se as forças equivalentes são constantes: $\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = cte$

Portanto: $\begin{bmatrix} (k_y \cos^2 \phi + k_z \sin^2 \phi - m\Omega^2) & [(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi - d\Omega - m\dot{\Omega}] \\ [(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi + d\Omega + m\dot{\Omega}] & (k_y \sin^2 \phi + k_z \cos^2 \phi - m\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{(k_y \sin^2 \phi + k_y \cos^2 \phi - m\Omega^2). me\Omega^2}{k_y k_z - m\Omega^2(k_y + k_z) + (m\Omega^2)^2 + (d\Omega)^2} \\ z_1 = \frac{-[(k_z - k_y) \sin \phi \cos \phi + d\Omega]. me\Omega^2}{k_y k_z - m\Omega^2(k_y + k_z) + (m\Omega^2)^2 + (d\Omega)^2} \end{cases}$$

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Definindo-se as frequências naturais:

$$\begin{cases} \omega_y^2 = \frac{k_y}{m} \\ \omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \end{cases}$$

E sabendo-se que: a) $\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$

b) $\omega_y^2 \sin^2 \phi + \omega_z^2 \cos^2 \phi = \frac{1}{2} (\omega_z^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} (\omega_z^2 - \omega_y^2) \cos 2\phi$

Chega-se a:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{[1/2 (\omega_z^2 + \omega_y^2) + 1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) \cos 2\phi - \Omega^2] \cdot e\Omega^2}{\omega_y^2 \omega_z^2 - \Omega^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) + \Omega^4 + (d/m \Omega)^2} \\ z_1 = \frac{-[1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) \sin 2\phi + d/m \Omega] \cdot e\Omega^2}{\omega_y^2 \omega_z^2 - \Omega^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) + \Omega^4 + (d/m \Omega)^2} \end{cases}$$

**Função da
posição angular
do eixo !!!**

Resposta em Regime Estacionário

Modelo Matemático do Rotor Rígido sobre Mancais Ortotrópicos

Resposta em Regime Estacionário

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{[1/2 (\omega_z^2 + \omega_y^2) + 1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) \cos 2\phi - \Omega^2] \cdot e\Omega^2}{\omega_y^2 \omega_z^2 - \Omega^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) + \Omega^4 + (d/m \Omega)^2} \\ z_1 = \frac{-[1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) \sin 2\phi + d/m \Omega] \cdot e\Omega^2}{\omega_y^2 \omega_z^2 - \Omega^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) + \Omega^4 + (d/m \Omega)^2} \end{array} \right.$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{B}{A} (C + D \cos 2\phi) \\ z_1 = -\frac{B}{A} (E + D \sin 2\phi) \end{array} \right.$$

Onde:

$$A = \omega_y^2 \omega_z^2 - \Omega^2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) + \Omega^4 + (d/m \Omega)^2$$

$$B = e\Omega^2$$

$$C = 1/2 (\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2$$

$$D = 1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) \quad \text{constante !!!}$$

$$E = d/m \Omega$$

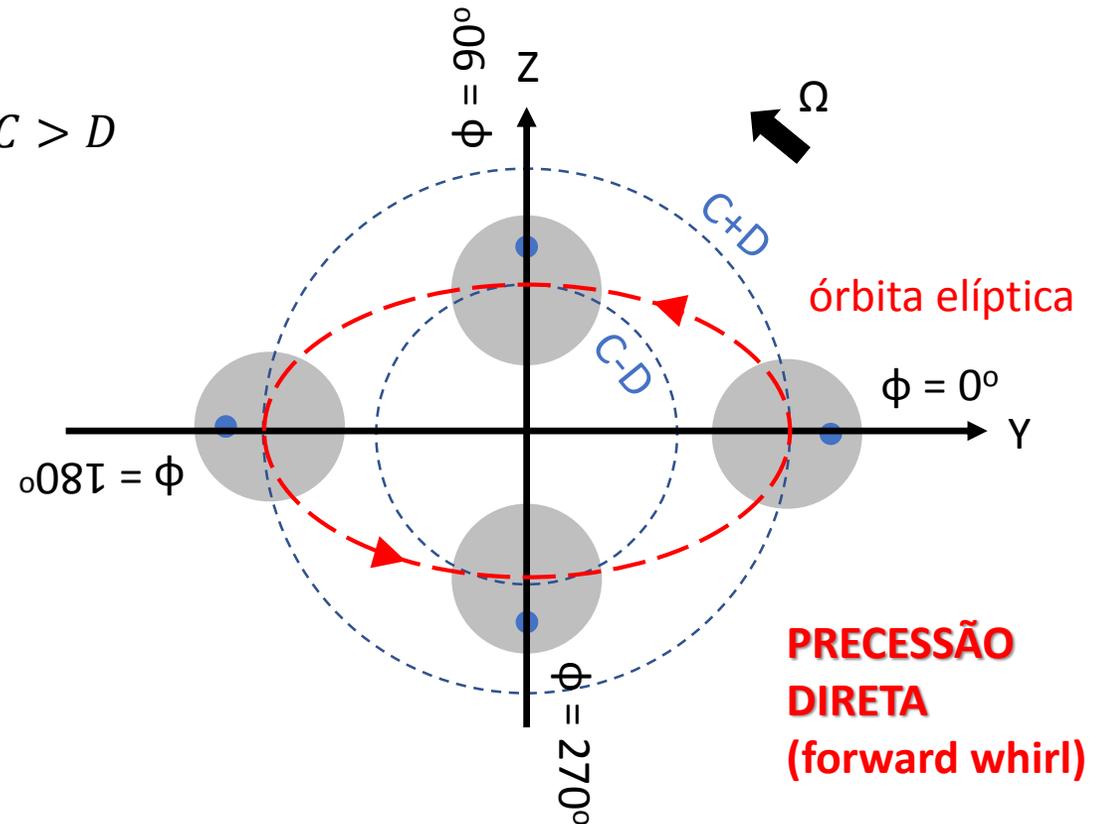
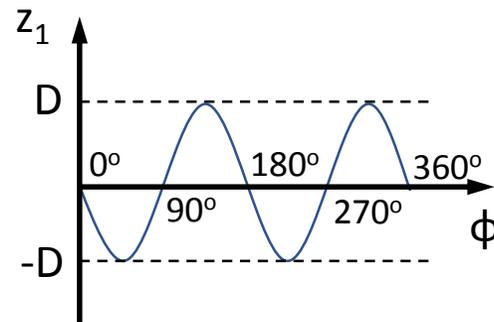
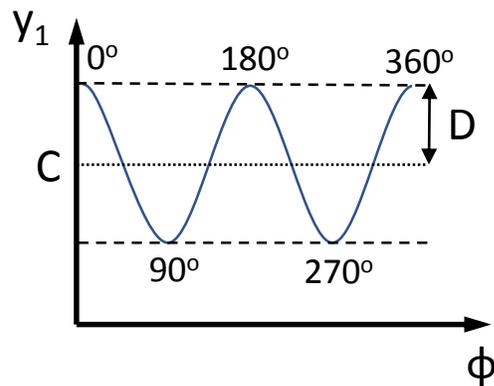
Regime Estacionário

Considere: a) $k_y < k_z \Rightarrow \omega_y < \omega_z$

b) $E \ll D \Rightarrow z_1 \approx -\frac{B}{A}D \sin 2\phi$

$$\Omega \ll \omega_y$$

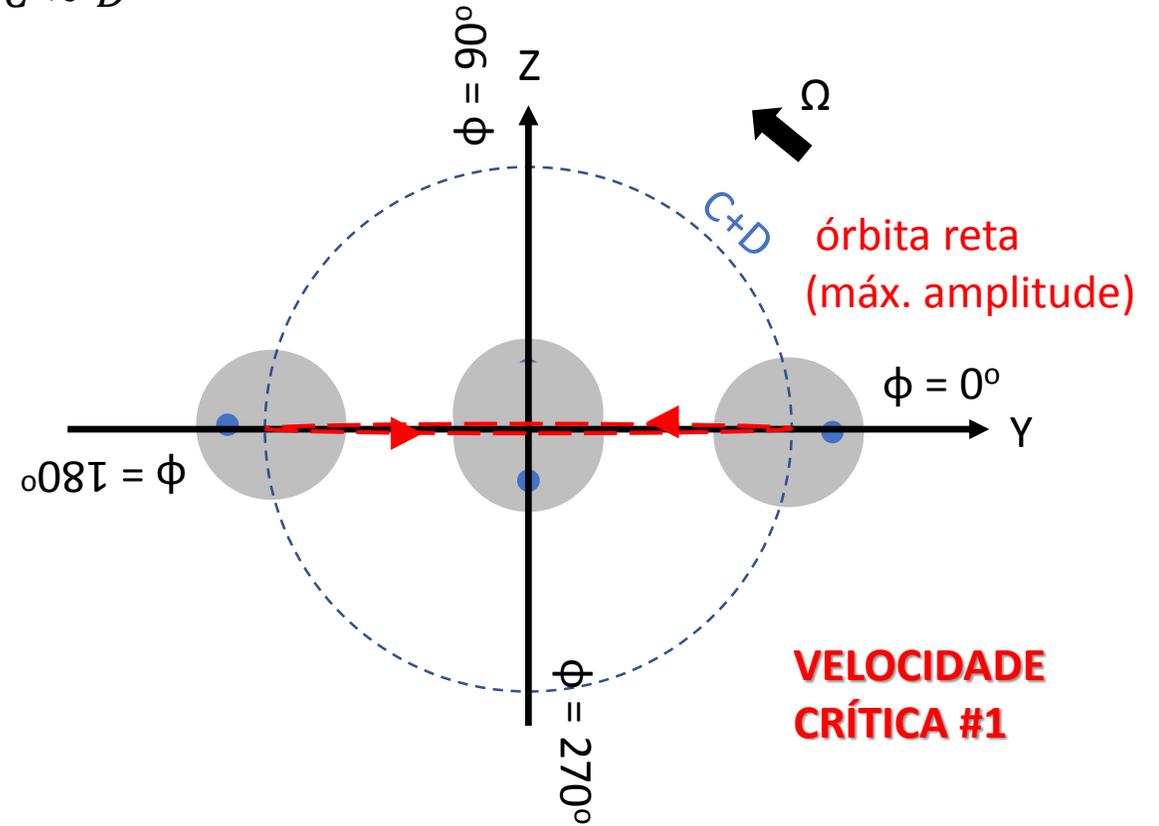
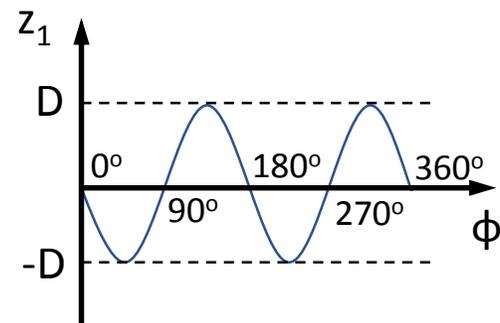
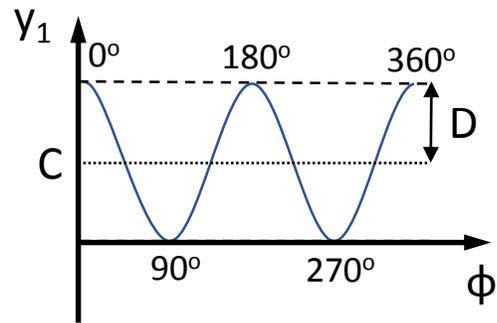
$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \approx \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) \\ D &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} C > D$$



Regime Estacionário

$$\Omega \approx \omega_y$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \approx \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) \\ D &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} C \approx D$$

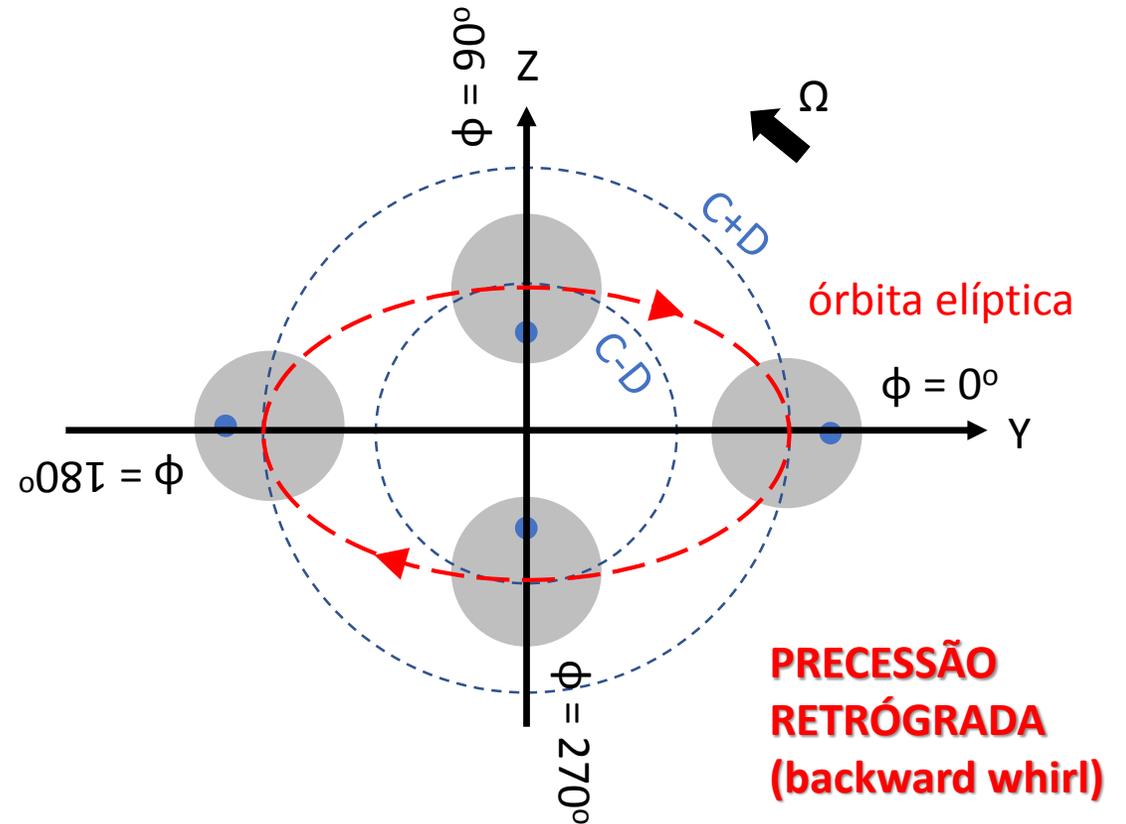
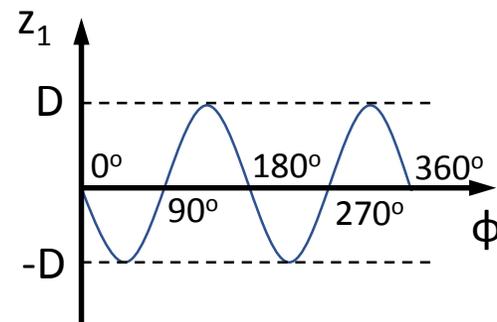
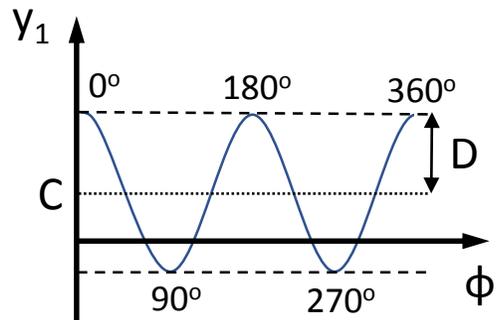


Regime Estacionário

$$\omega_y < \Omega < \bar{\omega}$$

onde $\bar{\omega} = \sqrt{1/2(\omega_y^2 + \omega_z^2)}$

$$\left. \begin{aligned} C &= 1/2(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \\ D &= 1/2(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} C < D$$

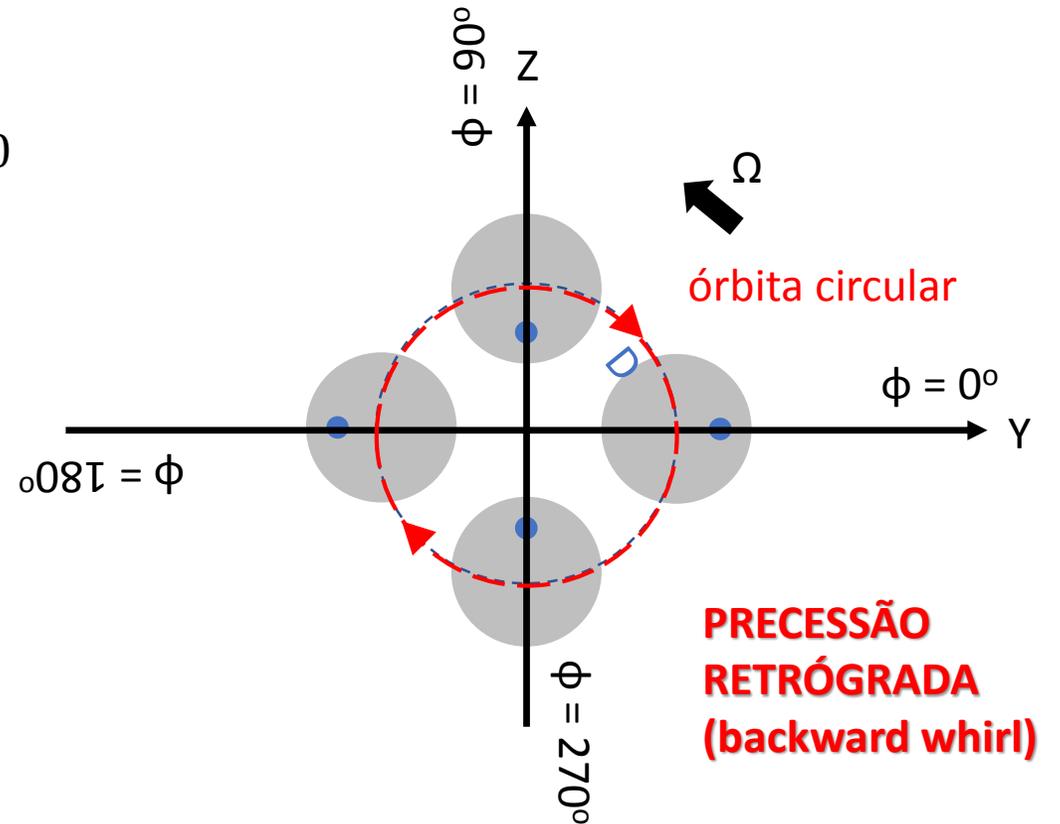
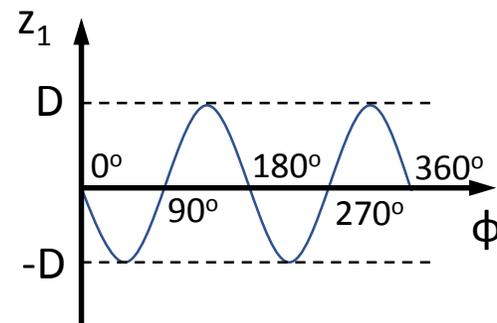
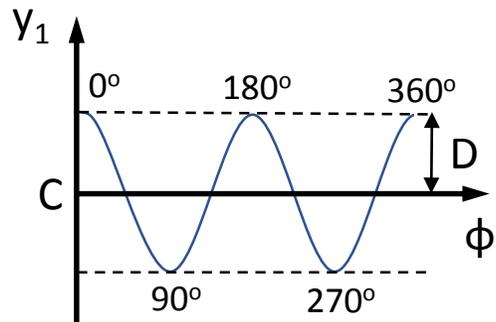


Regime Estacionário

$$\Omega = \bar{\omega}$$

onde $\bar{\omega} = \sqrt{1/2 (\omega_y^2 + \omega_z^2)}$

$$\left. \begin{aligned} C &= 1/2 (\omega_z^2 + \omega_y^2) - 1/2 (\omega_y^2 + \omega_z^2) \\ D &= 1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} C = 0$$

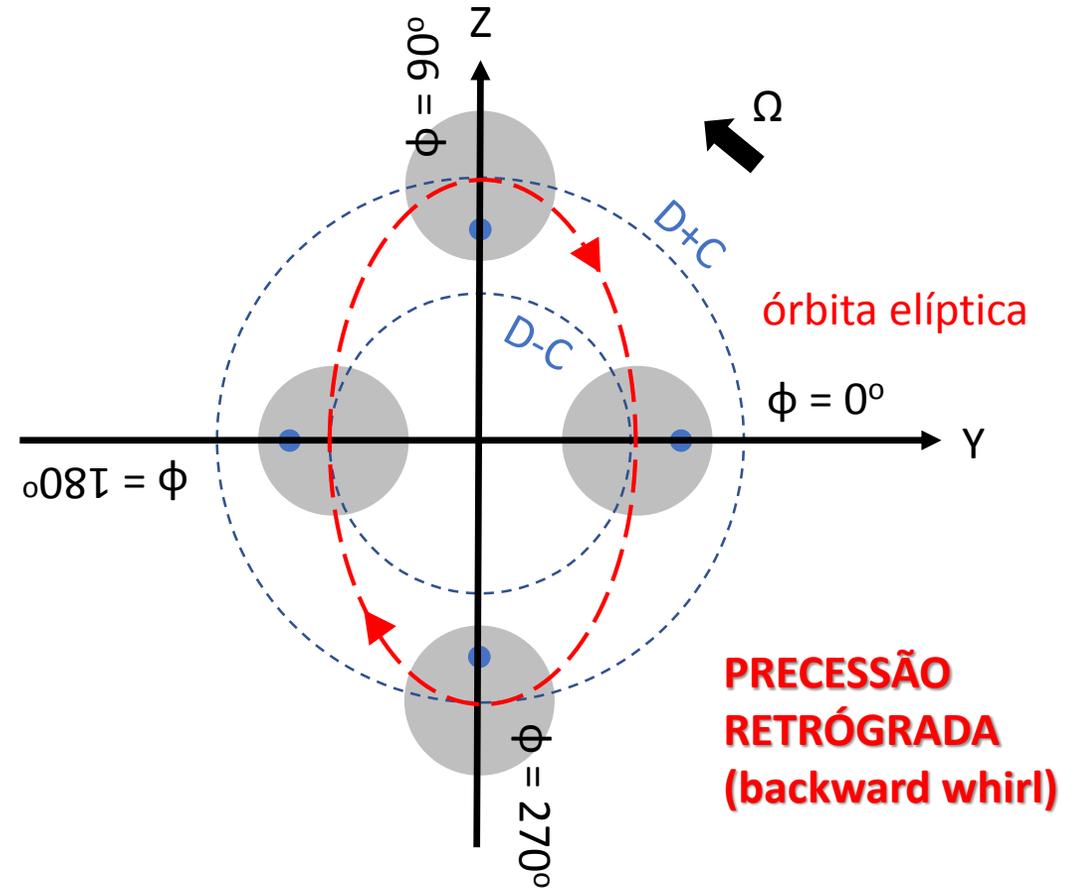
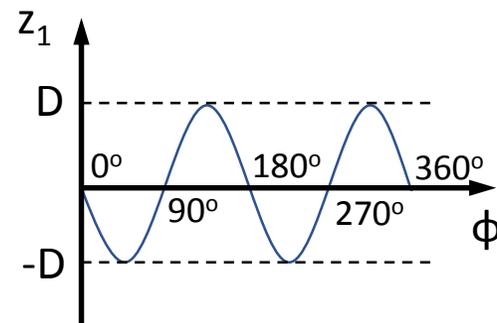
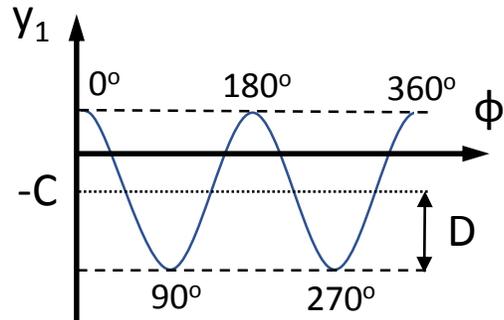


Regime Estacionário

$$\bar{\omega} < \Omega < \omega_z$$

onde $\bar{\omega} = \sqrt{1/2 (\omega_y^2 + \omega_z^2)}$

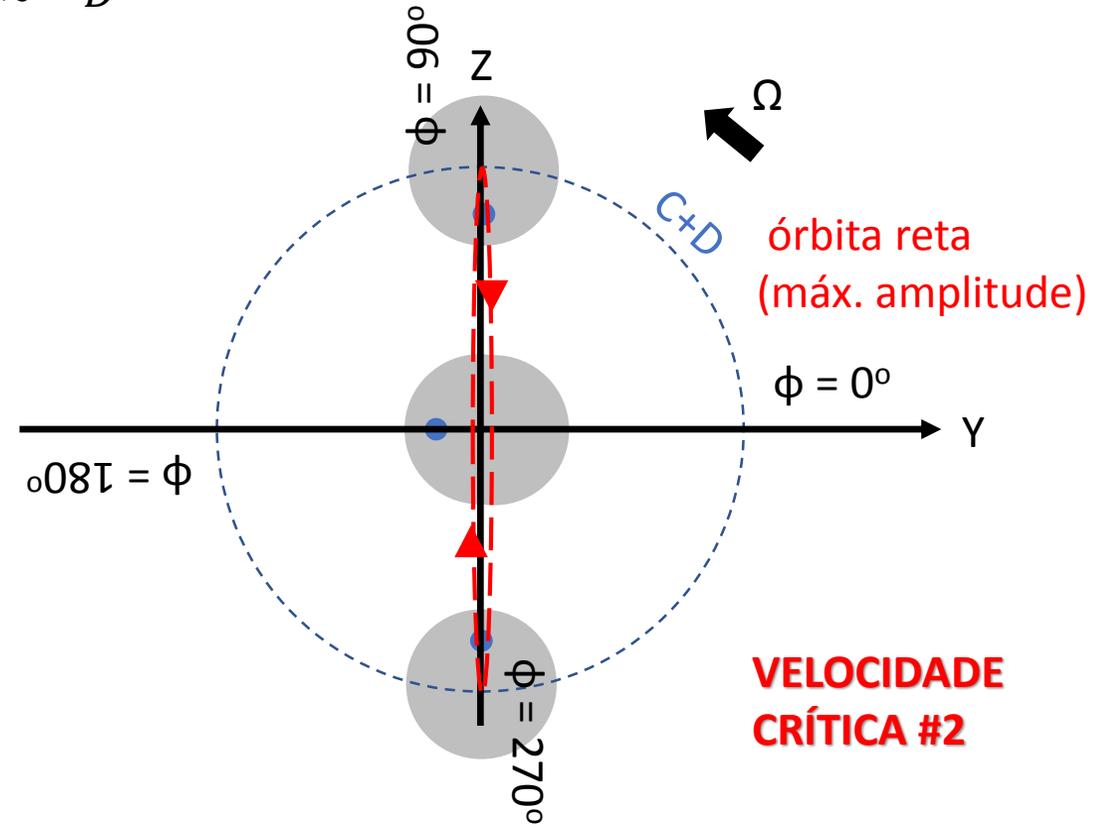
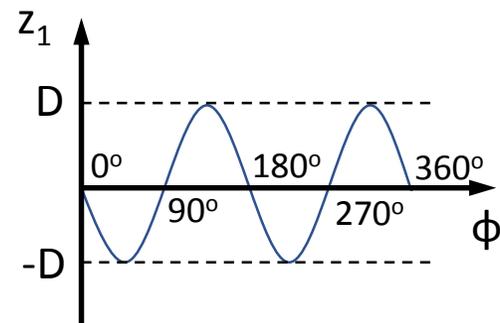
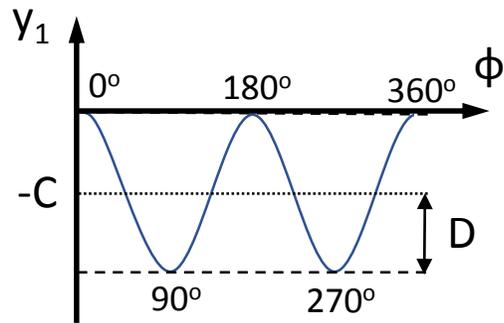
$$\left. \begin{aligned} C &= 1/2 (\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \\ D &= 1/2 (\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C &< 0 \\ |C| &< D \end{aligned}$$



Regime Estacionário

$$\Omega \approx \omega_z$$

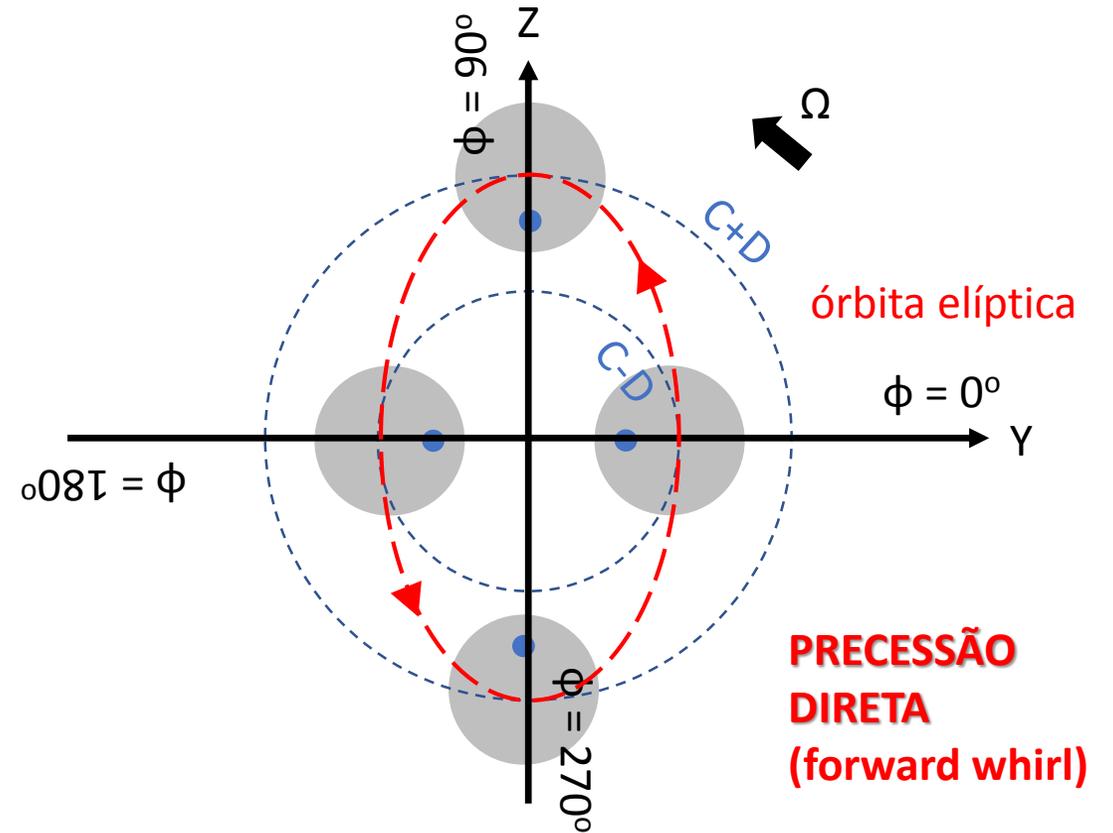
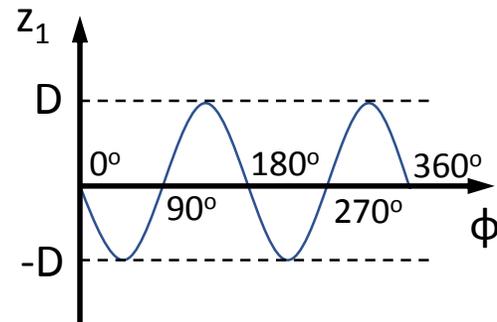
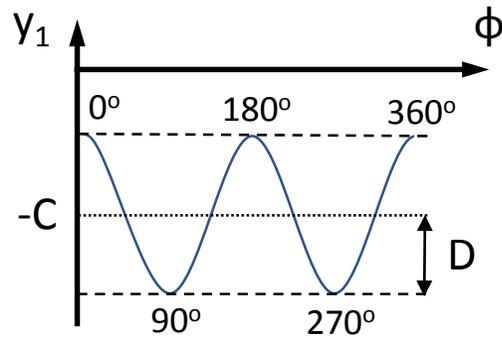
$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \approx \frac{1}{2}(\omega_y^2 - \omega_z^2) \\ D &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} C \approx -D$$



Regime Estacionário

$$\Omega > \omega_z$$

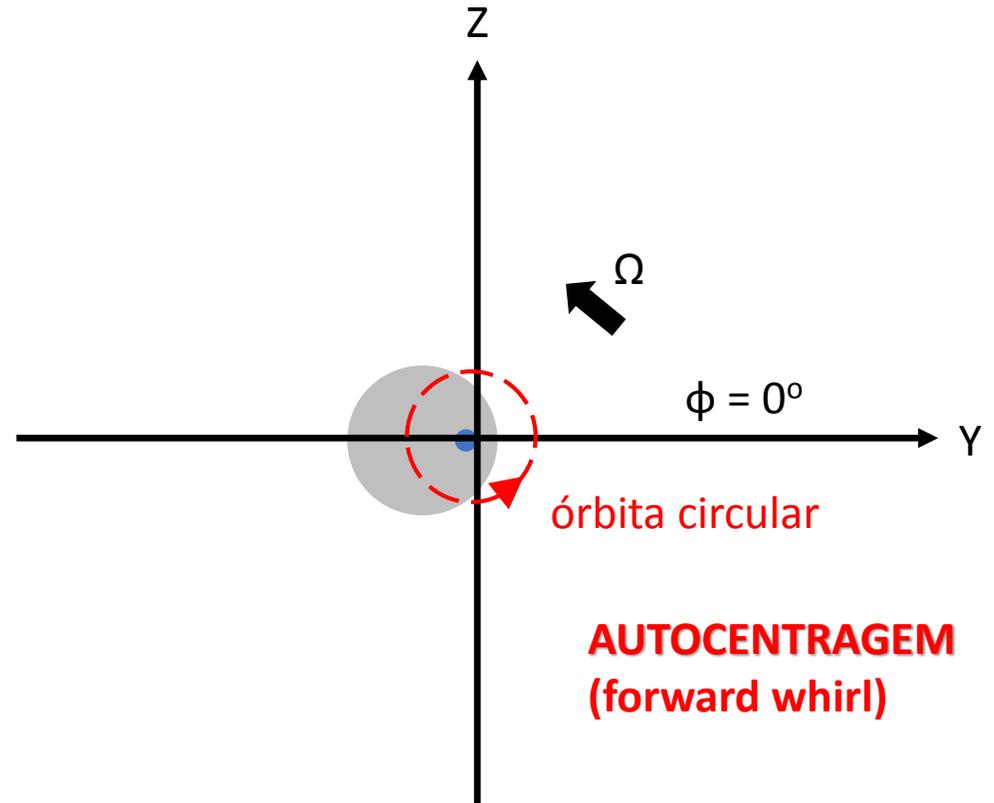
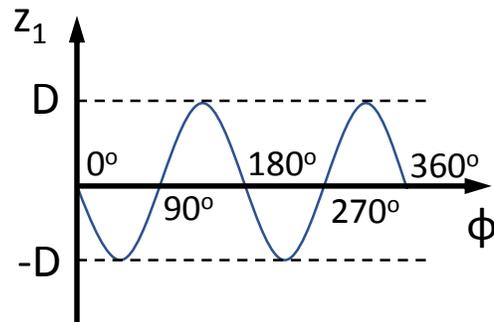
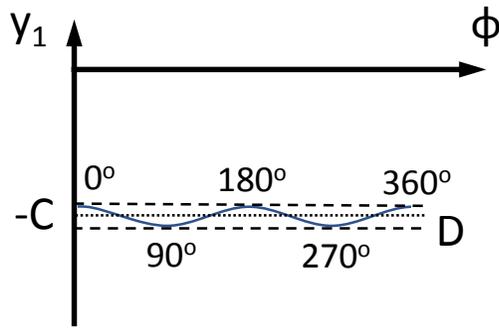
$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \\ D &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C &< 0 \\ |C| &> D \end{aligned}$$



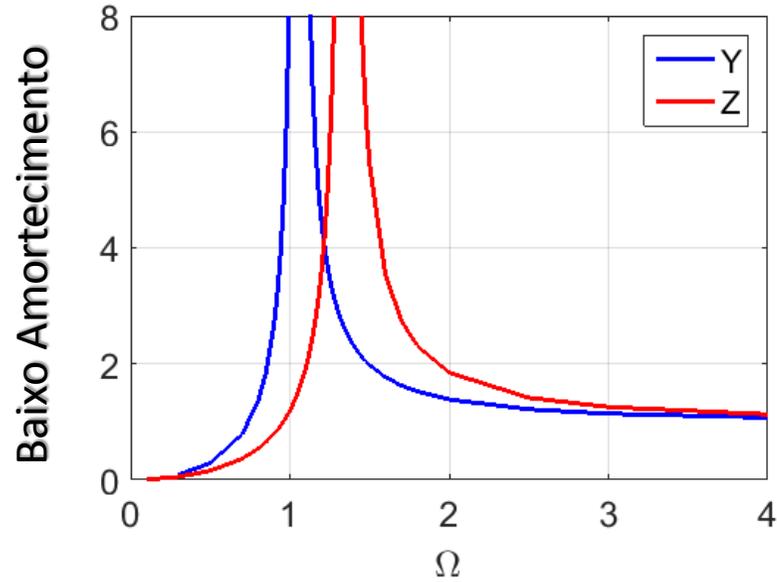
Regime Estacionário

$$\Omega \gg \omega_z$$

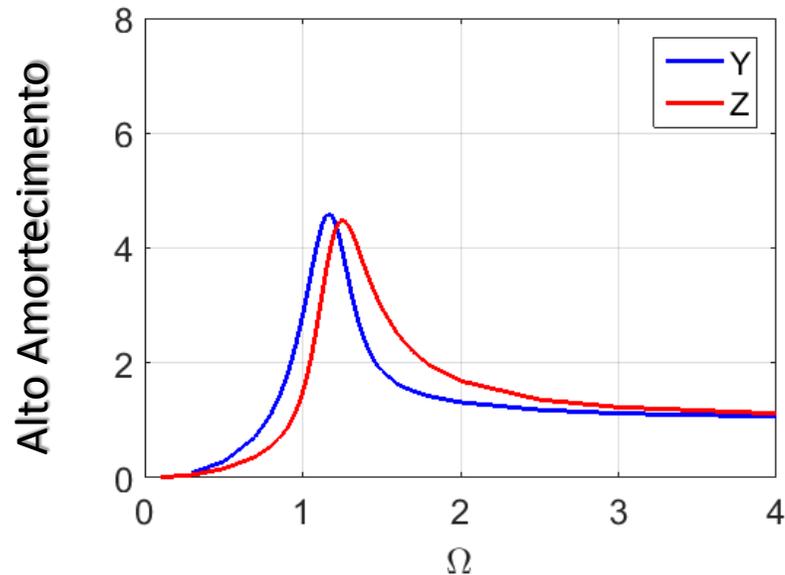
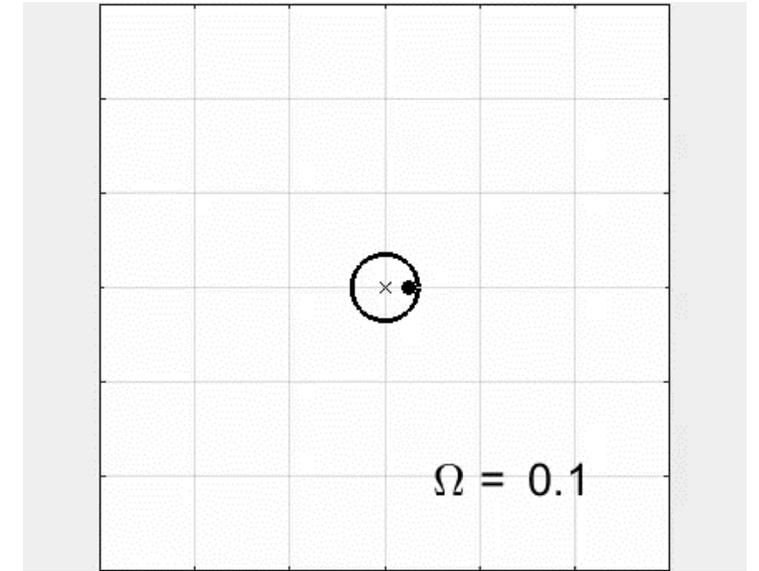
$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_y^2) - \Omega^2 \\ D &= \frac{1}{2}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = cte \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C &< 0 \\ |C| &\gg D \\ y_1 &\rightarrow e \end{aligned}$$



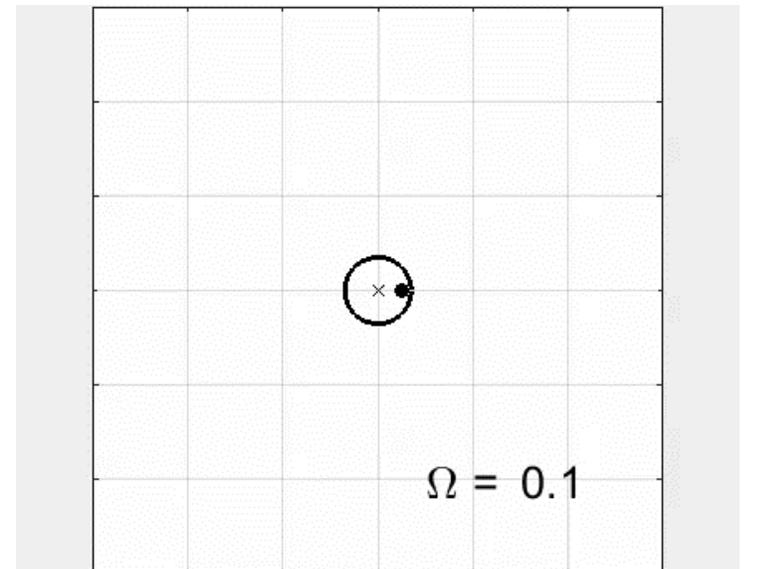
Regime Estacionário



- Duas velocidades críticas
- Precessão Direta em $\Omega < \omega_y$ e $\Omega > \omega_z$
- Precessão Retrógrada em $\omega_y < \Omega < \omega_z$
- Autocentragem em $\Omega \gg \omega_z$



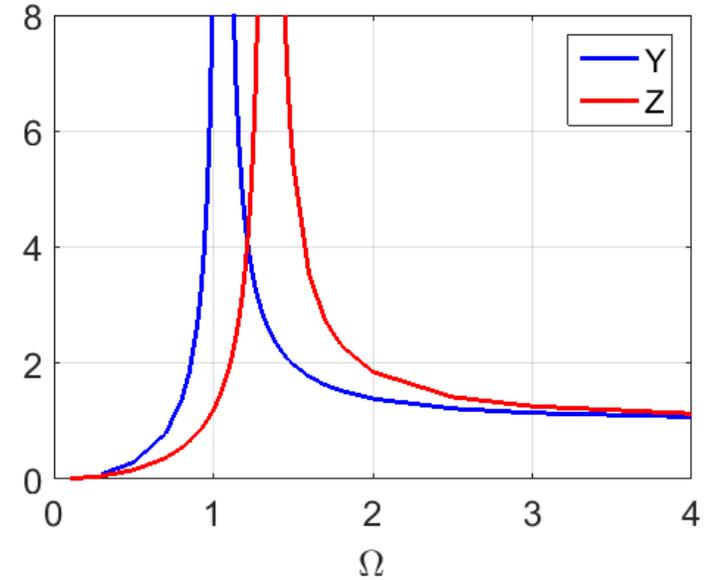
- Praticamente apenas uma velocidade crítica
- Precessão Direta em toda a faixa
- Autocentragem em $\Omega \gg \omega_z$



Conclusão

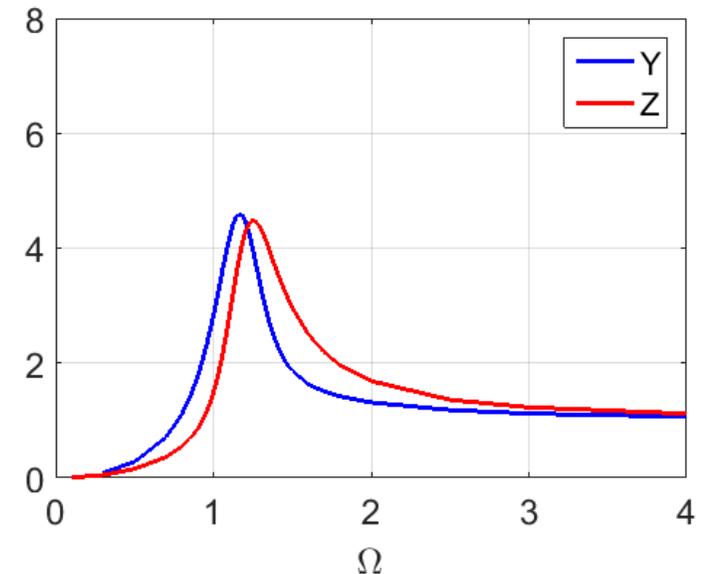
Rotor Rígido em Mancal Ortotrópico (baixo amortecimento)

- Apresenta órbitas elípticas
- Duas velocidades críticas (uma para cada direção)
- **Precessão Direta** em $\Omega < \omega_y$ e $\Omega > \omega_z$
(órbita no mesmo sentido da rotação do eixo)
- **Precessão Retrógrada** em $\omega_y < \Omega < \omega_z$
(órbita em sentido contrário ao da rotação do eixo)
- Autocentragem em $\Omega \gg \omega_z$



Rotor Rígido em Mancal Ortotrópico (alto amortecimento)

- Praticamente uma velocidade crítica apenas
- **Não ocorre precessão retrógrada**
- Apresenta órbitas elípticas
- Autocentragem em $\Omega \gg \omega_z$



Dúvidas ?

