Lista II de Exercícios

Transformada de Fourier

1. Considere os sinais abaixo. Calcule a Transformada de Fourier (TF), construa os diagramas de módulo e fase em função da frequência. Considere frequência positiva e negativa.

   a. $u(t)$

   b. $e^{-at}u(t)$, a real e positivo

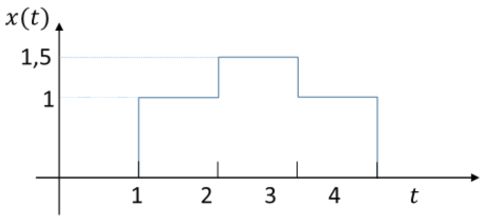
   OBS.: O que acontece quando $a \to 0$?

   c. $e^{-a|t|}u(t)$, a real e positivo

   d. $\delta(t-8)$

   e. $e^{(-1+2j)t}u(t)$

2. Use as propriedades da linearidade e translação para resolver o exercício abaixo.



3. Calcule a Transformada de Fourier de um pulso triangular.

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & \text{se } |t| < \tau \\ 0 & \text{se } |t| > \tau \end{cases}$$

4. Da solução do exercício 1, sabemos que, se

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

então

$$X(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$$

Então, usando as propriedades de linearidade e dualidade, obtenha a Transformada de Fourier dos sinais:

a. $y(t) = \frac{1}{4+t^2}$

b. $z(t) = \frac{1}{4+t^2}\cos 2t$

5. Obtenha a transformada de Fourier,
   a. De um impulso unitário $\delta(t)$;
   b. Da função degrau $u(t)$, a partir da definição $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$
   c. A partir do item b, derive a resposta e recupere a solução do item a.

6. Considere o sinal $x(t)$, que consiste em um único impulso retangular de altura unitária, simétrico em relação à origem e de largura total T_1.
   a. Esboce $x(t)$.
   b. Esboce $y(t)$, que é uma repetição periódica de $x(t)$ com período $T_0 = 3T_1/2$.
   c. Calcule a transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$. Esboce o módulo $|X(\omega)|$ para $|\omega| \leq 6\pi/T_1$.
   d. Calcule os coeficientes a_k da série de Fourier de $y(t)$. Esboce a_k para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
   e. Usando suas respostas para c,d, verifique se, para este exemplo,

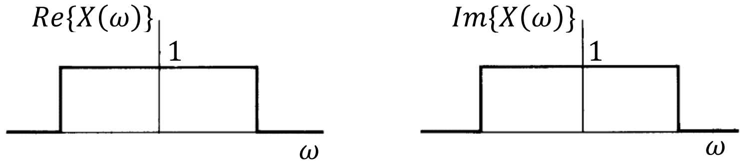
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega = 2\pi k/T_0}$$

7. Considerando a equação de análise de Fourier ou a equação de síntese, mostre a validade em geral de cada uma das seguintes afirmações sobre $x(t)$ e seu conjugado $x^*(t)$:
   a. Se $x(t)$ é valor real, então $X(\omega) = X^*(-\omega)$.
   b. Se $x(t) = x^*(-t)$, então $X(\omega)$ é real.

   Usando as declarações dos itens a, b, mostre a validade de cada uma das seguintes afirmações:

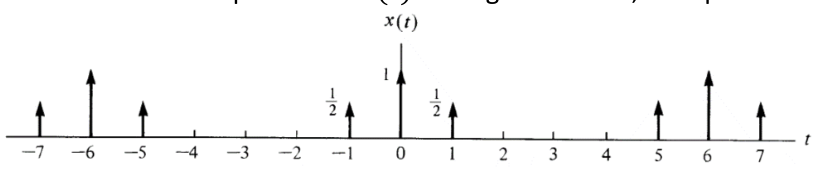
   c. Se $x(t)$ é real e par, então $X(\omega)$ é real e par.
   d. Se $x(t)$ é real e ímpar, então $X(\omega)$ é imaginário e ímpar.

8. A Figura mostra as partes reais e imaginárias da transformada de Fourier de um sinal $x(t)$.



   a. Esboce os gráficos de magnitude e fase.
   b. Aprendemos, no exercício anterior que, em geral, se $x(t)$ é real, então $X(\omega) = X^*(-\omega)$. Determine se $x(t)$ é real.

9. Considere o sinal periódico $x(t)$ da figura abaixo, composto de funções impulso.



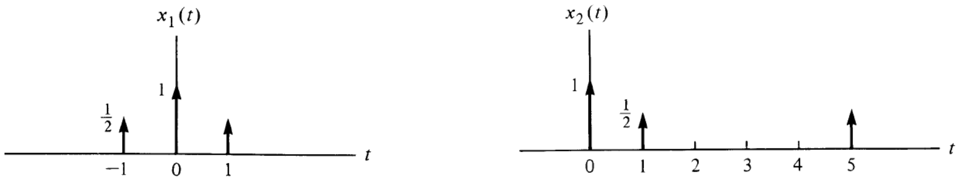
   a. Qual o período fundamental T_0?

b. Encontre a série de Fourier para $x(t)$.
c. Encontre a transformada de Fourier dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da figura a seguir.
d. Verifique se o sinal $x(t)$ pode ser expresso como uma repetição periódica dos sinais dos sinais $x_1(t)$ ou $x_2(t)$, i.é,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t)(t - kT_1)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(t)(t - kT_2)$$

Determine T_1 e T_2 e mostre graficamente que as equações acima são válidas.
e. Verifique que a série de Fourier de $x(t)$ é composta de amostras escalonadas das transformadas de Fourier $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$.



f. Qual seria a transformada de Fourier do sinal periódico $x(t)$? Qual a diferença entre a resposta da Transformada de Fourier e da Série de Fourier para um sinal periódico?

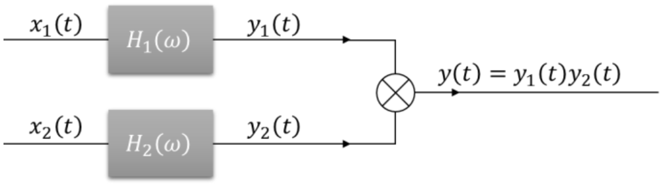
10. Determine a resposta do sistema linear e invariante no tempo com resposta impulsiva:

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

ao sinal de entrada:

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

11. Os sinais $x_1(t) = 10^4\,\mathrm{rect}(10^4 t)$ e $x_2(t) = \delta(t)$ são aplicados às entradas dos filtros passa-baixa ideais $H_1(\omega) = \mathrm{rect}(\omega/40000\pi)$ e $H_2(\omega) = \mathrm{rect}(\omega/40000\pi)$, conforme figura abaixo. As saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são multiplicadas para obter o sinal $y(t) = y_1(t)y_2(t)$.



Pergunta-se:

a. Trace $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$.
b. Trace $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$.
c. Trace $Y_1(\omega)$ e $Y_2(\omega)$.

12. Considere um SLIT descrito pela seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 4\frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

Mostre que a Transformada de Fourier $Y(\omega)$ pode ser escrita como $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ e encontre $H(\omega)$.

Referências

Os exercícios aqui apresentados foram extraídos e adaptados das seguintes fontes:

[1] Bombois, X. *Signal analyses* http://www.dcsc.tudelft.nl/~xbombois/SR3exercises.pdf
[2] Cuff, P. *Signal analyses* https://www.princeton.edu/~cuff/ele301/files/lecture8_2.pdf
[3] Lathi, B.P. *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª edição, Bookman, 2007.
[4] Oppenheim, A.V. *Signals and Systems*, http://ocw.mit.edu