

GABARITO - lista III

1) O espectro do sinal $\bar{x}(nT) = x(t) f_T(t)$ foi deduzido em sala e está repetido abaixo

$f_T(t)$ é um sinal periódico e, portanto, pode ser escrito como:

$$f_T(t) = \frac{1}{T} [1 + 2(\cos \omega_s t + \cos 2\omega_s t + \cos 3\omega_s t + \dots)]$$
$$\omega_s = \frac{1}{T}$$

Dessa forma,

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T} [x(t) + 2x(t) \cos \omega_s t + 2x(t) \cos 2\omega_s t + \dots]$$

$$x(t) \cos \omega_s t = \frac{1}{2} [x(t) e^{j\omega_s t} + x(t) e^{-j\omega_s t}]$$

$$x(t) e^{-j\omega t} \iff X(\omega + \omega_s)$$

$$x(t) e^{j\omega t} \iff X(\omega - \omega_s)$$

$$\therefore x(t) \cos \omega_s t = \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_s) + X(\omega - \omega_s)]$$

$$\therefore \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} [X(\omega) + X(\omega + \omega_s) + X(\omega - \omega_s) + X(\omega + 2\omega_s) + X(\omega - 2\omega_s) + \dots]$$

$$\therefore \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

Particularmente para este exercício, $T = \frac{1}{3}$ e, $\therefore \omega_s = \frac{2\pi}{13}$

$$\bar{X}(\omega) = 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 6\pi k)$$

como $x(t) = \cos \omega_0 t$

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

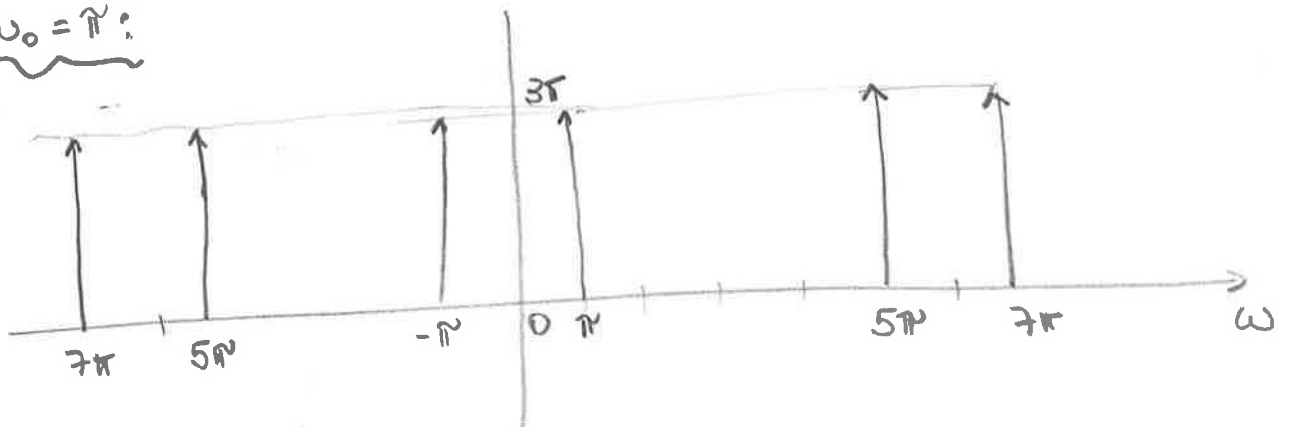
$$X(\omega - 6\pi k) = \pi \delta(\omega - 6\pi k - \omega_0) + \pi \delta(\omega - 6\pi k + \omega_0)$$

$$X(\omega + 6\pi k) = \pi \delta(\omega + 6\pi k - \omega_0) + \pi \delta(\omega + 6\pi k + \omega_0)$$

Supondo $-1 \leq k \leq 1$,

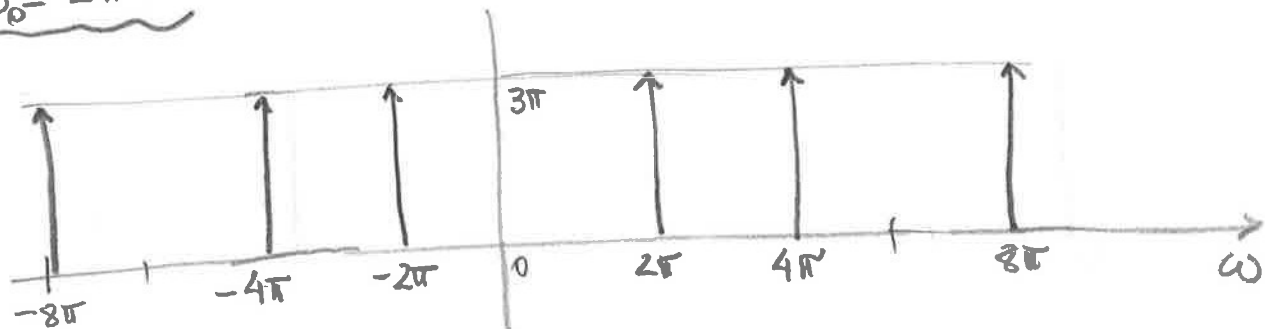
$$\begin{aligned} \bar{X}(\omega) &= 3 \left[X(\omega + 6\pi) + X(\omega) + X(\omega - 6\pi) \right] \\ &= 3\pi \left[\delta(\omega + 6\pi - \omega_0) + \delta(\omega + 6\pi + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega - 6\pi - \omega_0) + \delta(\omega - 6\pi + \omega_0) \right] \end{aligned}$$

$\omega_0 = \pi$:



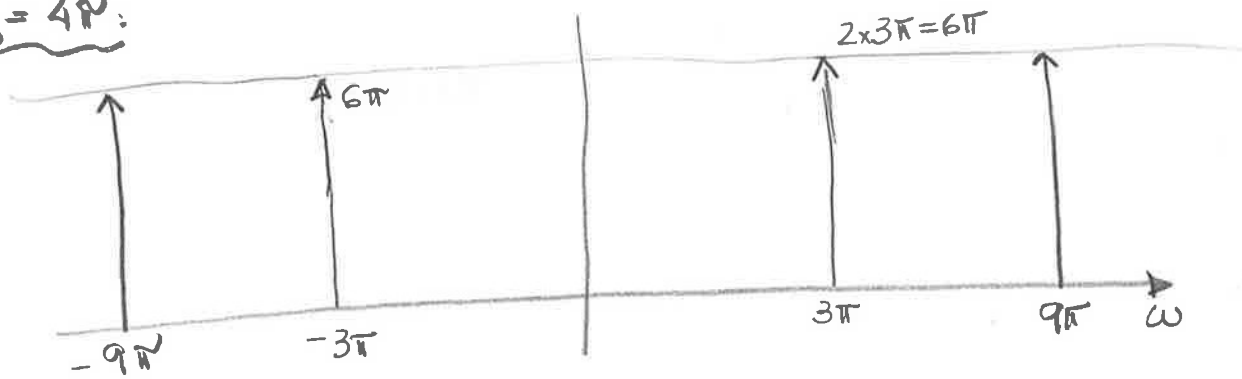
$$\begin{aligned} \bar{X}(\omega) &= 3\pi \left[\delta(\omega + 5\pi) + \delta(\omega + 7\pi) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega - 7\pi) + \delta(\omega - 5\pi) \right] \end{aligned}$$

$\omega_0 = 2\pi$:



$$\begin{aligned} \bar{X}(\omega) &= 3\pi \left[\delta(\omega + 4\pi) + \delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega - 8\pi) + \delta(\omega - 4\pi) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

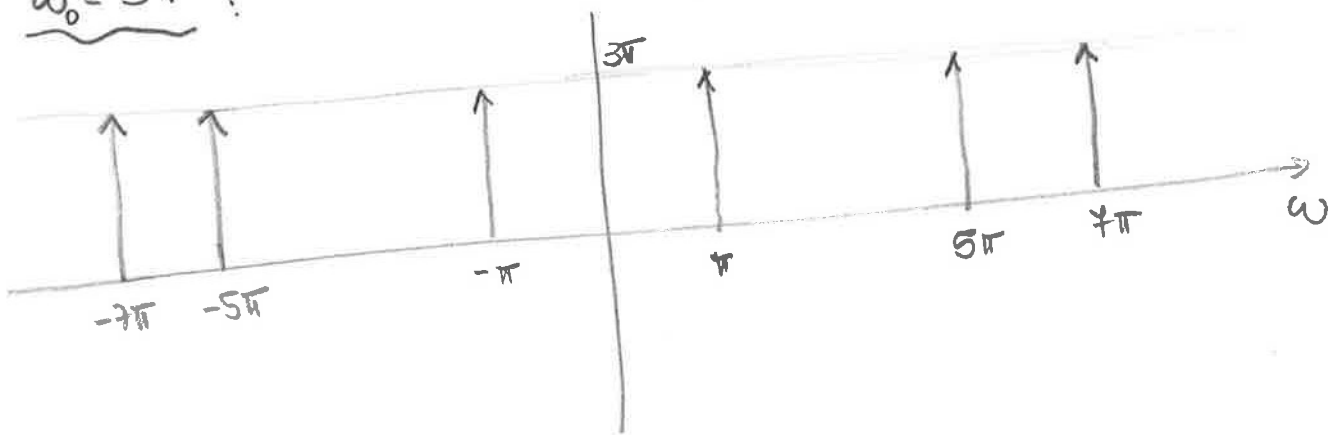
$\omega_0 = 4\pi$:



$$\bar{X}(\omega) = 3\pi \left[\delta(\omega + 3\pi) + \delta(\omega + 9\pi) + \delta(\omega - 3\pi) + \delta(\omega + 3\pi) + \delta(\omega - 9\pi) + \delta(\omega - 3\pi) + \dots \right]$$

OBS → Repare que, pela nossa equação truncada, a amplitude em 9π seria de 3π , porém se adicionarmos mais um termo $k=2$, percebe-se que o termo $\delta(\omega - 9\pi)$ é somado a $\bar{X}(\omega)$.

$\omega_0 = 5\pi$:



$$\bar{X}(\omega) = 3\pi \left[\delta(\omega + \pi) + \delta(\omega + 11\pi) + \delta(\omega - 5\pi) + \delta(\omega + 5\pi) + \delta(\omega - 11\pi) + \delta(\omega - \pi) + \dots \right]$$

OBS → Note-se, mais termos do somatório devem ser acrescentados para a equação coincidir com o gráfico.

b) De item (a), os sinais amostrados para $\omega_0 = \pi$ e $\omega_0 = 5\pi$ são idênticos.

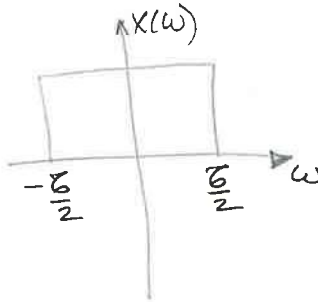
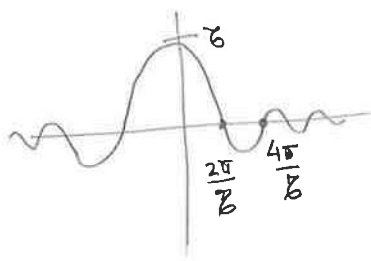
2) Sabe-se que $f_N = 2B$, onde B é a frequência máxima do espectro do sinal.

a) $x(t) = 1 + \cos 2000\pi t + \sin 4000\pi t$

$$B = \frac{4000\pi}{2\pi} = 2000$$

$$\therefore f_N = 4000 \text{ Hz}$$

b) $x(t) = \text{sinc}(50\pi t)$



$$\text{sinc}(50\pi t) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{100\pi} \text{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(50\pi t) \Leftrightarrow 0,02 \text{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$$

$$T \text{sinc}\left(\frac{Tt}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{B}\right)$$

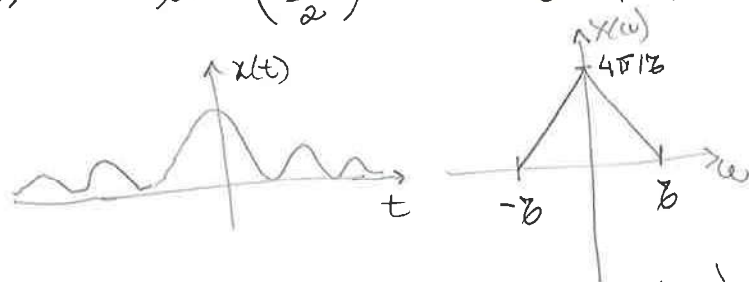
$\frac{T}{2} = 50\pi \Rightarrow T = 100\pi$ \therefore espectro varia entre $\pm 50\pi$

$$\therefore B = \frac{50\pi}{2\pi} = 25 \text{ Hz}$$

o que leva a $f_N = 2 \times 25 \text{ Hz} = 50 \text{ Hz}$

c) $x(t) = \text{sinc}^2(100\pi t)$

$$\text{sinc}^2\left(\frac{Tt}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \Delta\left(\frac{\omega}{2B}\right)$$



$$\frac{T}{2} = 100\pi \Rightarrow T = 200\pi$$

$$\text{sinc}^2(100\pi t) \Leftrightarrow 0,01 \Delta\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)$$

$$\therefore B = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$

o que leva a uma $f_N = 2 \times 100 \text{ Hz} = 200 \text{ Hz}$

$$d) x(t) = \text{sinc}(100\pi t) + 3 \text{sinc}^2(60\pi t)$$

$$\hookrightarrow \frac{\omega_c}{2} = 60\pi \Rightarrow \omega_c = 120\pi$$



$$\frac{2\pi}{200\pi} \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) + \frac{3 \times 2\pi}{120\pi} \Delta\left(\frac{\omega}{240\pi}\right) =$$

$$= \underbrace{0,01 \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)}_{\text{varia entre } \pm \frac{\omega_c}{2} = \pm 50\text{Hz}} + \underbrace{\frac{1}{20} \Delta\left(\frac{\omega}{240\pi}\right)}_{\text{varia entre } \pm \omega_c = \pm 60\text{Hz}}$$

A largura de banda da soma é o maior dos valores, i. e., $B = 60 \text{ Hz}$. Portanto, $f_N = 2 \times 60 = 120 \text{ Hz}$

$$e) x(t) = \text{sinc}(50\pi t) \text{sinc}(100\pi t)$$

$$\text{sinc}(50\pi t) \iff 0,02 \text{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(100\pi t) \iff 0,01 \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$$

Os dois sinais que compõem $x(t)$ têm largura de banda de 25 Hz e 50 Hz , respectivamente. Existe uma propriedade da convolução importante para resolver este problema: a largura do sinal resultante da convolução é a soma das larguras de cada sinal.

$$\therefore B = 25 + 50 = 75 \text{ Hz}$$

$$\text{Portanto, } f_N = 2 \times 75 = 150 \text{ Hz}$$

(2)

$$x_1(t) = \cos 20\pi t$$

$$x_2(t) = \cos 100\pi t$$

$$f_s = 40 \text{ Hz} \implies T = \frac{1}{40}$$

$$a) \therefore x_1(nT) = \cos(20\pi nT) = \cos \frac{20\pi}{40} n$$

$$x_1(nT) = \cos \frac{\pi}{2} n$$

$$x_2(nT) = \cos(100\pi nT) = \cos \frac{100\pi}{40} n$$

$$x_2(nT) = \cos \frac{5\pi}{2} n = \cos \left(2\pi n + \frac{\pi}{2} n \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} n \right)$$

\therefore Os sinais amostrados x_1 e x_2 são idênticos e, \therefore , não se pode distinguir. Se, portanto, o sinal é amostrado a $\cos \left(\frac{\pi}{2} n \right)$ não se pode dizer se o sinal corresponde a x_1 ou x_2 .

Como x_2 resulta nos mesmos valores de x_1 para uma amostragem de 40 Hz, diz-se que a frequência $f = 50 \text{ Hz}$ é uma "aliás" da frequência $f = 10 \text{ Hz}$ à uma taxa de amostragem de 40 Hz.

b) Aprendermos em sala que duas amostras não idênticas quando cada uma de suas frequências tem a mesma réplica periódica em múltiplos de f_s :

$$f_i = f_0 + f_s i$$

$$x_i(t) = \cos(2\pi f_i t)$$

$$t = nT = \frac{n}{f_s}$$

$$\therefore x_i(nT) = \cos\left[2\pi(f_0 + f_s i) \frac{n}{f_s}\right]$$

$$x_i(nT) = \cos\left[2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi i n\right]$$

$$x_i(nT) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) \cos(2\pi i n) + \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) \sin(2\pi i n)$$

$$\boxed{x_0(nT) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right)}$$

independente de i

\therefore , para $f_s = 40 \text{ Hz}$, as frequências:

$f_i = 10 + 40i$ são todas "alias" de $f_s = 10 \text{ Hz}$.

OBS $\frac{f_0}{f_s} \times 2\pi \Rightarrow$ frequência digital

$2\pi f_0 \Rightarrow$ frequência analógica

4)

$$a) x(t) = 2 e^{j\pi/3} e^{-j2\pi 30t} + 4 e^{-j2\pi 10t} + 4 e^{j2\pi 10t} + 2 e^{-j\pi/3} e^{j2\pi 30t} + 5$$

Juntaando os termos em comum para formar cosseno

$$x(t) = 2 \times 2 \left[\frac{e^{j(2\pi 30t - \pi/3)} + e^{-j(2\pi 30t - \pi/3)}}{2} \right] +$$

$$+ 4 \times 2 \left[\frac{e^{-j2\pi 10t} + e^{j2\pi 10t}}{2} \right] + 5$$

$$x(t) = 4 \cos(60\pi t - \pi/3) + 8 \cos(20\pi t) + 5$$

$$b) \cos 60\pi t \Rightarrow \text{período } T = \frac{2\pi}{60\pi} = \frac{1}{30} \Delta$$

$$\cos 20\pi t \Rightarrow \text{período } T = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10} \Delta$$

Se for difícil entender, faça as curvas no Matlab

Devido à soma dos sinais, o período fundamental será um valor de amostra comum entre ambos. $1/30$ subdivide $1/10$ e o período é $1/10 \Delta$ e a frequência fundamental é 10 Hz.

Se o sinal fosse $\cos^2(60\pi t) \Rightarrow$ período $T = \frac{\pi}{60\pi} = \frac{1}{60} \Delta$ e frequência fundamental de 60 Hz.

$$c) f_s = \frac{1}{T_s} = 50 \text{ Hz}$$

$$x[n] = x(n T_s) = x(n/f_s)$$

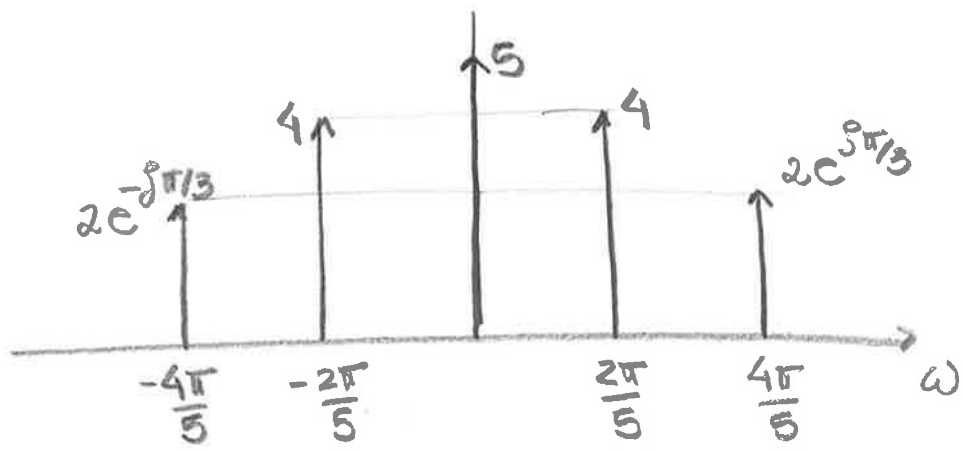
$$= 4 \cos(60\pi n/50 - \pi/3) + 8 \cos(20\pi n/50) + 5$$

$$= 4 \cos\left(\frac{6\sqrt{\pi} n}{5} - \frac{\pi}{3}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\sqrt{\pi} n}{5}\right) + 5$$

$$= 4 \cos\left(2\pi n - \frac{4}{5}\pi n - \frac{\pi}{3}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\sqrt{\pi} n}{5}\right) + 5$$

$$x[n] = 4 \cos\left(\frac{4}{5}\pi n + \frac{\pi}{3}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\sqrt{\pi} n}{5}\right) + 5$$

08



5)

$$x(t) = 3 \cos 100\pi t$$

a) $\omega = 100\pi$

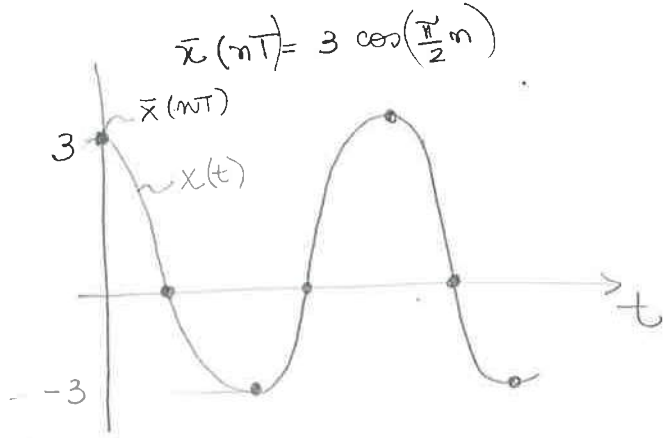
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

A frequência de Nyquist necessária para evitar aliasing é $f_N = 2 \times f = 100 \text{ Hz}$.

b) $f_s = 200 \text{ Hz}$

$$\bar{x}(nT) = 3 \cos 100\pi nT$$

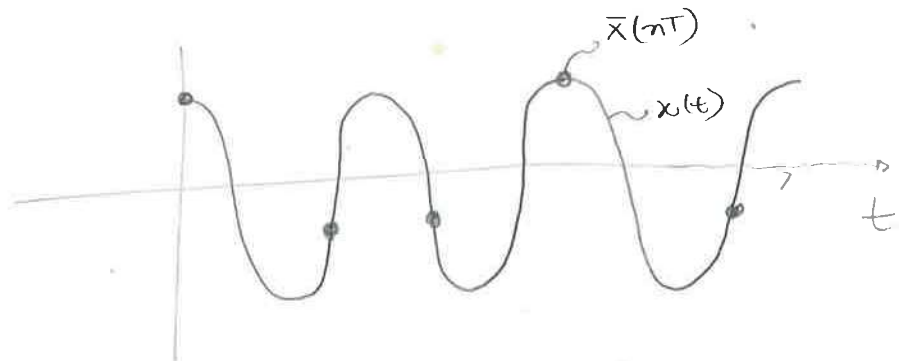
$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{200}$ $\therefore \bar{x}(nT) = 3 \cos \frac{100\pi n}{200}$



c) $f_s = 75 \text{ Hz}$

$$\bar{x}(nT) = 3 \cos 100\pi nT$$

$$\bar{x}(nT) = 3 \cos \frac{100\pi n}{75} = 3 \cos \left(\frac{4\pi}{3} n\right) = 3 \cos \left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$



d) A amostragem a 75 Hz gera aliasing. Para essa taxa, pergunta-se, $f = 50$ Hz é um "alias" de qual frequência?

Temos, no item c), $\bar{x}(nT) = 3 \cos \frac{2\pi}{3} n$

$$\therefore f = \frac{2\pi}{3 \times 2\pi} = \frac{1}{3}$$

A frequência do sinal amostrado é $\frac{1}{3}$.

Do exercício anterior sabe-se que a frequência deve seguir:

$$\frac{f_0}{f_s} = \frac{1}{3} \Rightarrow f_0 = \frac{75}{3} = 25 \text{ Hz}$$

$\therefore y(t) = 3 \cos 2\pi \times 25 t = 3 \cos 50\pi t$ amostrado a

$f_s = 75$ Hz gera um sinal

$$\bar{y}(nT) = \bar{x}(nT)$$

$$6) \quad 1) \quad x(t) = 3 \cos 50\pi t + 10 \sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

f_N : já sabemos que está relacionada com a maior frequência entre os sinais que formam $x(t)$

$$B_1 = 25 \text{ Hz} \quad B_2 = 150 \text{ Hz} \quad B_3 = 50 \text{ Hz}$$

$$\therefore B = 150 \text{ Hz}$$

$$f_N = 2B = 300 \text{ Hz}$$

$$b) \quad y(t) = 10 \sin 300\pi t$$

$$y(nT) = 10 \sin \frac{300\pi nT}{300} = 10 \sin n\pi = 0, \quad \forall n$$

Este é um caso especial para ressaltar a vez um detalhe do teorema da amostragem. Para nos certificarmos da reconstrução exata de qualquer sinal qual com base em suas amostras, a taxa de amostragem deve ser maior do que a taxa de Nyquist em lugar de pelo menos a taxa de Nyquist. Nos exemplos em que a potência do sinal exatamente na frequência de Nyquist é zero, esse detalhe não tem importância.

No caso de novo exemplo, amostramos o sinal exatamente quando ele passa pelo zero, e, portanto, ele foi completamente desconsiderado na composição amostral de $\tilde{x}(nT)$.

c)

Qualquer senoide a certa frequência pode ser representada como a soma de um cosseno e um

seno:

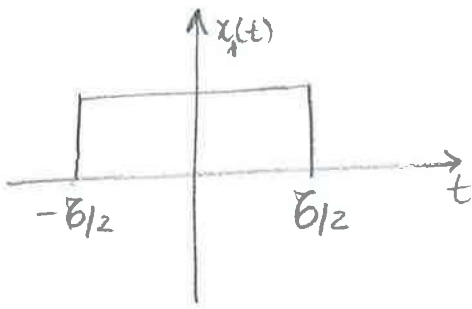
$$A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \underbrace{A \cos \theta}_{A_c} \cos 2\pi f_0 t - \underbrace{A \sin \theta}_{A_s} \sin 2\pi f_0 t$$

$$A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = A_c \cos 2\pi f_0 t + A_s \sin 2\pi f_0 t$$

Portanto, quando a senoide é amostrada exatamente à sua taxa de Nyquist, a parte do seno é descartada, restando somente $A_c \cos 2\pi f_0 t$.

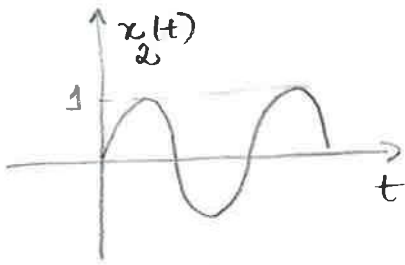
Veja que não há ambigüidade na frequência f_0 , mas sim na amplitude $A \neq A_c$ e fase.

$$7) x(t) = \cos(8\pi t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$



$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{B}\right) \Leftrightarrow B \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega B}{2}\right)$$

$$\therefore \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \operatorname{sinc}(\omega)$$



$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right]$$

$$\therefore \cos(8\pi t) \Leftrightarrow \pi \left[\delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega - 8\pi) \right]$$

Multiplicação no domínio do tempo é convolução no domínio da frequência.

$$x_1(t) = \operatorname{rect}(t/2)$$

$$X_1(\omega) = 2 \operatorname{sinc} \omega$$

$$x_2(t) = \cos 8\pi t$$

$$X_2(\omega) = \pi \left[\delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega - 8\pi) \right]$$

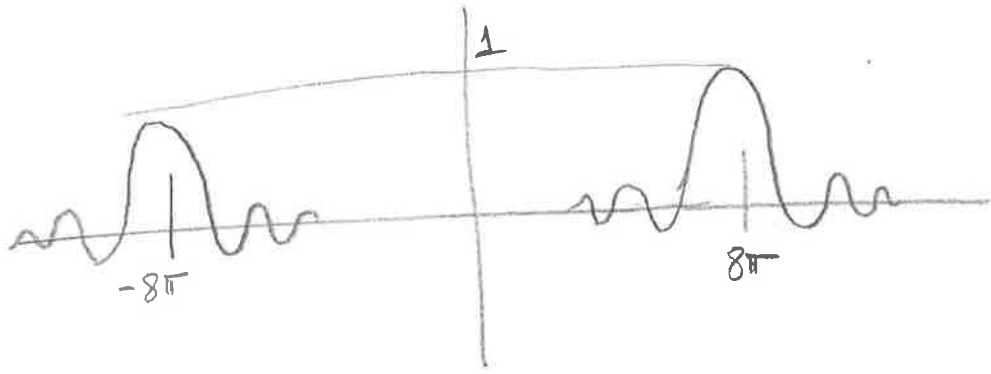
Convolução na frequência:

$$X_1(\omega) * X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) X_2(\omega - \Omega) d\Omega$$

$$X_1(\omega) * X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\Omega) \left[\delta(\omega + 8\pi - \Omega) + \delta(\omega - 8\pi - \Omega) \right] d\Omega$$

$$X_1(\omega) * X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \Omega \delta(\omega + 8\pi - \Omega) d\Omega + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \Omega \delta(\omega + 8\pi + \Omega) d\Omega$$

$$\therefore X_1(\omega) * X_2(\omega) = \left\{ \operatorname{sinc}(\omega + 8\pi) + \operatorname{sinc}(\omega - 8\pi) \right\}$$



O espectro é obtido deslocando $X_1(\omega)$ para direita por 8π e para esquerda por 8π e, então, multiplicando-se por $1/2$.

8) a) Pelo teorema da amostragem,

$$f_s \geq \frac{2W}{2T} \quad \text{ou} \quad \frac{2T}{T} \geq 2W \quad \therefore T \leq \frac{\pi}{W} \Rightarrow T_{\max} = \frac{\pi}{W}$$

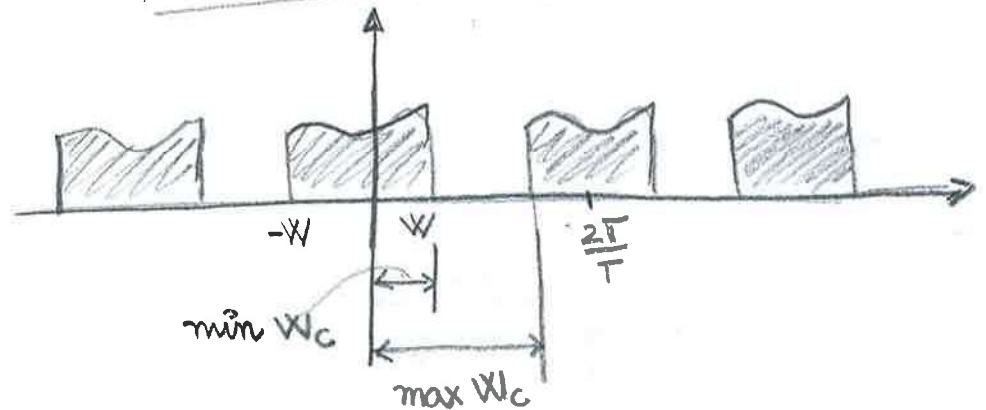
$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) \Rightarrow \text{já deduzimos e usamos várias vezes essa equação. Se você ainda não sabe de onde veio, volte no ex. 1 para lembrar.}$$

\Downarrow
 \Downarrow
 Portanto, $A=T$

O mínimo valor de W_c é W para que não se perca nenhuma informação, e o máximo valor de W_c é $\frac{2\pi}{T} - W$ para que as réplicas no espectro não apareçam em $X_r(t)$.

Portanto,

$$W \leq W_c \leq \frac{2\pi}{T} - W$$



b) (1) Convulsão no tempo é multiplicação na frequência.

$$\therefore X(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > W$$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{W}, \quad A=T, \quad W < W_c < \frac{2\pi}{T} - W$$

(II) A largura da soma é o maior dos valores,

$$\therefore X(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > 2W$$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{2W}, \quad A = T, \quad 2W < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - 2W$$

(III) Multiplicação no tempo é convolução na frequência
(soma das faixas)

$$\therefore X(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > 3W$$

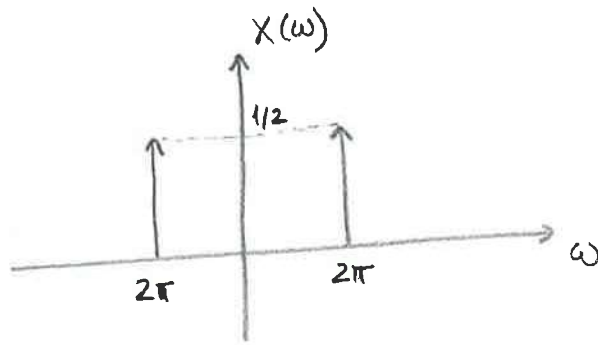
$$T_{\max} = \frac{\pi}{3W}, \quad A = T, \quad 3W < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - 3W$$

(IV) Expansão no tempo é contração na frequência.

$$\therefore X(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \frac{W}{10}$$

$$T_{\max} = \frac{10\pi}{W}, \quad A = T, \quad \frac{W}{10} < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{W}{10}$$

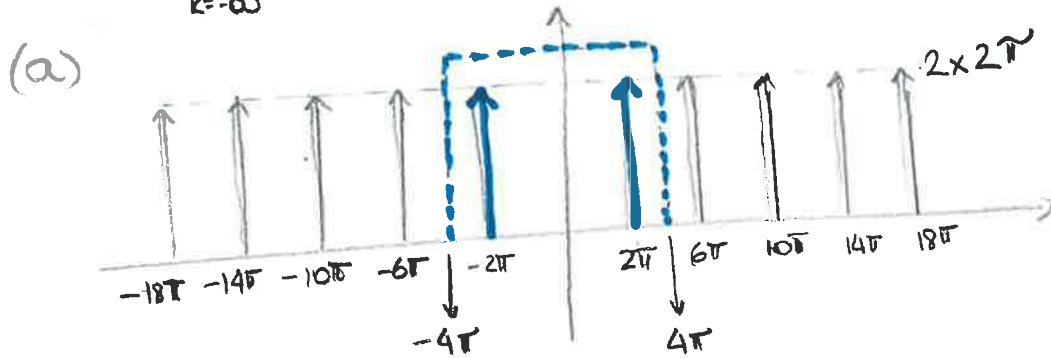
9)



$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$



$$T_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

$$\bar{X}(\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 4\pi k), \quad X(\omega) = \pi [\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

○ desenvolvimento é bastante similar ao ex. 1.
(Reveja o ex. 1, se necessário)

Para recuperar $x(t)$, tem-se:

$$X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

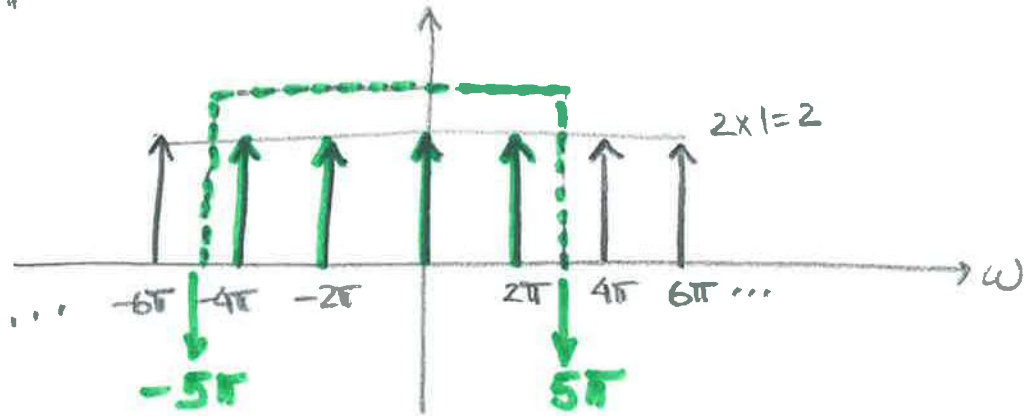
$$X(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$$

$$\therefore X(\omega) = 4\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \Leftrightarrow x(t) = 2(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t})$$

$$\therefore \hat{x}(t) = 4 \cos 2\pi t$$

(b) $T_s = 1$

$\omega = 5\pi$



$$x(t) = \frac{1}{2} \left[2 + 4 \cos 2\pi t + 4 \cos 4\pi t \right]$$

$$\hat{x}(t) = 1 + 2 \cos 2\pi t + 2 \cos 4\pi t$$

40) (a) $x[m] = 9 \cos \left(2\pi F_s \frac{m}{100} - \frac{\pi}{2} \right)$



tempo vai de 0 - 0.3
m vai de 1 - 31

$\therefore x[m] = 9 \cos \left(2\pi (396) \frac{m}{100} - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$

$396 \Rightarrow 3,96 \times 100$

$\therefore \cos(2\pi(3,96)m) = \cos(2\pi(3+0,96)m) =$
 $\cos(2\pi \times 0,96m) = \cos(2\pi(-0,04)m)$

$\therefore x[m] = 9 \cos \left[2\pi \times 0,04m + \frac{\pi}{2} \right]$

(b) Período: 25 amostras
 $dt = \frac{1}{100}$ seg

1 amostra — 1/100 kg
25 amostras — T

$T = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ s

\therefore O sinal aparente
ter uma frequência
de 4 Hz

OBS \rightarrow errar o eixo x é um erro comum, não só
no gráfico do domínio do tempo mas, principal-
mente, no domínio da frequência.