PMR3306 – Sistemas Dinâmicos II para Mecatrônica

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO • ESCOLA POLITÉCNICA •

“Everyone wants the project to be good, fast and cheap… pick two!”
- Unknown

TRANSFORMADA DE FOURIER

Larissa Driemeier

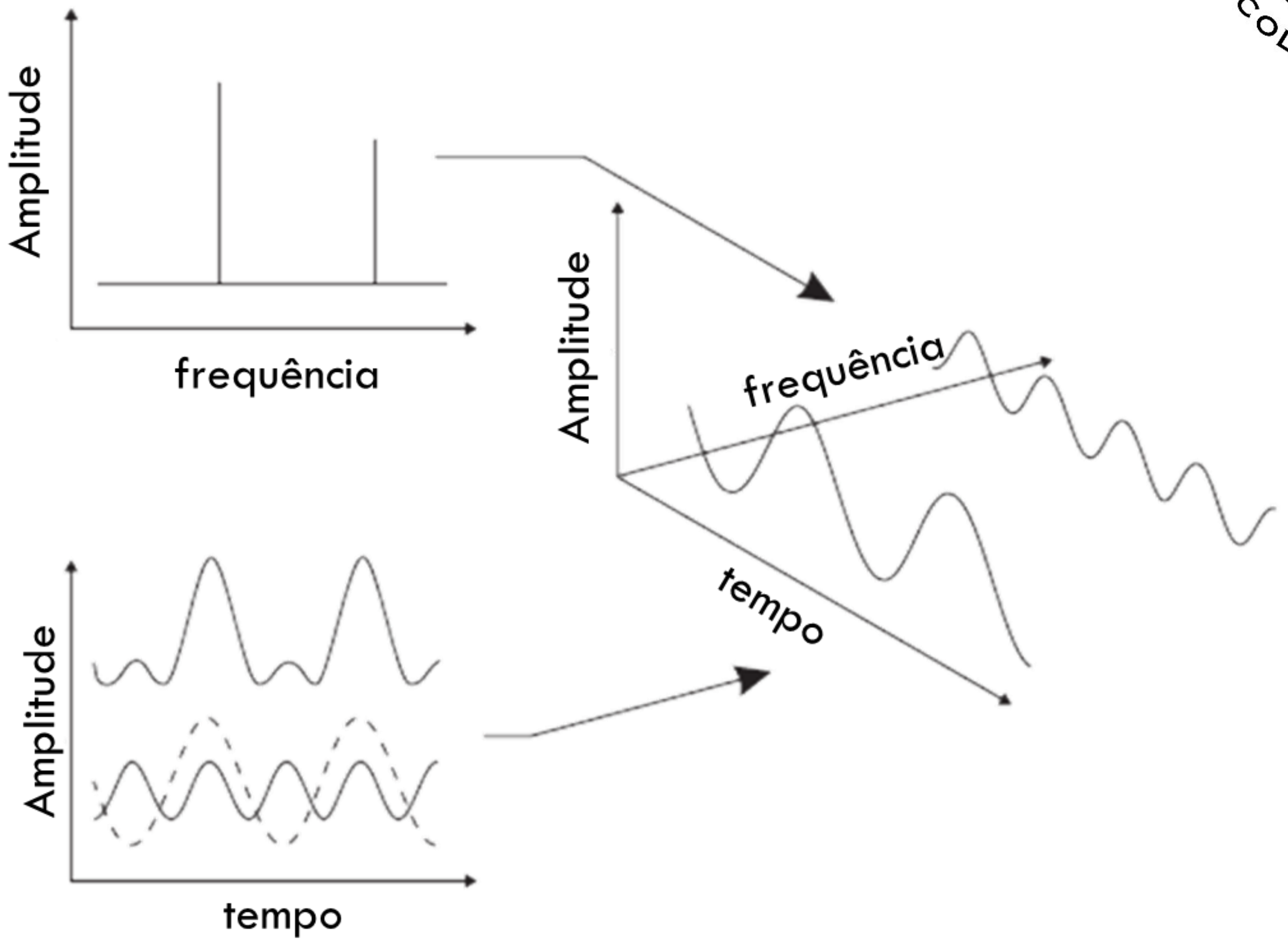
NOSSO CALENDÁRIO

#	Data	Conteúdo	Teste
I -12	4/10	Transformada de Fourier	
II -13	10/10	Transformada de Fourier	
III -14	11/10	Transformada de Fourier	
IV -15	17/10	Diagrama de Bode	
V -16	18/10	Diagrama de Bode	
VI -17,18	19/10	Diagrama de Bode	
VII - 19	24/10		**TESTE – TODO CONTEÚDO**

ANÁLISE E SÍNTESE DE UM SINAL

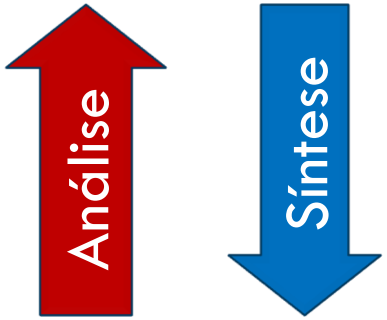
Domínio da frequência

Domínio do tempo



ANÁLISE E SÍNTESE DE UM SINAL

Domínio da frequência



Domínio do tempo

Cada transformada possui uma equação de análise (também chamada de transformada direta) e uma equação de síntese (também chamada de transformada inversa). **As equações de análise** descrevem como calcular cada valor no domínio da frequência com base em todos os valores no domínio do tempo. **As equações de síntese** descrevem como calcular cada valor no domínio do tempo com base em todos os valores no domínio da frequência.

OUTRAS MANEIRAS DE ESCREVER A SÉRIE...

Forma exponencial da Série de Fourier

LEMBRANDO QUE A SÉRIE DE FOURIER...

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \qquad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad n = 1,2,\ldots \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin n\omega_0 t\, dt \qquad n = 1,2,\ldots$$

ANÁLISE – FREQUÊNCIA PARA TEMPO

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

$$X[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n \geq 1 \\ \frac{1}{2} a_0 & 0 \\ \frac{1}{2}(a_{|n|} + jb_{|n|}) & n \leq -1 \end{cases}$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}(a_{|n|} \mp jb_{|n|})$$

$$a_n = 2\,\mathcal{R}(X[n])$$
$$b_n = -2\,Im(X[n])$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

O termo constante

$$\frac{1}{2}a_0 = X[0]$$

as partes do sinal que oscilam uma vez em um período de T segundos,

$$a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) = X[-1]e^{-j\omega_0 t} + X[1]e^{+j\omega_0 t}$$

as partes do sinal que oscilam duas vezes em um período de T segundos,

$$a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) = X[-2]e^{-j2\omega_0 t} + X[2]e^{+j2\omega_0 t}$$

... e assim por diante.

E A SÍNTESE – TEMPO PARA FREQUÊNCIA?

Para $n \neq 0$,

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$X[n] = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)[\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t]dt$$

$$\frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)[\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x(t)\left[\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - j\,\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right]dt$$

$$X[n] = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Similarmente,

$$X[-n] = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)[\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t]dt$$

$$\frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)[\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t]dt$$

$$X[-n] = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

FORMULAÇÃO COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

OU SÉRIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

Harmônicos distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$ (ω_0: frequência fundamental)

Análise

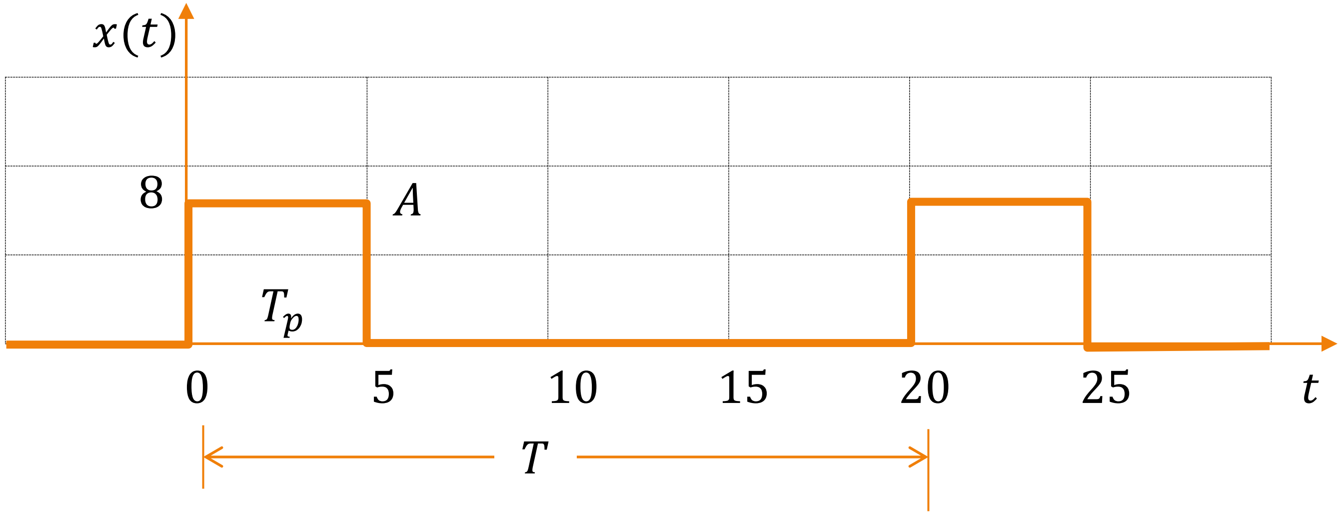
$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$X[n]e^{jn\omega_0 t} + X[-n]e^{-jn\omega_0 t}$ é o n −ésimo harmônico do sinal.

POR EXEMPLO...

Encontre a série exponencial de Fourier que descreve a função harmônica $x(t)$ abaixo.

Qual a amplitude do primeiro harmônico da função?

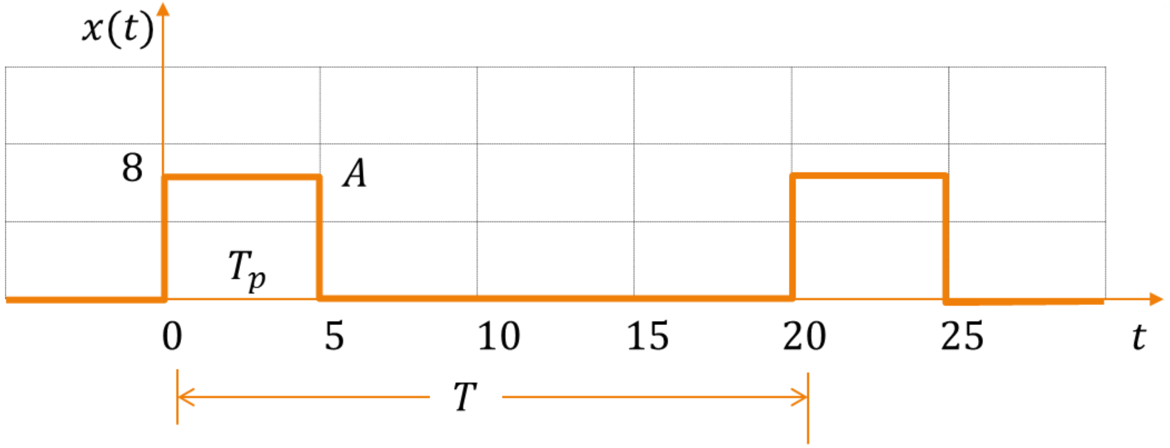


$T = 20, T_p = \frac{T}{4}, A = 8$

$x(t+T) = x(t)$, onde T é o período, de modo que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp jb_{|n|}\right)$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt$$

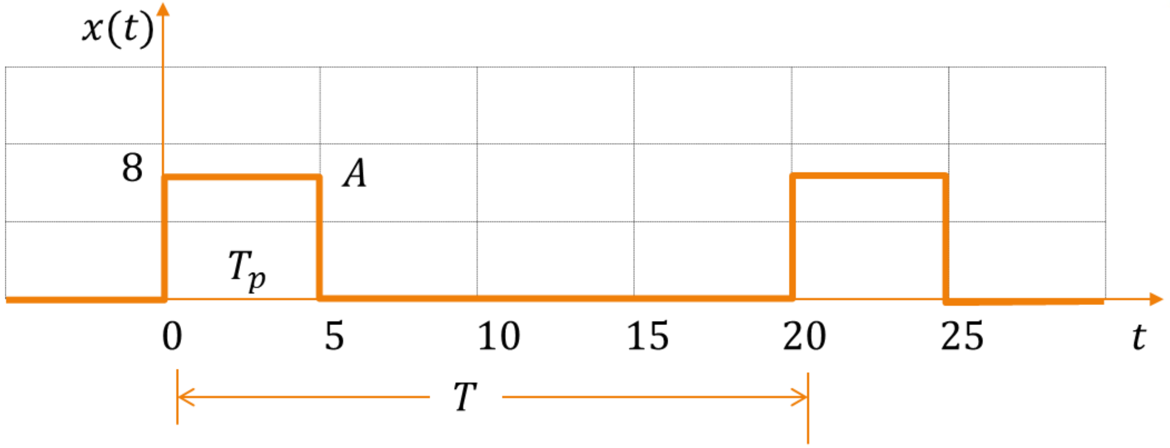
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp jb_{|n|}\right)$$

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 1\, dt = 4$$

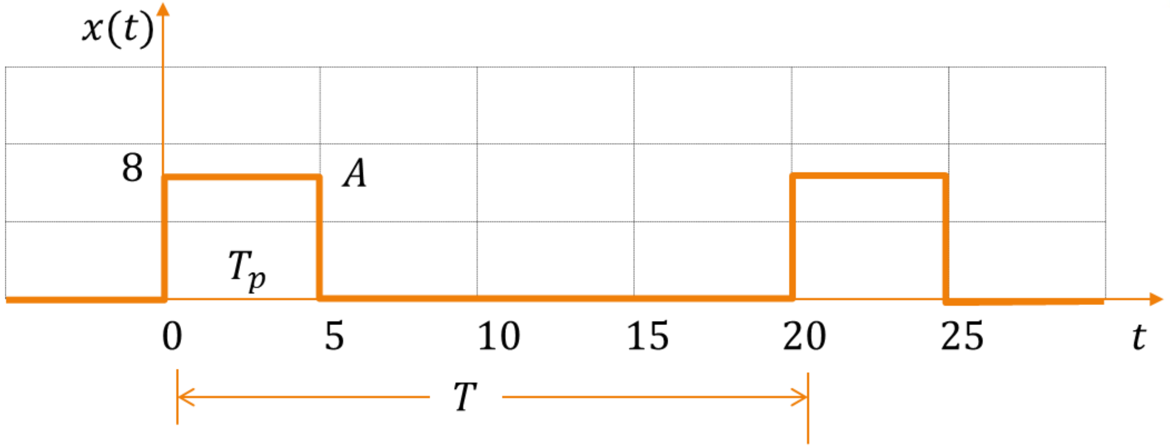
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{2}{20} 8 \int_0^5 1\, dt = 4$$

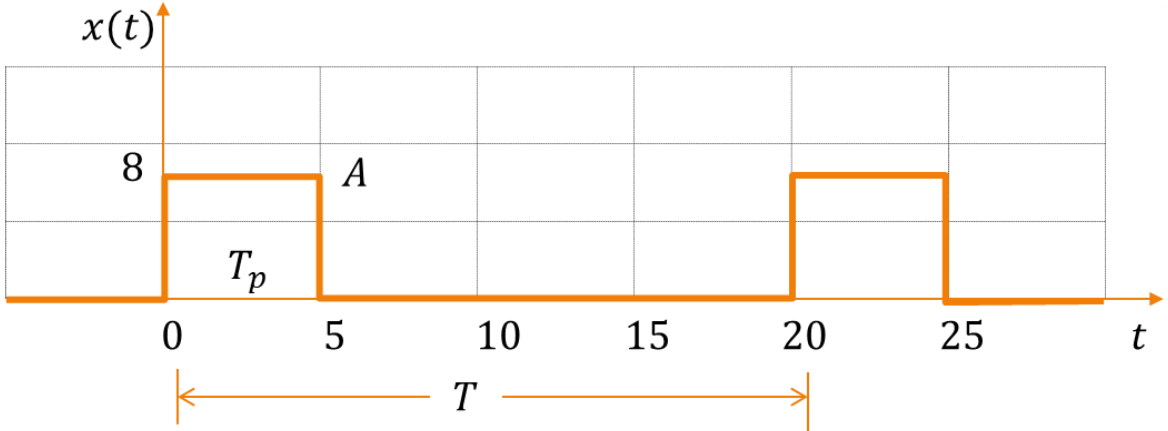
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{20} 8 \int_0^5 \cos n\omega_0 t\, dt = \frac{4}{5n\omega_0}\sin 5n\omega_0 = \frac{40}{5n\pi}\sin 5n\frac{\pi}{10} = \frac{8}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 1\,dt = 4$$

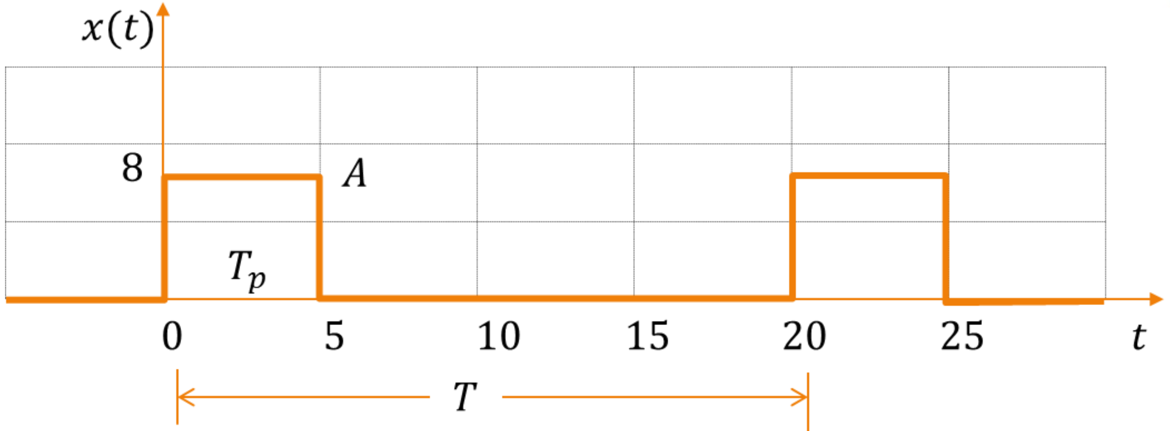
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 \cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{5n\omega_0}\sin 5n\omega_0 = \frac{40}{5n\pi}\sin 5n\frac{\pi}{10} = \frac{8}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 \sin n\omega_0 t\,dt = -\frac{8}{n\pi}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right)$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 1\,dt = 4$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 \cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{5n\omega_0}\sin 5n\omega_0 = \frac{40}{5n\pi}\sin 5n\frac{\pi}{10} = \frac{8}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{20}8\int_0^5 \sin n\omega_0 t\,dt = -\frac{8}{n\pi}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$X[\pm n] = \frac{1}{2}\left(a_{|n|} \mp j b_{|n|}\right) = \frac{8}{n\pi}\left[\sin n\frac{\pi}{2} \mp j\left(\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]$$

$$a_n = \frac{8}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = -\frac{8}{n\pi} \left[\cos n \frac{\pi}{2} - 1 \right]$$

n	a_n	b_n
0	4	−
1	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$
2	0	$\frac{8}{\pi}$
3	$-\frac{8}{3\pi}$	$\frac{8}{3\pi}$
4	0	0
5	$\frac{8}{5\pi}$	$\frac{8}{5\pi}$
6	0	$\frac{8}{3\pi}$

n	$X[n]$
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	2
1	
2	
3	
4	
5	
6	

n	a_n	b_n
0	4	$-$
1	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$
2	0	$\frac{8}{\pi}$
3	$-\frac{8}{3\pi}$	$\frac{8}{3\pi}$
4	0	0
5	$\frac{8}{5\pi}$	$\frac{8}{5\pi}$
6	0	$\frac{8}{3\pi}$

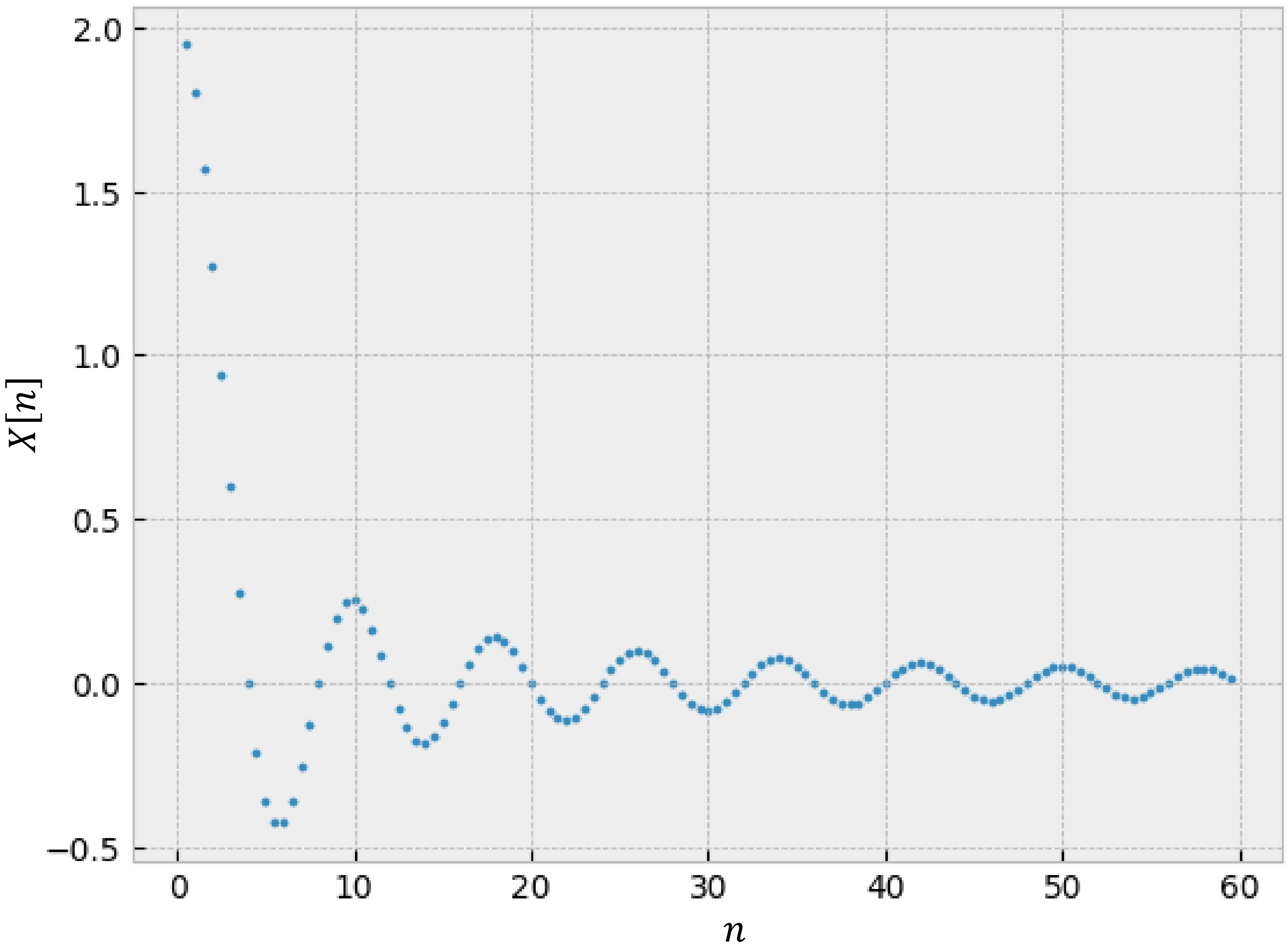
n	$X[n]$
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	$\frac{4}{\pi}+j\frac{4}{\pi}$
0	2
1	$\frac{4}{\pi}-j\frac{4}{\pi}$
2	
3	
4	
5	
6	

$$X[\pm n]=\frac{1}{2}\left(a_{|n|}\mp jb_{|n|}\right)$$

n	a_n	b_n
0	4	$-$
1	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$
2	0	$\frac{8}{\pi}$
3	$-\frac{8}{3\pi}$	$\frac{8}{3\pi}$
4	0	0
5	$\frac{8}{5\pi}$	$\frac{8}{5\pi}$
6	0	$\frac{8}{3\pi}$

n	$X[n]$
-6	$j\frac{4}{3\pi}$
-5	$\frac{4}{5\pi}+j\frac{4}{5\pi}$
-4	0
-3	$-\frac{4}{3\pi}+j\frac{4}{3\pi}$
-2	$j\frac{4}{3\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi}+j\frac{4}{\pi}$
0	2
1	$\frac{4}{\pi}-j\frac{4}{\pi}$
2	$-j\frac{4}{\pi}$
3	$-\frac{4}{3\pi}-j\frac{4}{3\pi}$
4	0
5	$\frac{4}{5\pi}-j\frac{4}{5\pi}$
6	$-j\frac{4}{3\pi}$

n	a_n	b_n
0	4	$-$
1	$\frac{8}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$
2	0	$\frac{8}{\pi}$
3	$-\frac{8}{3\pi}$	$\frac{8}{3\pi}$
4	0	0
5	$\frac{8}{5\pi}$	$\frac{8}{5\pi}$
6	0	$\frac{8}{3\pi}$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
$X[n]$
0
10
20
30
40
50
60
n

RESOLUÇÃO UTILIZANDO

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{20}8\int_0^5 e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{8}{-20jn\omega_0}\left[e^{-5jn\omega_0} - 1\right] = \frac{8}{20jn\frac{2\pi}{20}}\left[-e^{-5jn\frac{2\pi}{20}} + 1\right]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20}$$

$$= \frac{8}{jn2\pi}\left[1 - e^{-jn\frac{2\pi}{4}}\right] = \frac{8e^{-jn\frac{\pi}{4}}}{n\pi}\frac{\left[e^{jn\frac{\pi}{4}} - e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right]}{2j}$$

$$= \frac{8e^{-jn\frac{\pi}{4}}}{n\pi}\frac{\left[e^{jn\frac{\pi}{4}} - e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right]}{2j} = \frac{8}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)e^{-jn\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}e^{-jn\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{sinc}(n\pi/4)e^{-jn\frac{\pi}{4}}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$X[n] = 2\,\mathrm{sinc}\left(n\pi\frac{T_p}{T}\right)e^{-jn\frac{\pi}{4}}$$

COMPARANDO...

$$X[n] = 2\text{sinc}(n\pi/4)e^{-jn\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}e^{-jn\frac{\pi}{4}}$$

$$X[1] =$$

n	$X[n]$
-6	$j\frac{4}{3\pi}$
-5	$\frac{4}{5\pi} + j\frac{4}{5\pi}$
-4	0
-3	$-\frac{4}{3\pi} + j\frac{4}{3\pi}$
-2	$j\frac{4}{3\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi} + j\frac{4}{\pi}$
0	2
1	$\frac{4}{\pi} - j\frac{4}{\pi}$
2	$-j\frac{4}{\pi}$
3	$-\frac{4}{3\pi} - j\frac{4}{3\pi}$
4	0
5	$\frac{4}{5\pi} - j\frac{4}{5\pi}$
6	$-j\frac{4}{3\pi}$

COMPARANDO...

$$X[n] = 2\text{sinc}(n\pi/4)e^{-jn\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}e^{-jn\frac{\pi}{4}}$$

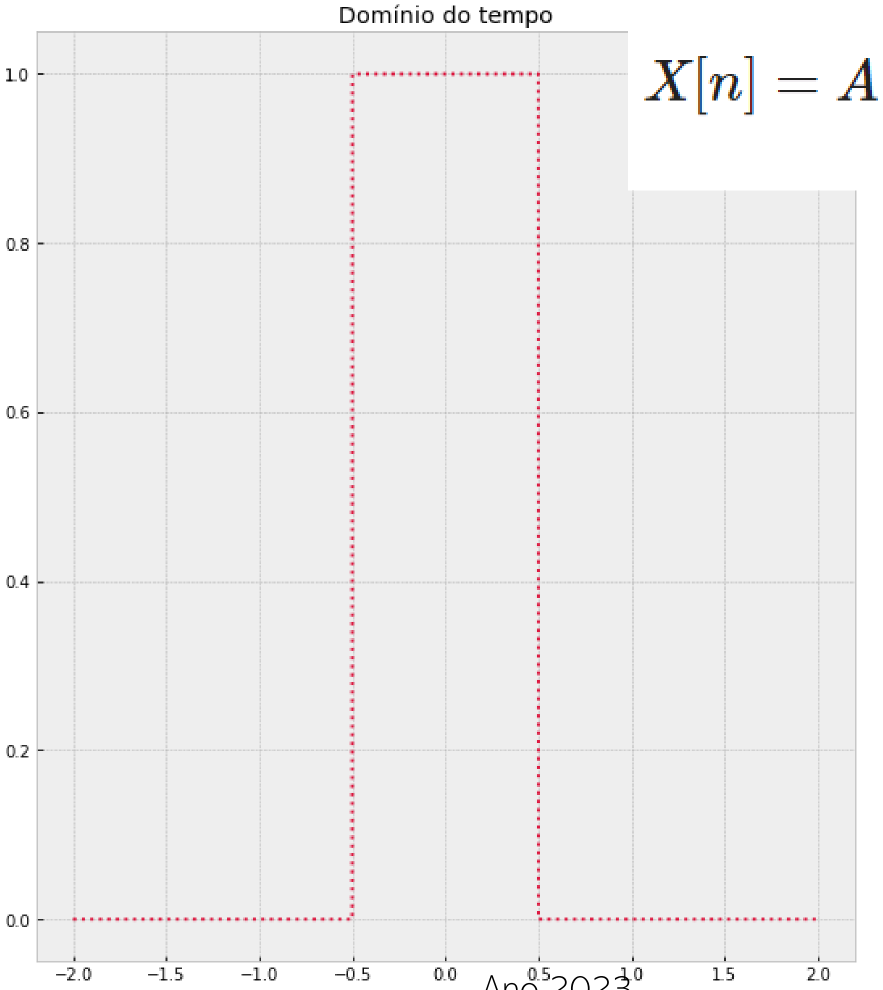
$$X[1] = 2\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi}\sin(\pi/4)\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X[1] = \frac{8}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{\pi} - j\frac{4}{\pi}$$

n	$X[n]$
-6	$j\frac{4}{3\pi}$
-5	$\frac{4}{5\pi} + j\frac{4}{5\pi}$
-4	0
-3	$-\frac{4}{3\pi} + j\frac{4}{3\pi}$
-2	$j\frac{4}{3\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi} + j\frac{4}{\pi}$
0	2
1	$\frac{4}{\pi} - j\frac{4}{\pi}$
2	$-j\frac{4}{\pi}$
3	$-\frac{4}{3\pi} - j\frac{4}{3\pi}$
4	0
5	$\frac{4}{5\pi} - j\frac{4}{5\pi}$
6	$-j\frac{4}{3\pi}$

DÊ UMA OLHADA NO NOTEBOOK...

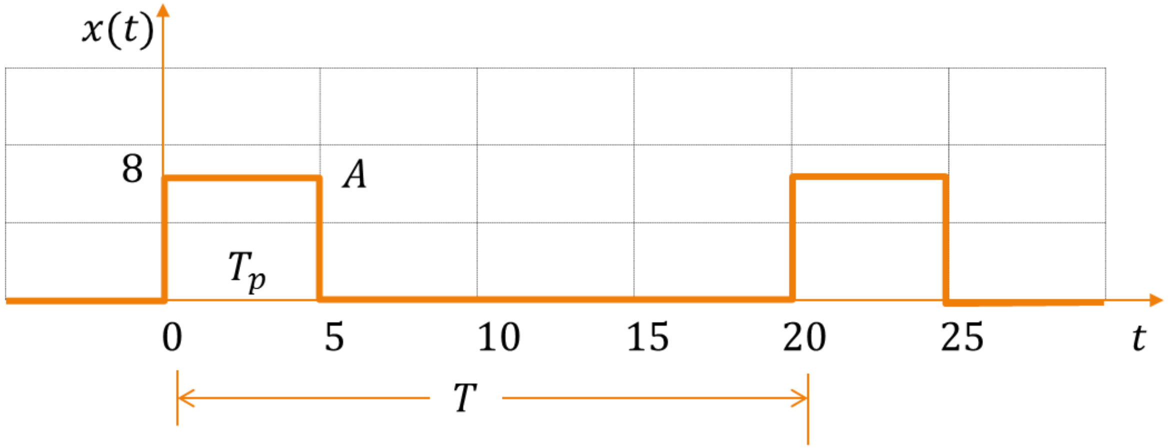


$$X[n] = A\frac{T_p}{T}\text{sinc}\left(\frac{n\pi T_p}{T}\right)$$

versus

$$X[n] = \boxed{2}\,\text{sinc}\left(n\pi\frac{T_p}{T}\right)\boxed{e^{-jn\frac{\pi}{4}}} \quad ???$$

$$\frac{T_p}{T} = \frac{1}{4},\ A = 8,\ \therefore\ A\frac{T_p}{T} = 2$$



PROPRIEDADES DAS SÉRIES DE FOURIER

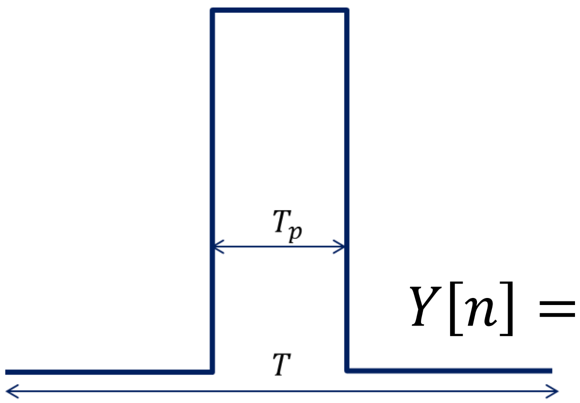
$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} X[n]$$

$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} Y[n]$$

1. Linearidade
2. Translação no tempo
3. Translação na frequência
4. Sinal refletido (reversão no tempo)
5. Escalonamento no tempo
6. Multiplicação e convolução
7. Derivada e Integral

E SE A FUNÇÃO RETANGULAR FOR DESLOCADA $\tau = T_p/2$ NO TEMPO?

Da propriedade de deslocamento τ no tempo,

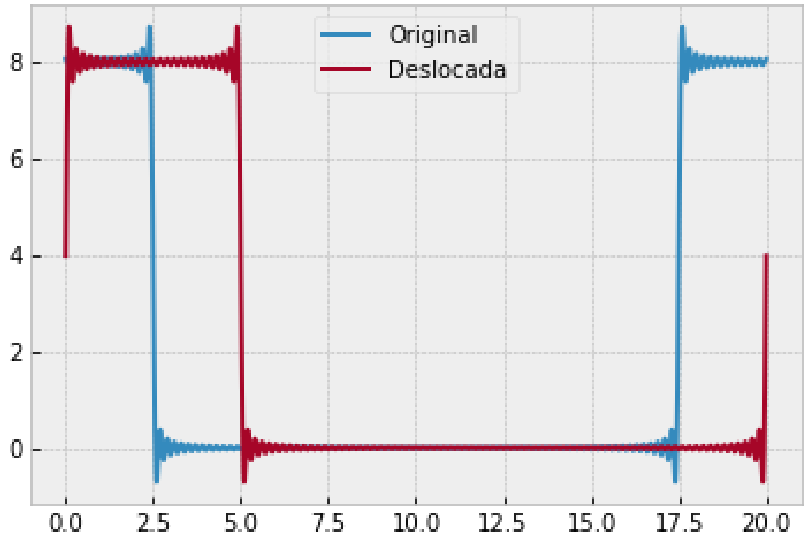


$$Y[n] = X[n]e^{-jn\omega_0\tau}$$

$$Y[n] = \mathrm{A}\frac{T_p}{T}\mathrm{sinc}\left(n\pi T_p/T\right)e^{-jn\frac{2\pi}{T}\tau}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$\frac{T_p}{T} = \frac{20}{5} = \frac{1}{4}, A = 8, \therefore A\frac{T_p}{T} = 2$

$$Y[n] = 2\mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{4}\right)e^{-jn\frac{2\pi}{20}\frac{5}{2}}$$

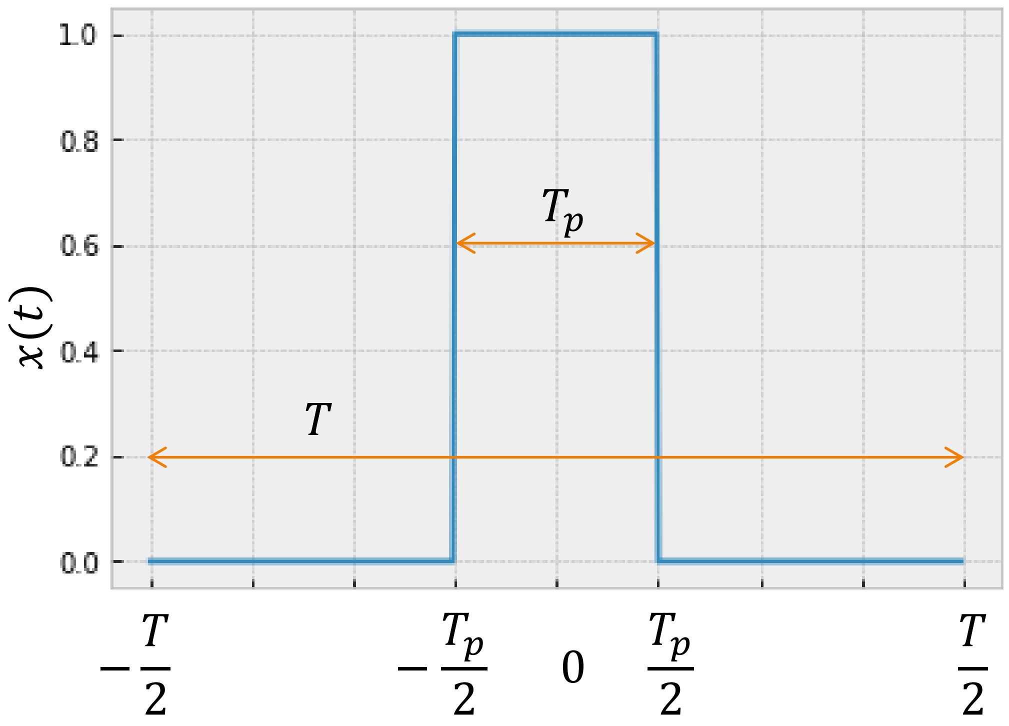


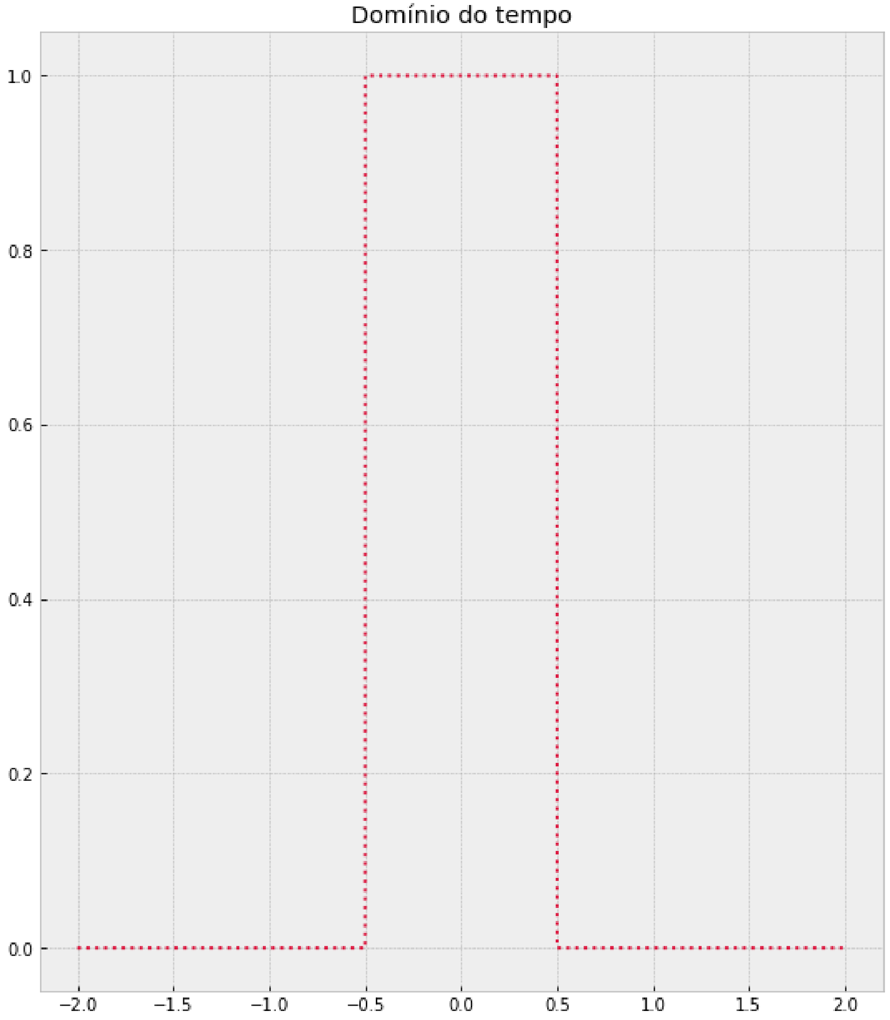
$$Y[n] = 2\mathrm{sinc}\left(n\frac{\pi}{4}\right)e^{-jn\frac{\pi}{4}}$$

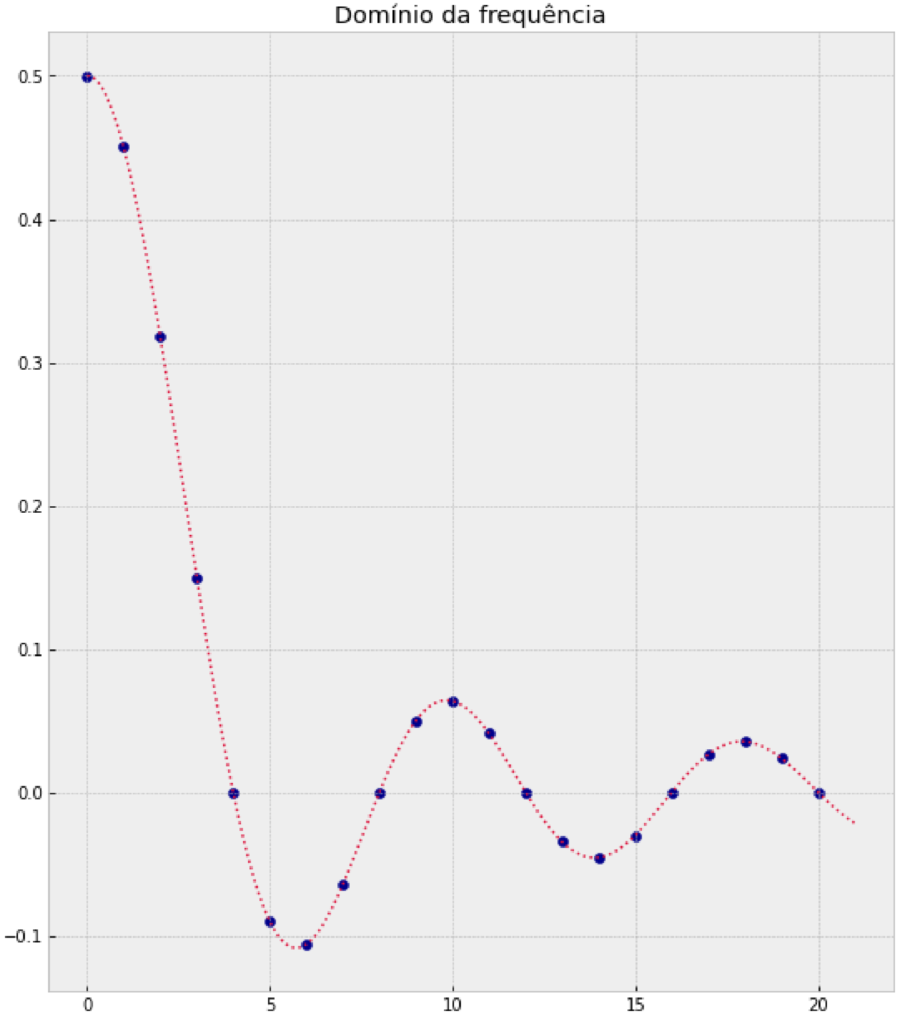
VOLTAMOS AO PULSO RETANGULAR...

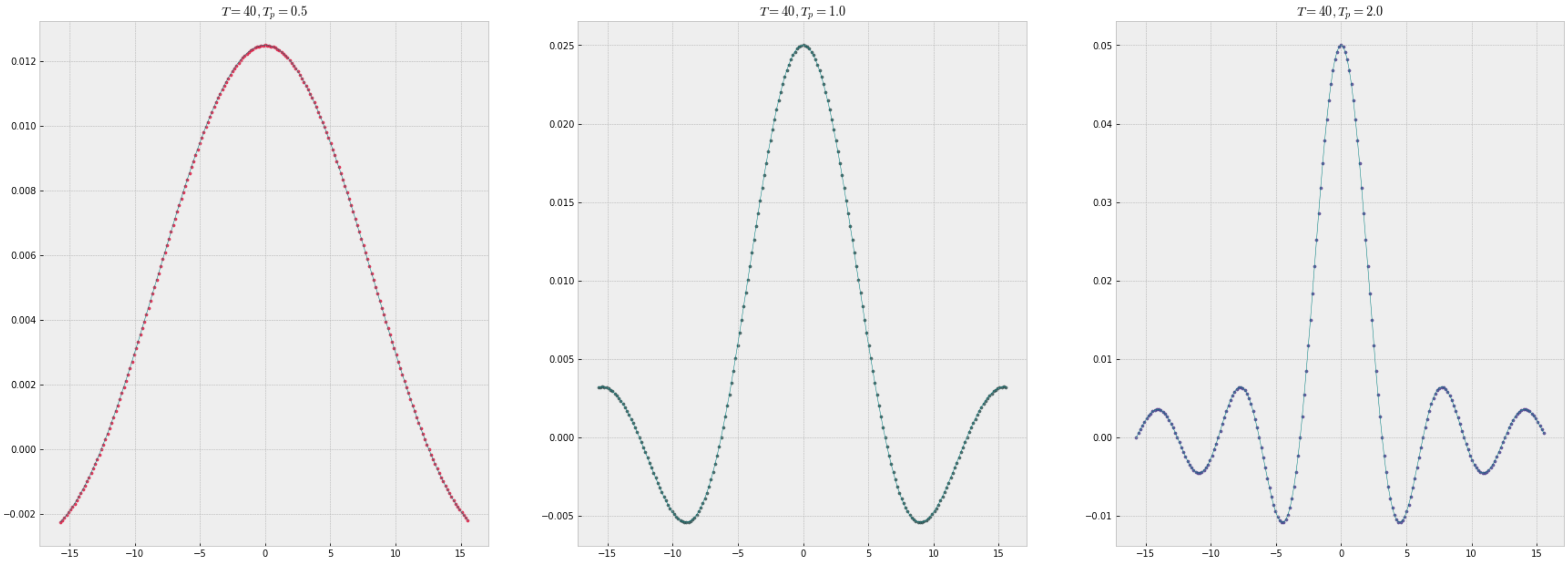
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T_p}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T_p}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T_p}{2} \end{cases}, \qquad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t + nT) = x(t)$$

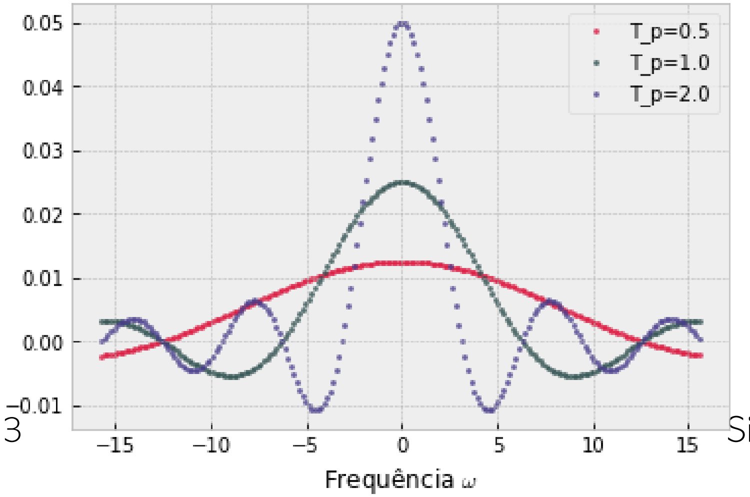



Domínio do tempo
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

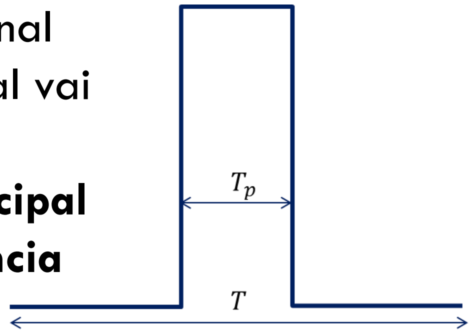

Domínio da frequência
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
0
5
10
15
20

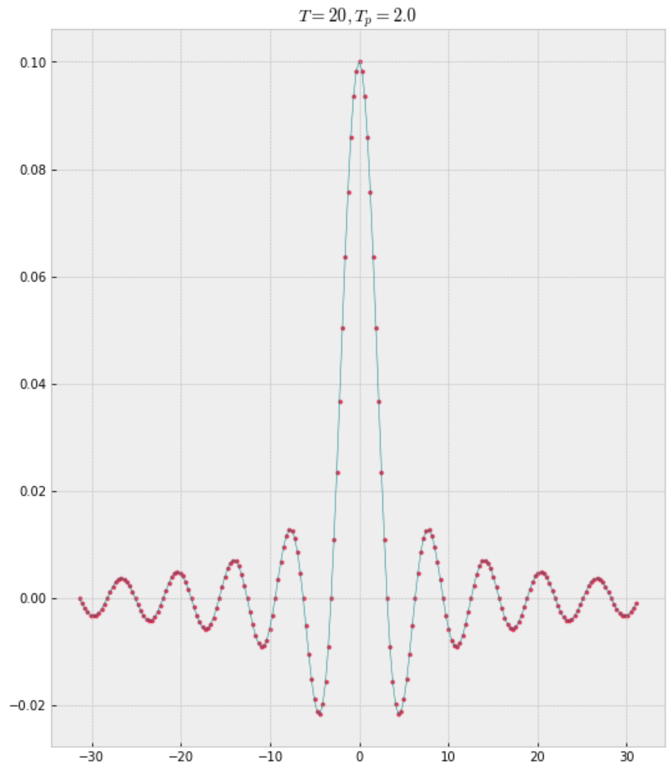


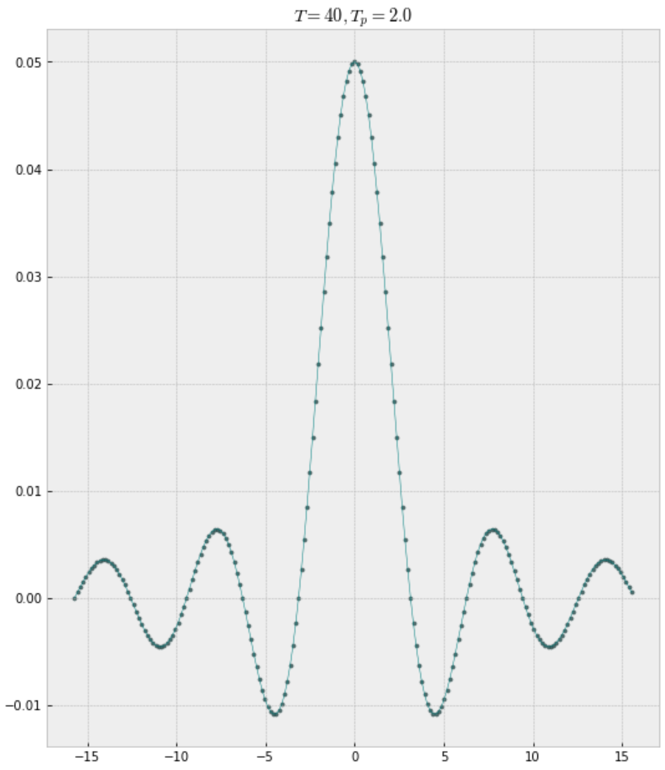
$$X[n] = \frac{T_p}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi T_p}{T}\right)$$

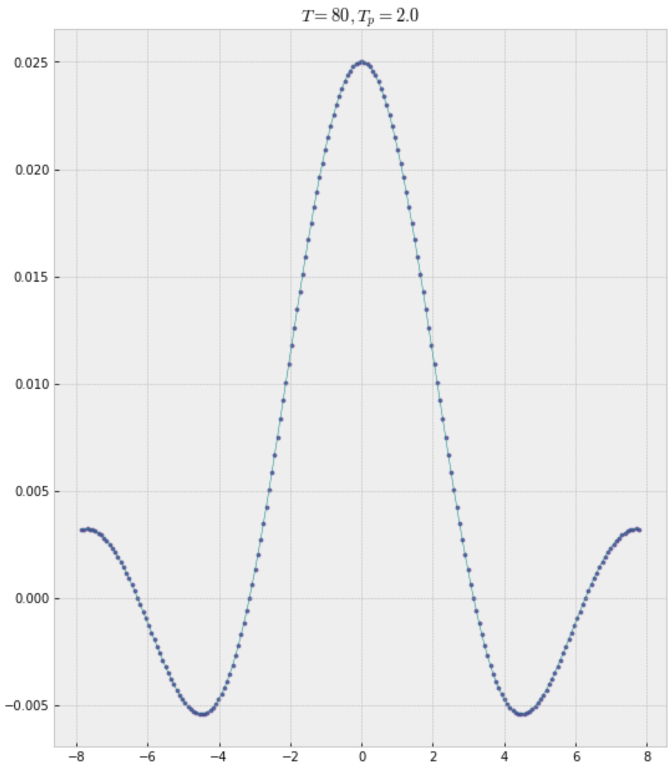


Quando o tamanho do pulso retangular T_P de um sinal periódico diminui, o sinal vai se aproximando de um impulso **e o lóbulo principal do domínio da frequência aumenta.**

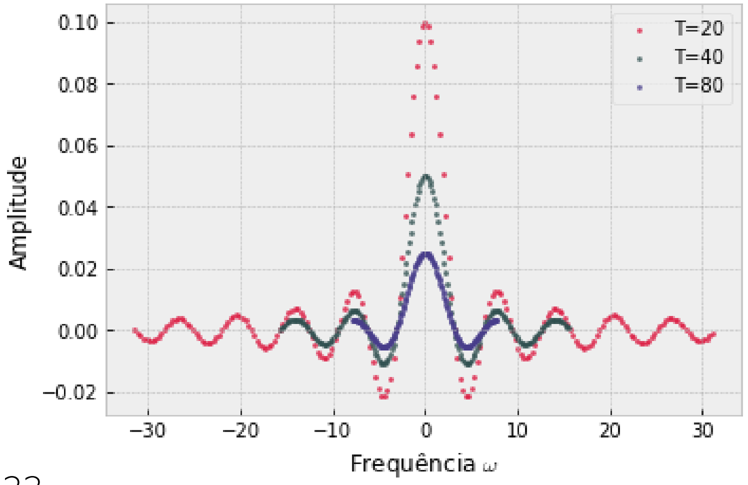




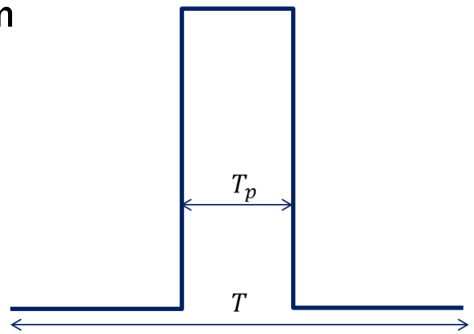




$$X[n] = \frac{T_p}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi T_p}{T}\right)$$



Quando o período T de um sinal periódico aumenta, a frequência $\omega_o = 2\pi/T$ diminui **e o termos harmonicamente relacionados ficam mais próximos na frequência.**

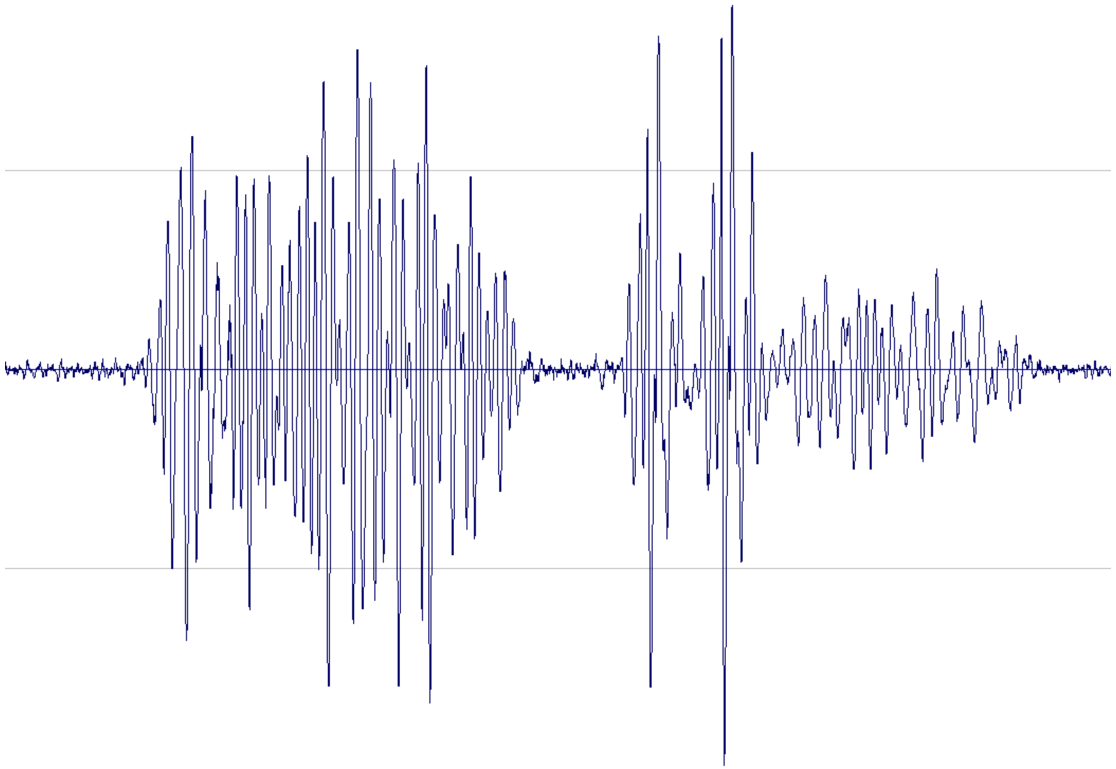


SUMÁRIO DA SÉRIE DE FOURIER

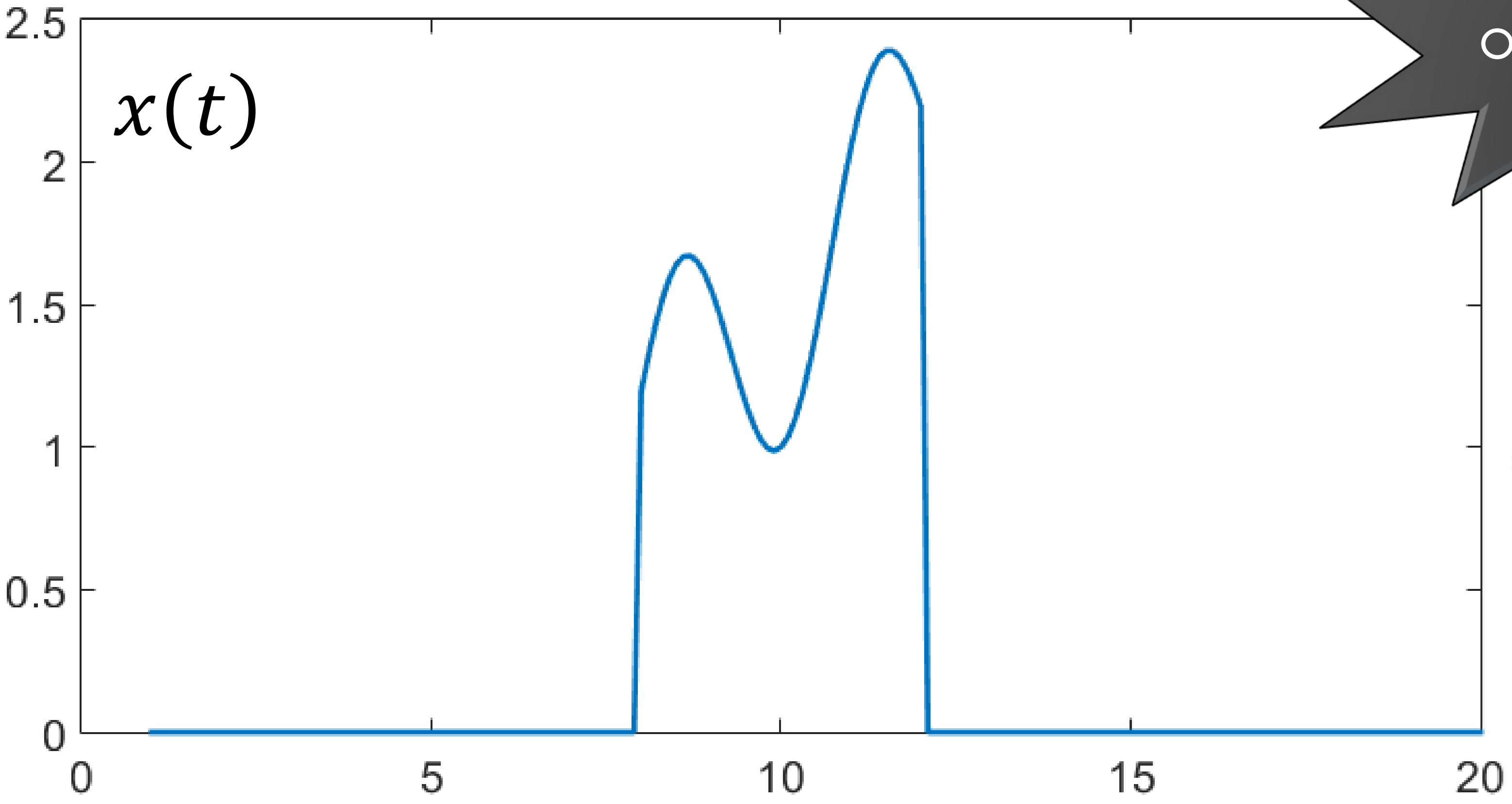
	Formulação senoidal	**Formulação exponencial**
Síntese	$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$
Análise	$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t \, dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t \, dt$	$X[n] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Harmônicos distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

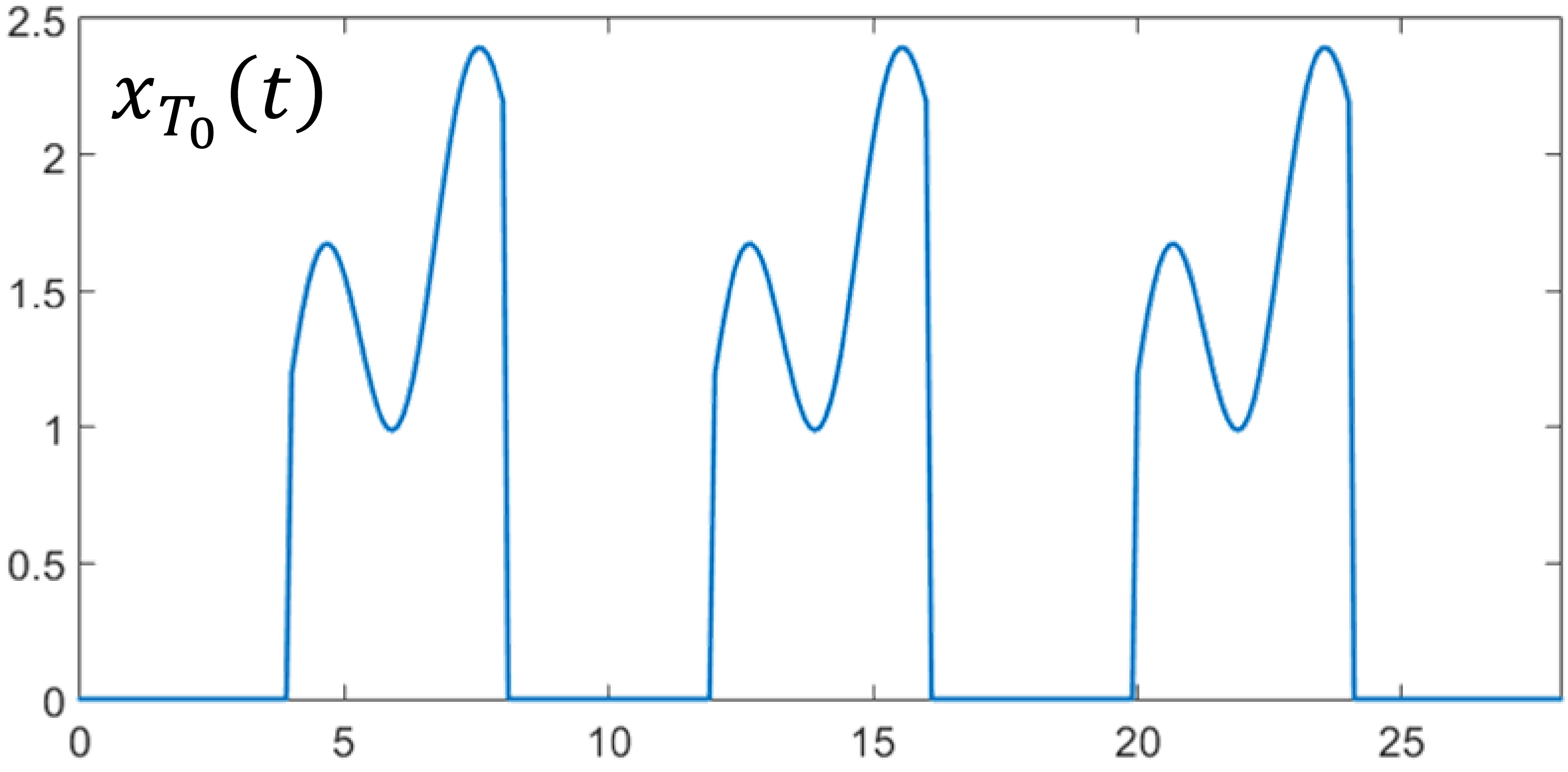
Este não é um sinal periódico.
Queremos calcular seu espectro usando análise de Fourier, mas aprendemos que o sinal deve ser periódico.
O que fazer?



Este não é um sinal periódico. Queremos calcular seu espectro usando análise de Fourier, mas aprendemos que o sinal deve ser periódico. O que fazer?

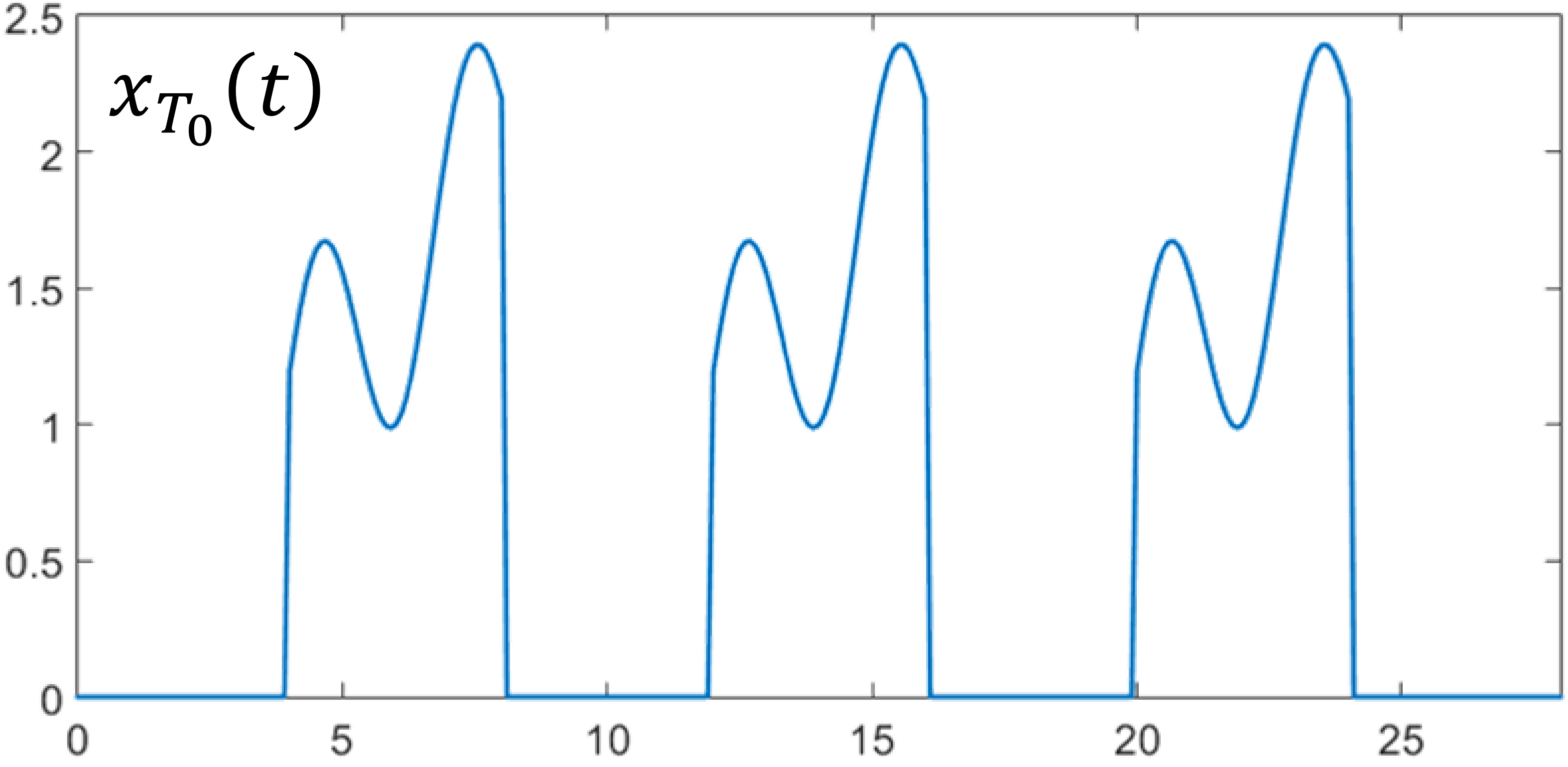


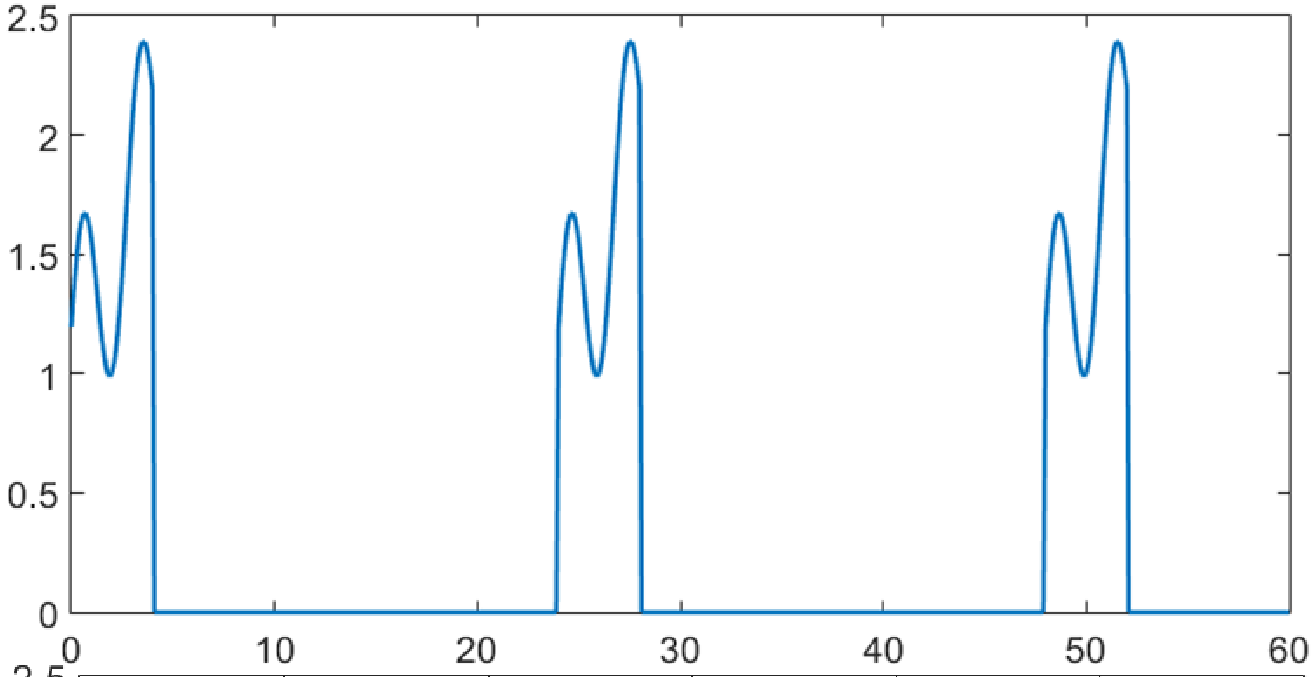
Assim eu resolvo...

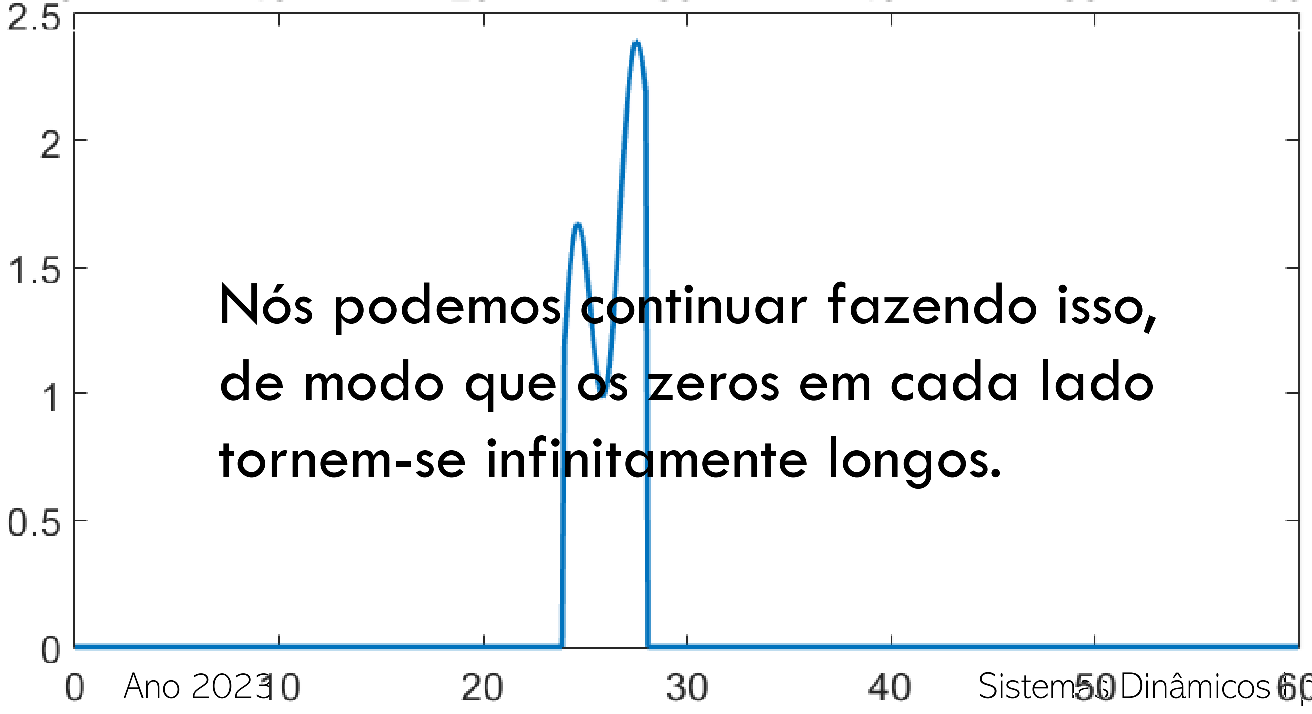


Assim eu resolvo...

Mas não é o mesmo sinal...





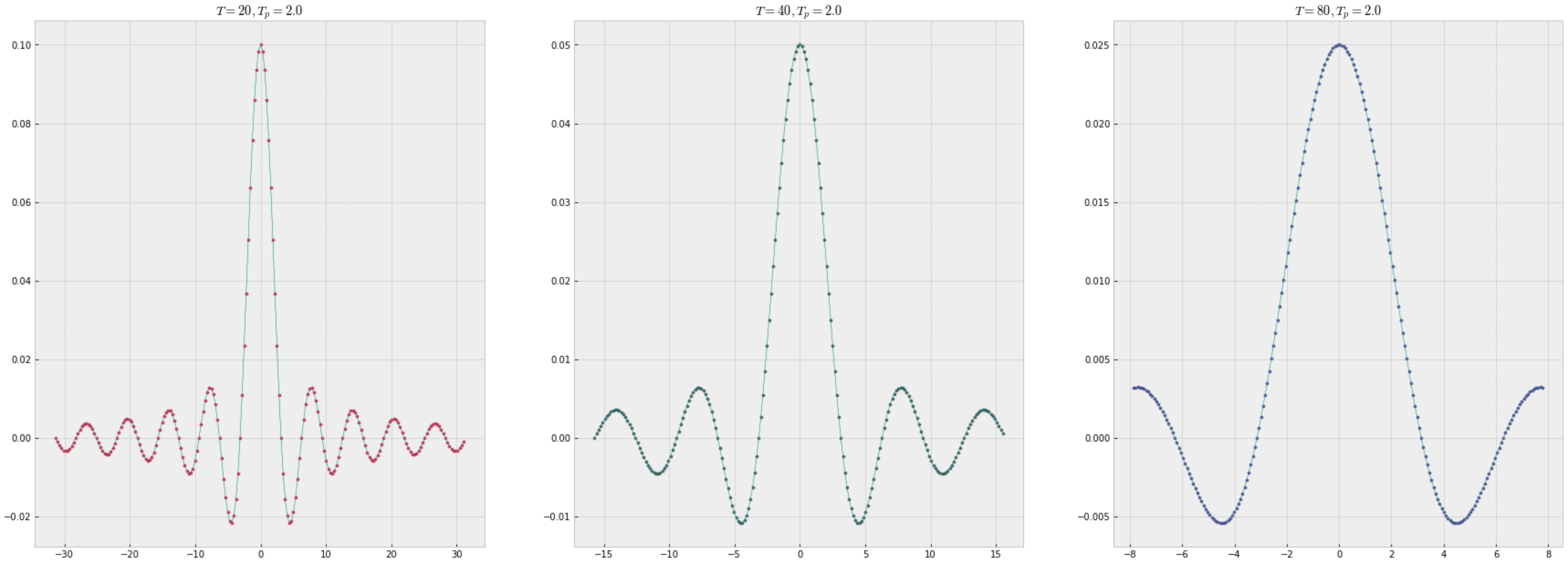


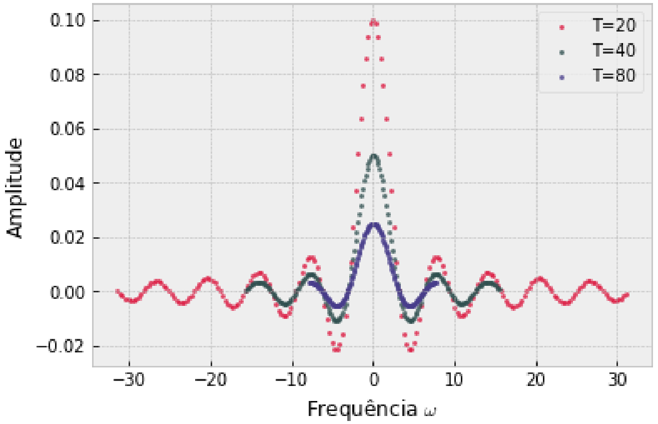
Nós podemos continuar fazendo isso, de modo que os zeros em cada lado tornem-se infinitamente longos.

O sinal agora tem apenas a parte da informação que nos interessa com zeros que se estendem ao infinito para cada lado. Declaramos que este é um sinal periódico com período ∞.

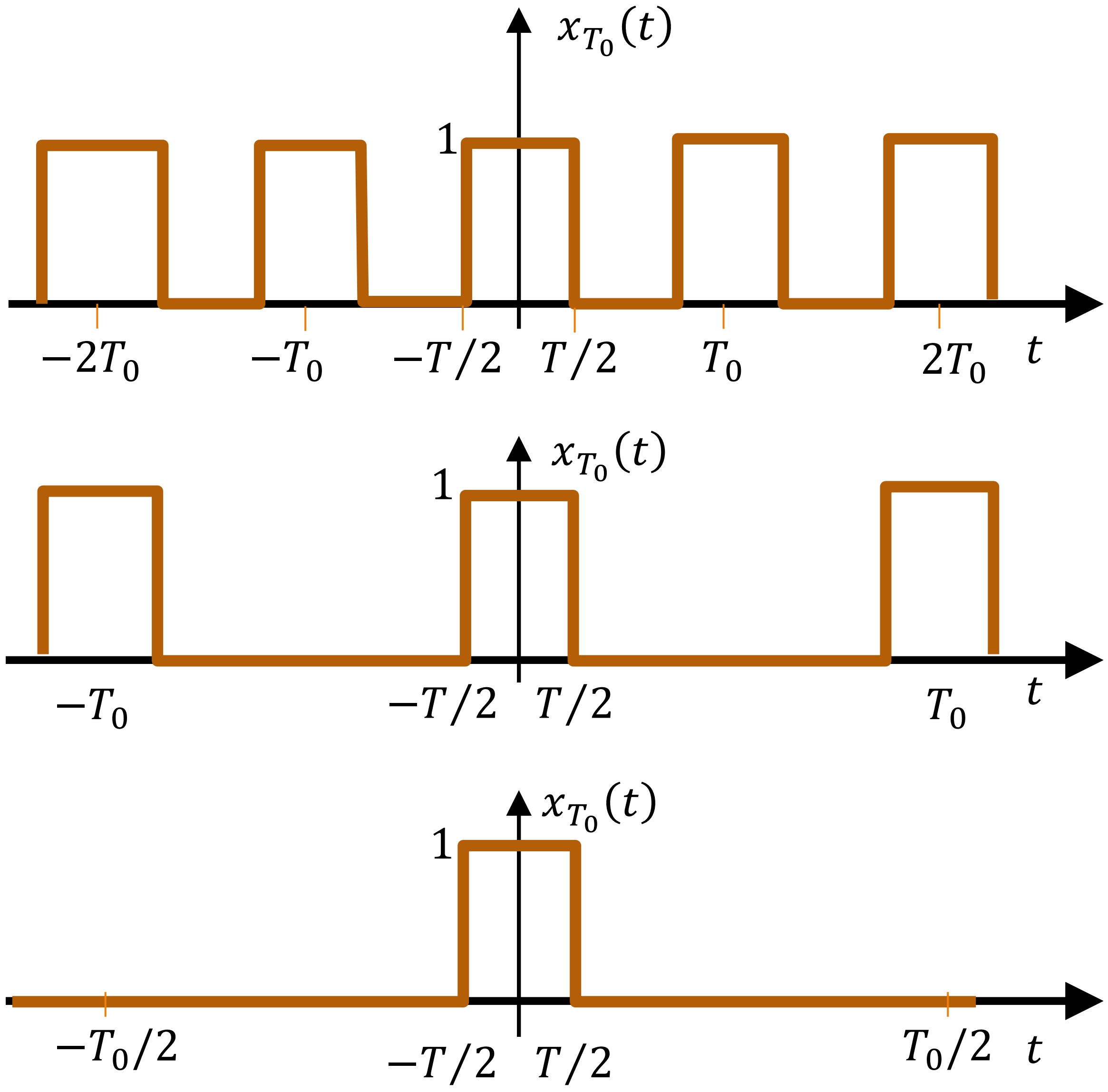
$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$

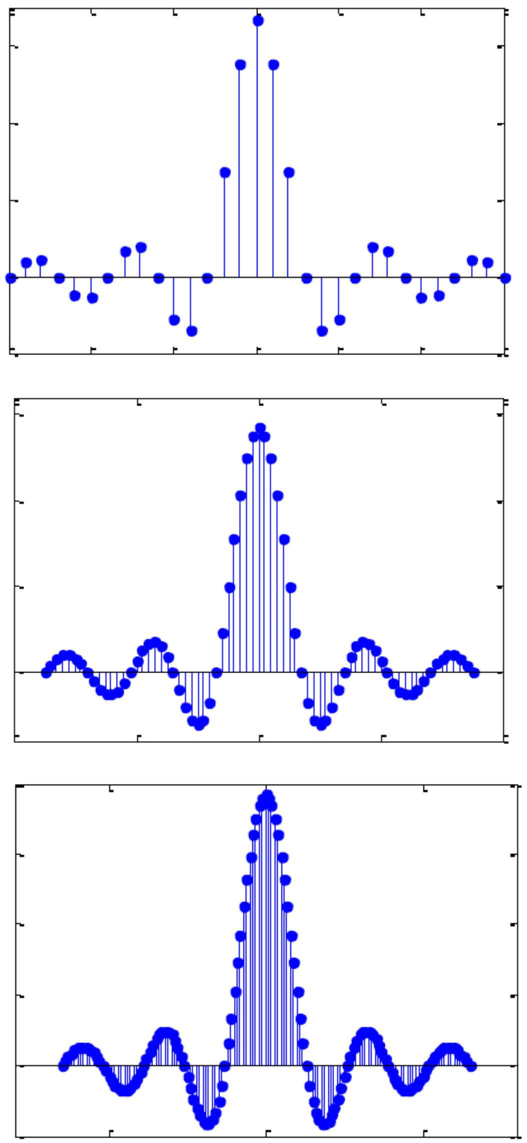
LEMBRAM-SE DA IDEIA???

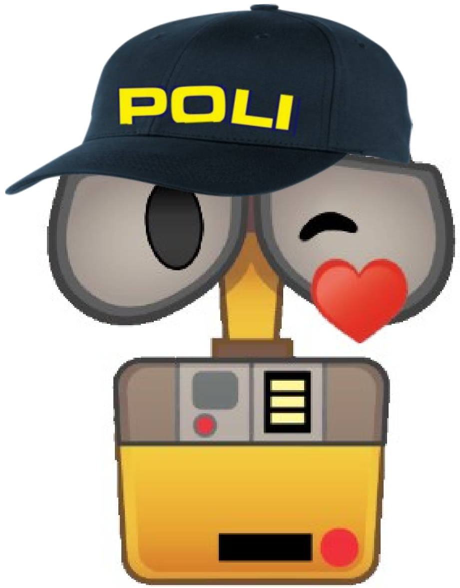




Quando o período T de um sinal periódico aumenta, a frequência ω_o diminui **e o termos harmonicamente relacionados ficam mais próximos na frequência.**


$x_{T_0}(t)$
1
$-2T_0$
$-T_0$
$-T/2$
$T/2$
T_0
$2T_0$
t
$x_{T_0}(t)$
1
$-T_0$
$-T/2$
$T/2$
T_0
t
$x_{T_0}(t)$
1
$-T_0/2$
$-T/2$
$T/2$
$T_0/2$
t





Um *sinal aperiódico* pode ser visto como um *sinal periódico* com um *período infinito*.

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

n-ésimo harmônico

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\, e^{jn\omega_0 t}$$

Se $T \to \infty$, o somatório $\to$ integral,

$n\omega_0 \to \omega$,

$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \to d\omega/2\pi$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\, e^{j\omega t}d\omega$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$, simbolizada por

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

permite expressar o sinal $x(t)$ não periódico, como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Vamos comparar com:

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

A TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(\omega)} \, e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

FT

Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Um *sinal aperiódico* pode ser visto como *um sinal periódico com um período infinito.*

$T \to \infty$ e $\frac{1}{T} \longrightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$ e $n\omega_0 \to \omega$

FS ⟷ **FT**

Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

Análise

$$X[n] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Harmônicos de amplitude $X[n]$ distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Síntese

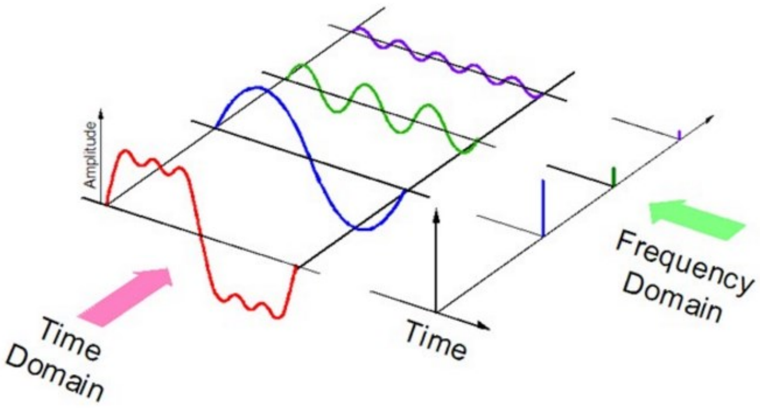
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Análise

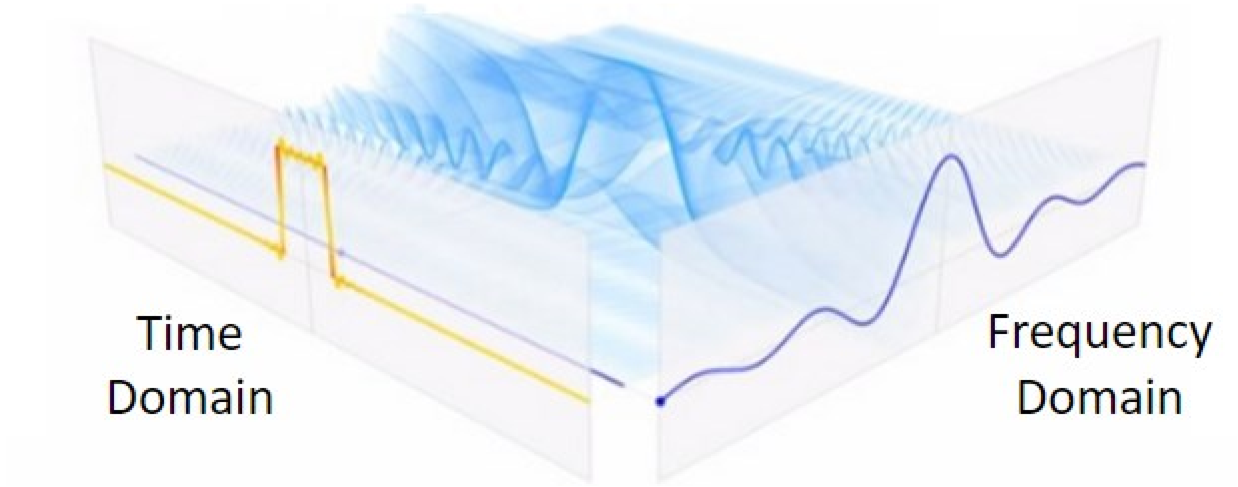
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Valores contínuos $X(\omega)$

FS


Amplitude
Time
Domain
Time
Frequency
Domain

FT


Time
Domain
Frequency
Domain

MAGNITUDE E FASE

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{\angle X(\omega)}$$

Amplitude (magnitude) do espectro

Fase do espectro

Amplitude é uma função par e fase é uma função ímpar!

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\,dt + j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\,dt$$

$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |X(\omega)|\angle\theta = |X(\omega)|e^{j\theta}$$

em radianos

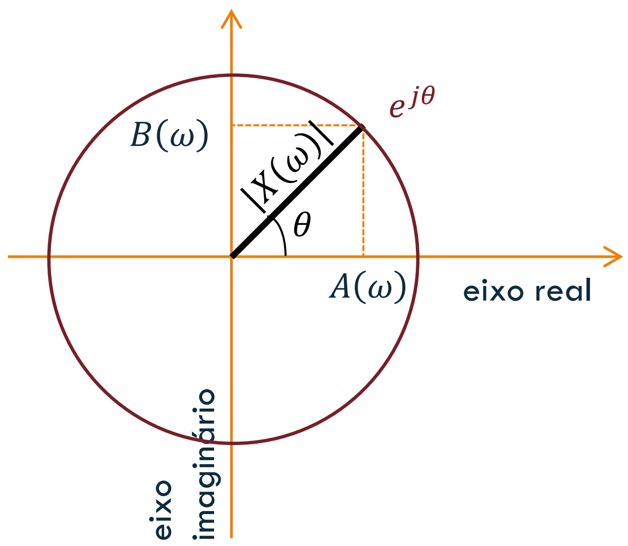
$$|X(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

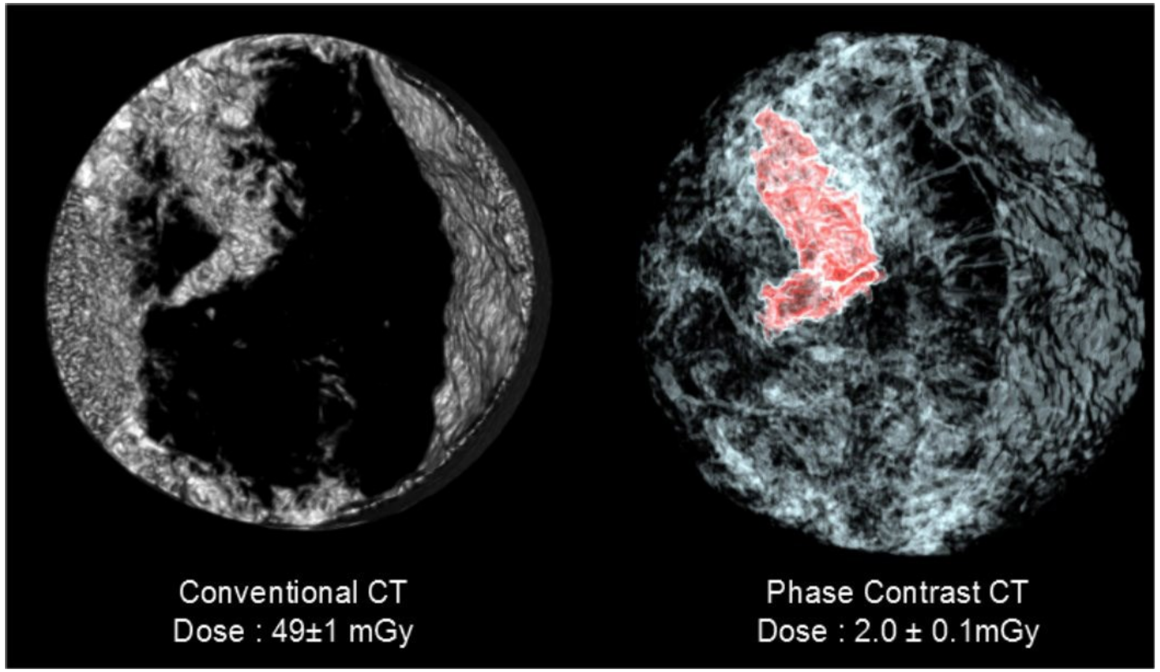
em graus

$$\theta = \text{atan}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$

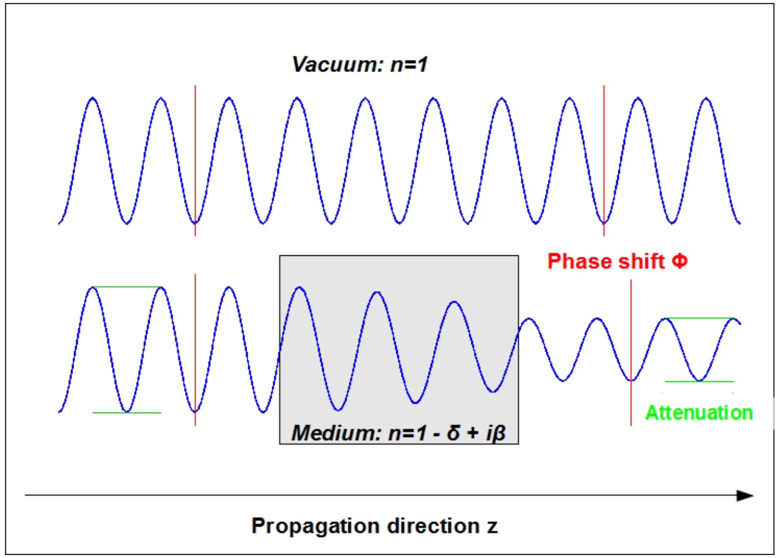
$$A(\omega) = Re[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\,dt$$

$$B(\omega) = Im[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\,dt$$





https://medicalxpress.com/news/2012-10-x-ray-breast-cancer-imaging-dose.html



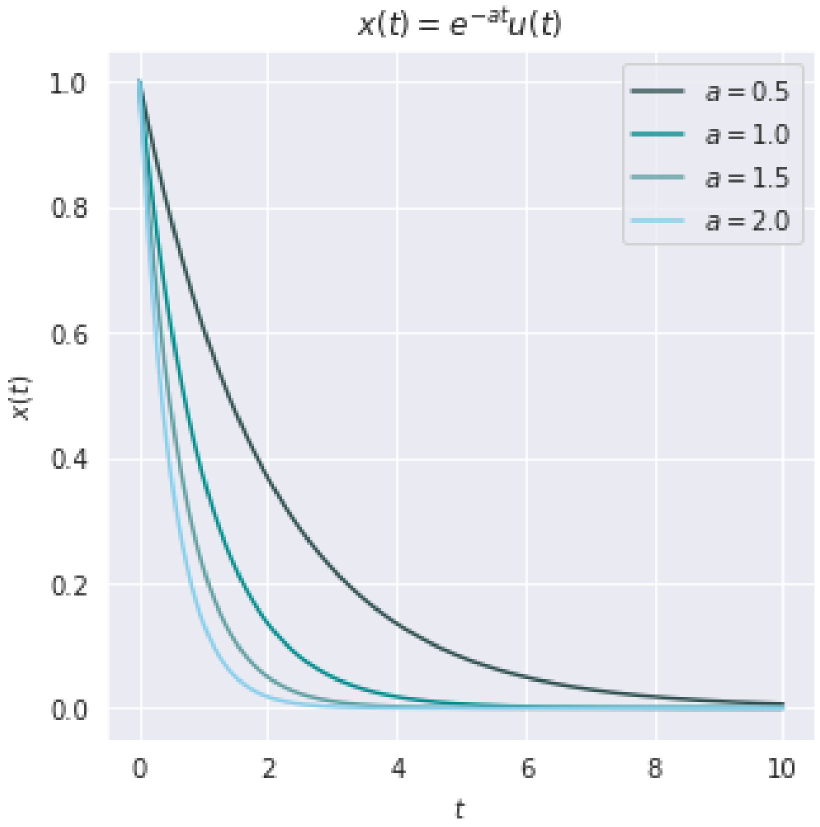
https://www.itnonline.com/article/spectral-imaging-brings-new-light-ct

Imagens extraídas da Internet.

EXEMPLO 1

Calcular a transformada da função:

$$x(t) = e^{-at}u_1(t), a > 0$$



$x(t) = e^{-at}u_1(t), a > 0$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega) =$$

Reescrevendo,

$$X(\omega) = \frac{a - j\omega}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \Rightarrow X(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Parte Real Parte Imaginária

DIAGRAMA DE MÓDULO

$$X(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2} - j\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

Parte Real Parte Imaginária

$$|X(\omega)| = \sqrt{Re[X(\omega)]^2 + Im[X(\omega)]^2}$$

$$\angle X(\omega) = \text{atan}\,\frac{Im[X(\omega)]}{Re[X(\omega)]}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

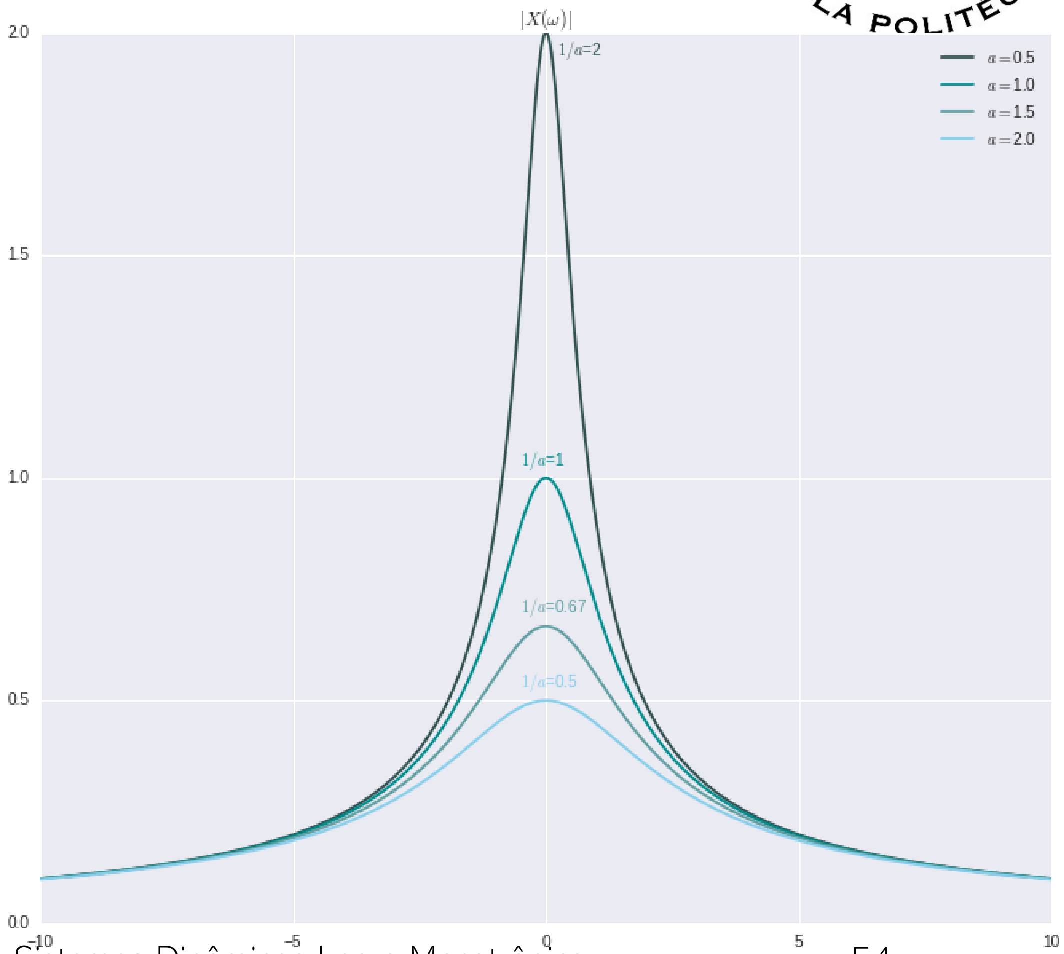


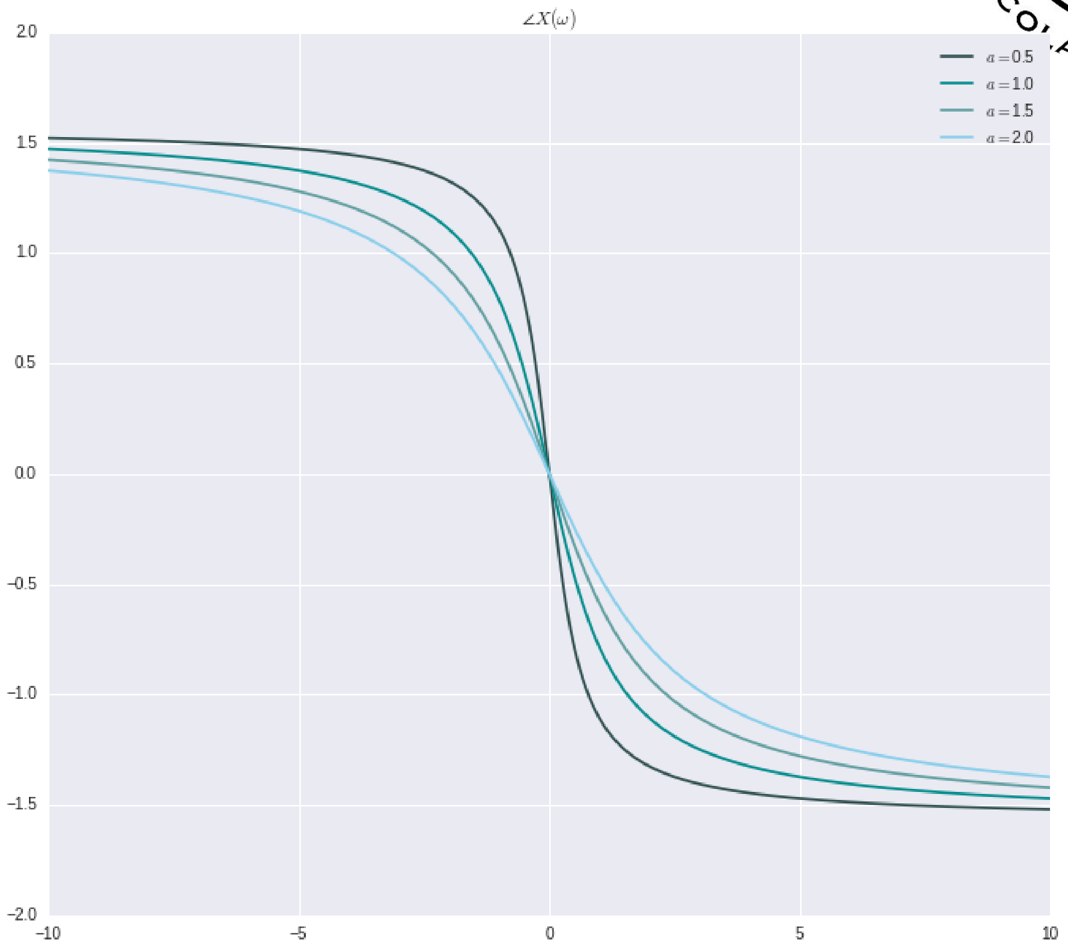
DIAGRAMA DE FASE

$$X(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Parte Real Parte Imaginária

$$\angle X(\omega) = \text{atan}\frac{Im[X(\omega)]}{Re[X(\omega)]}$$

$$\angle X(\omega) = \text{atan}\frac{-\omega}{a} = -\text{atan}\frac{\omega}{a}$$



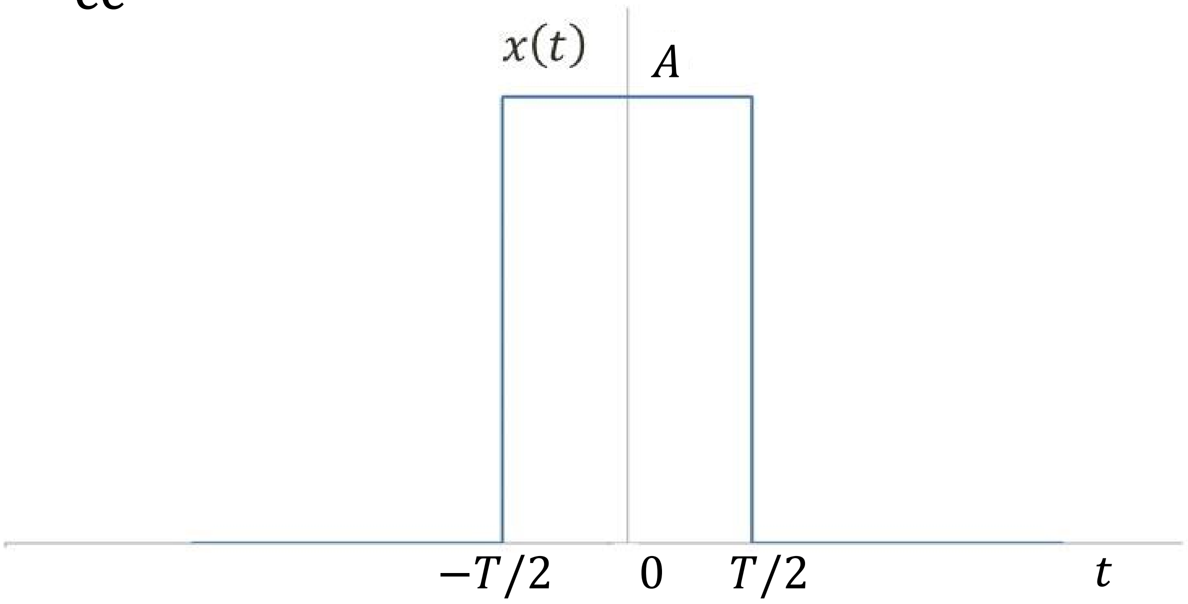
Veja, na lista de exercícios, o que acontece quando $a \to 0$...

EXEMPLO 2

Calcular a transformada da função pulso retangular:

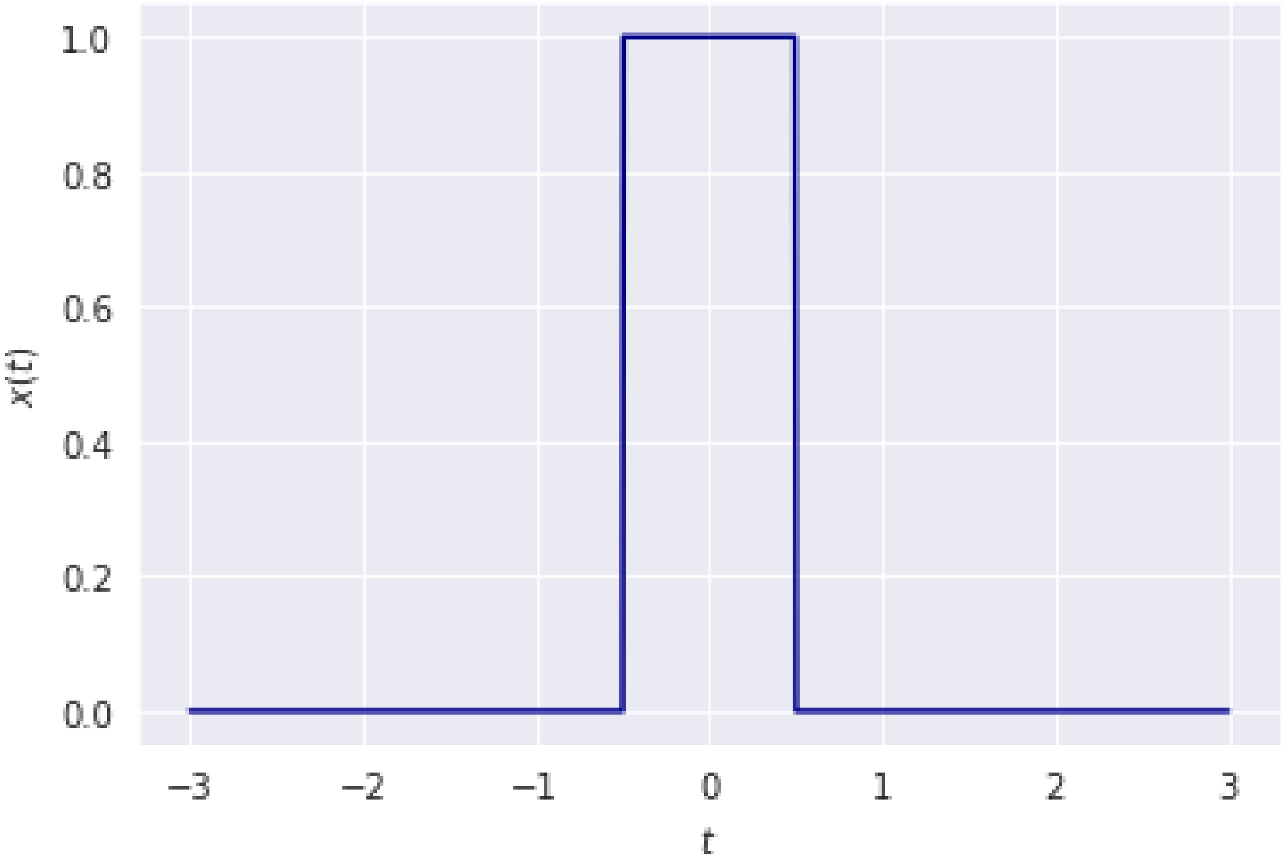
$$x(t) = \begin{cases} 1 \ \text{se} \ -T/2 < t < T/2 \\ 0, \qquad \text{cc} \end{cases}$$

Essa função é comumente chamada de $rect(t/T)$



Domínio do tempo:

$A = 1, T = 2$

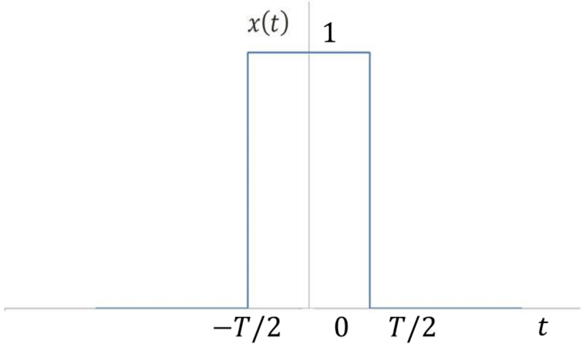


$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{+T/2} Ae^{-j\omega t}dt$$

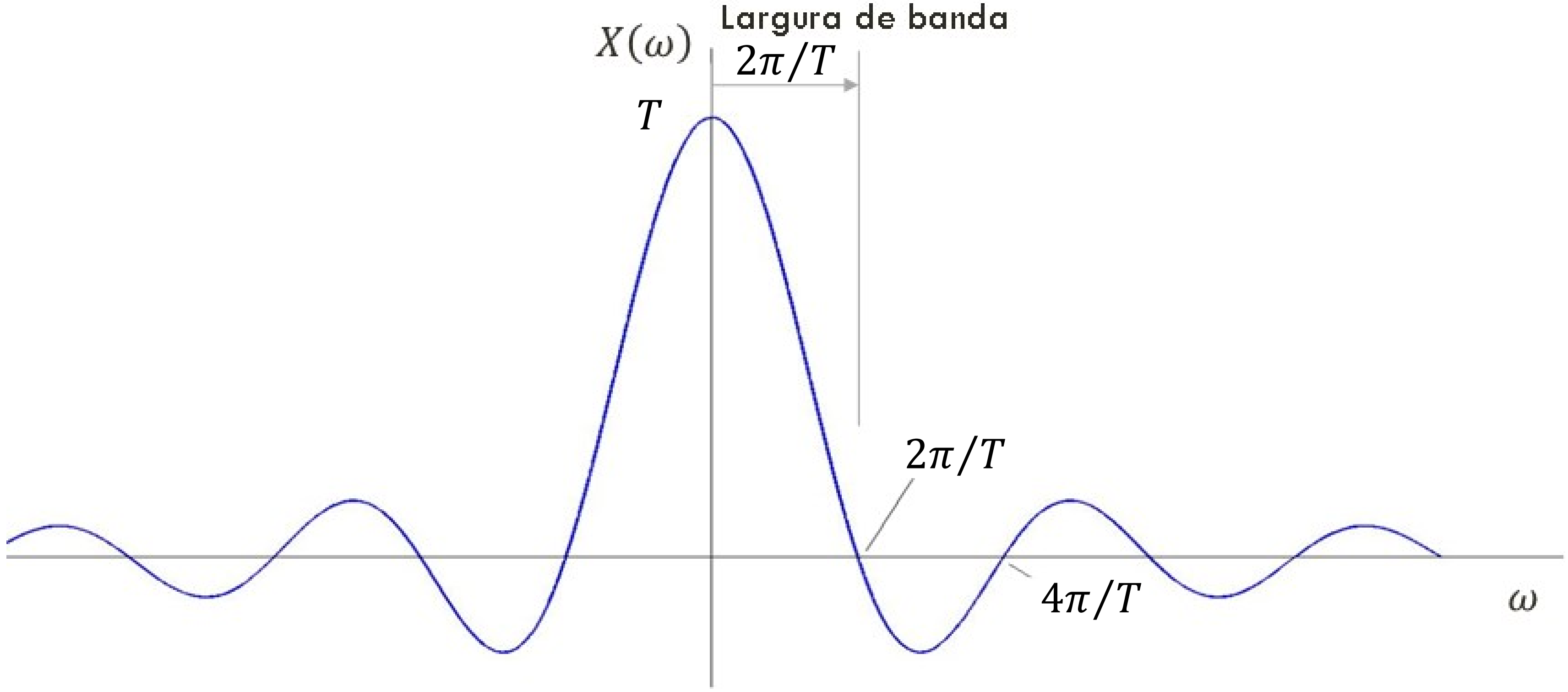
$$X(\omega) = -\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{2A}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}\right)$$

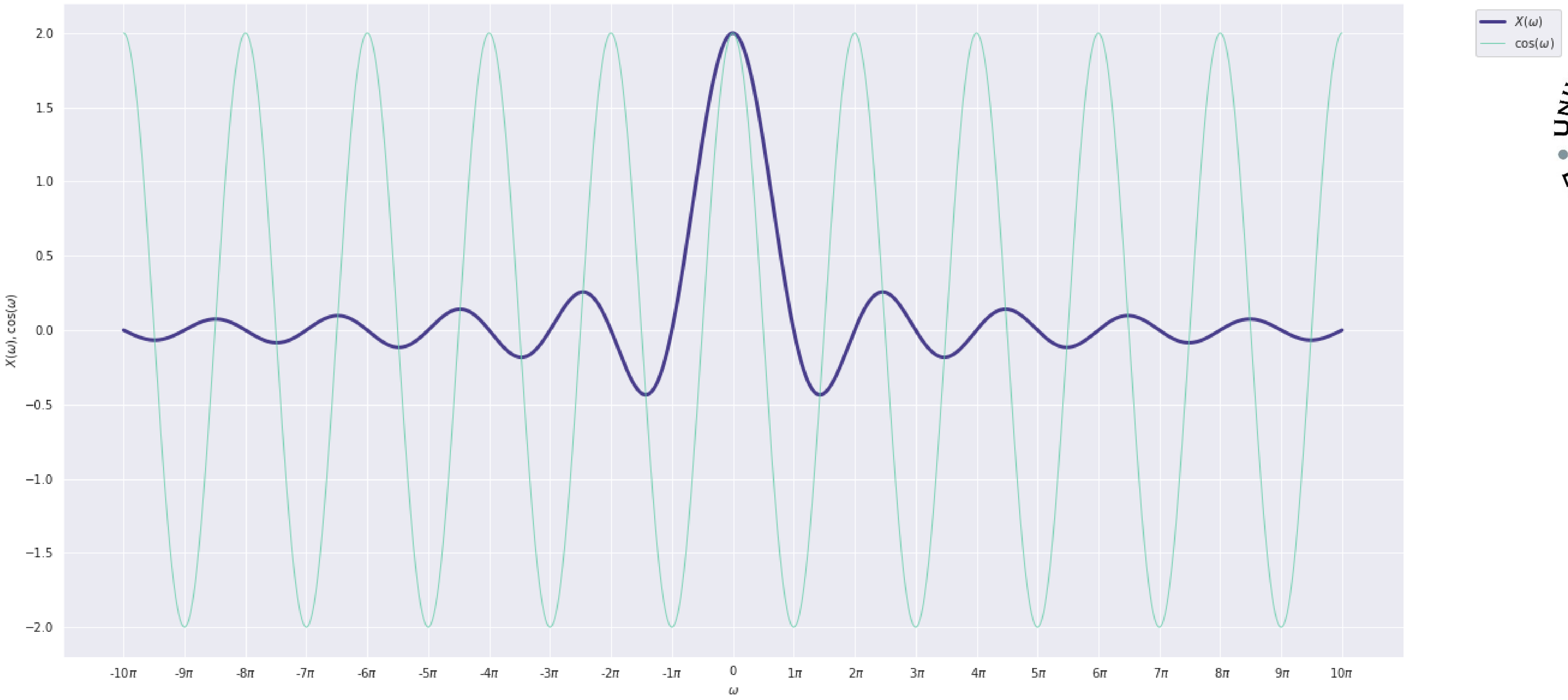
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$X(\omega) = AT\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2} = AT\text{sinc}\frac{\omega T}{2}$$



$$X(\omega) = T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T\,\mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$$



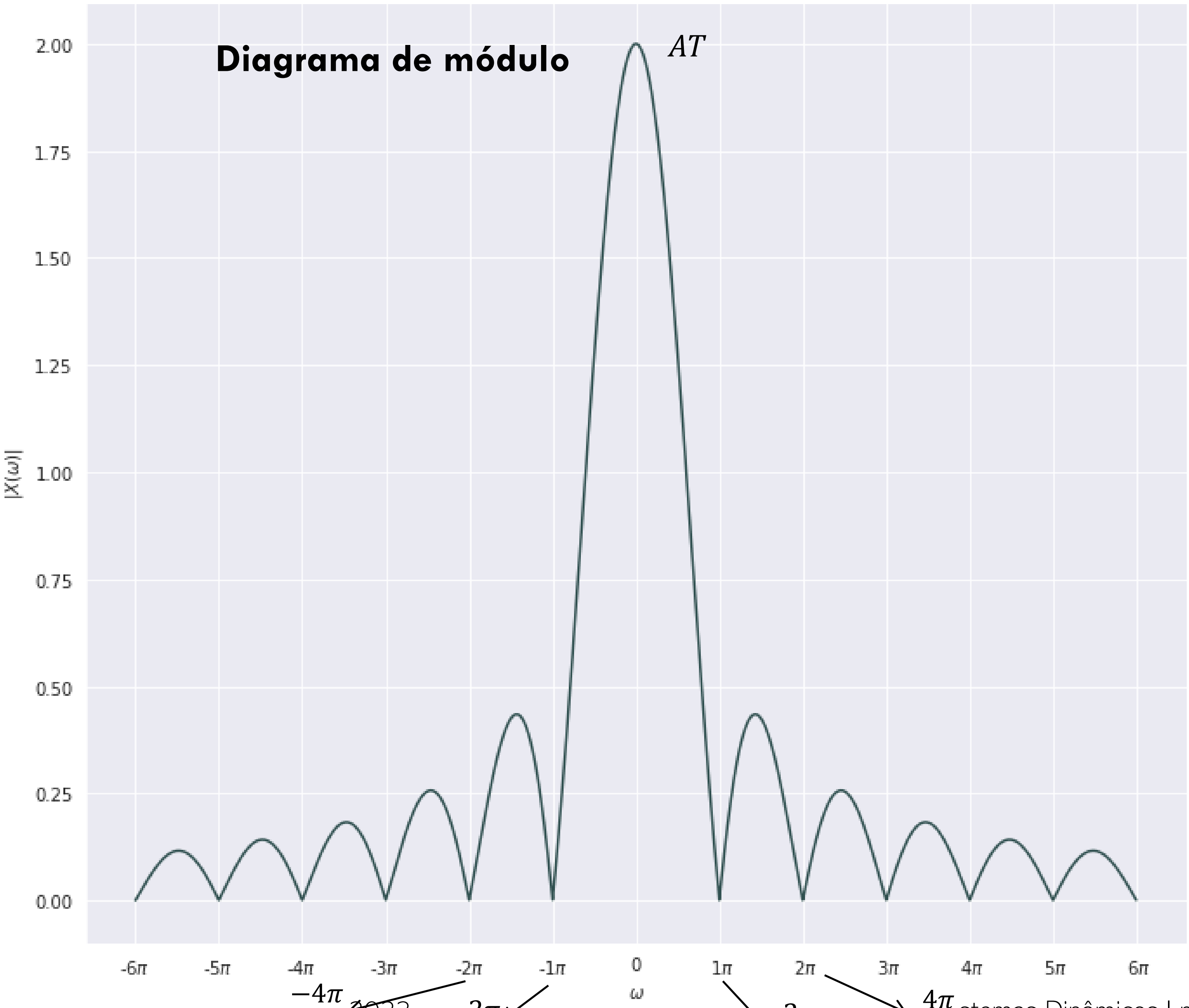


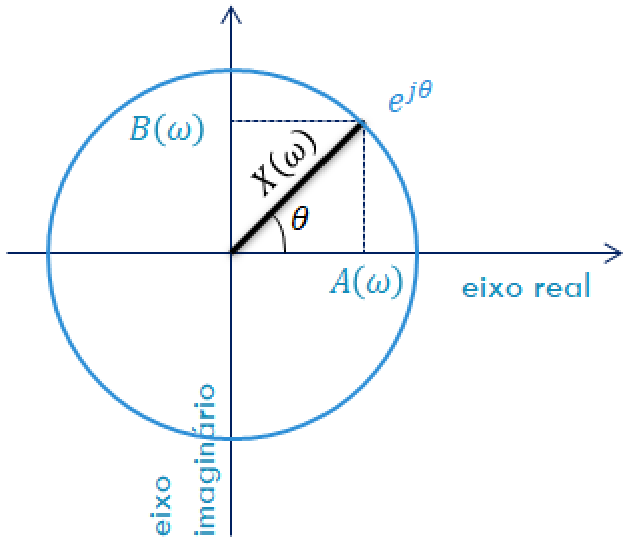
$$X(\omega) = AT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = AT\,\mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$$

$$\frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega} = 0 \rightarrow \cos(\omega T/2) - \mathrm{sinc}(\omega T/2) = 0$$

Portanto, máximos e mínimos da função *sinc* correspondem às intersecções com a função cosseno.

Diagrama de módulo



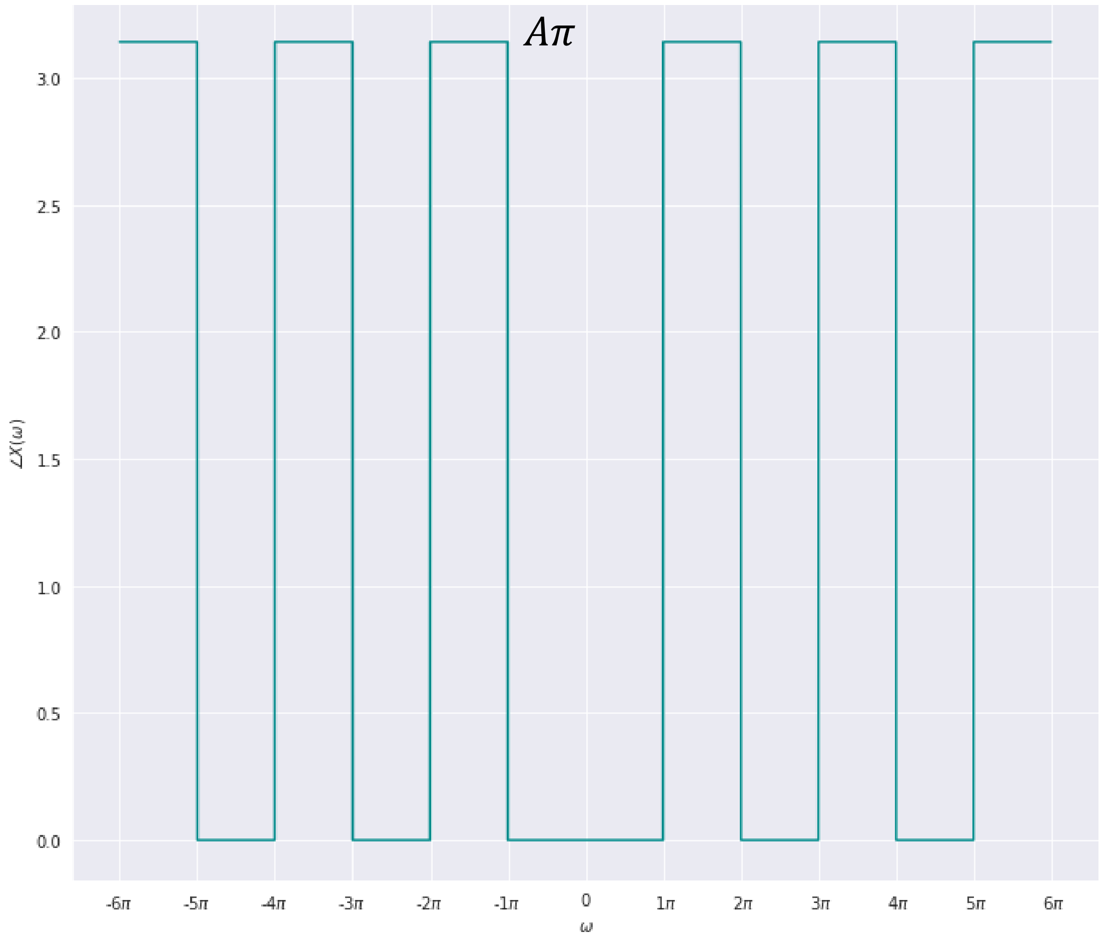


As funções reais podem estar apenas no eixo real, tendo, portanto, fases 0 ou π , dependendo do sinal positivo ou negativo da função, respectivamente.

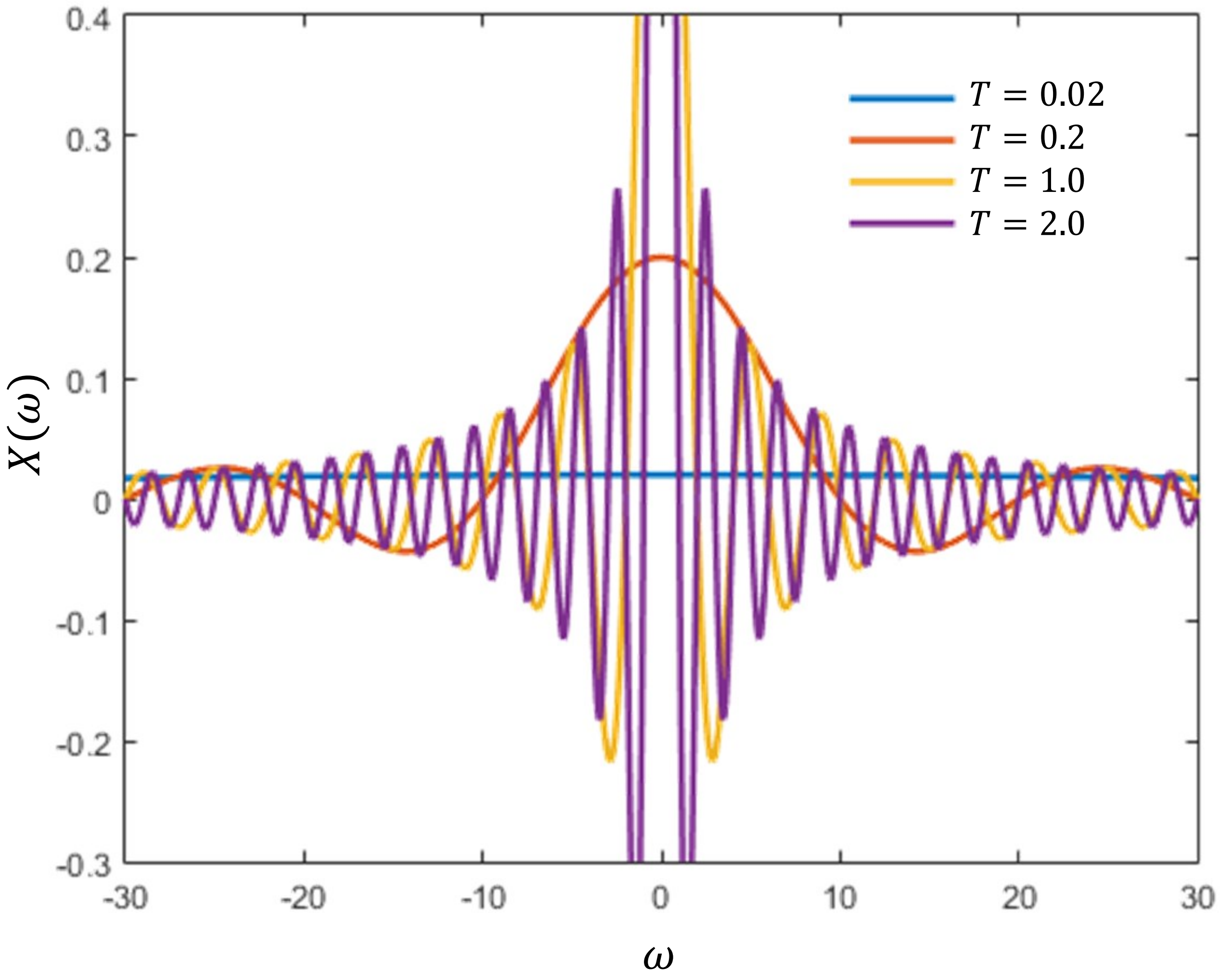
$$\angle X(\omega) = \operatorname{atan}\frac{Im[X(\omega)]}{Re[X(\omega)]} = \operatorname{atan} 0$$

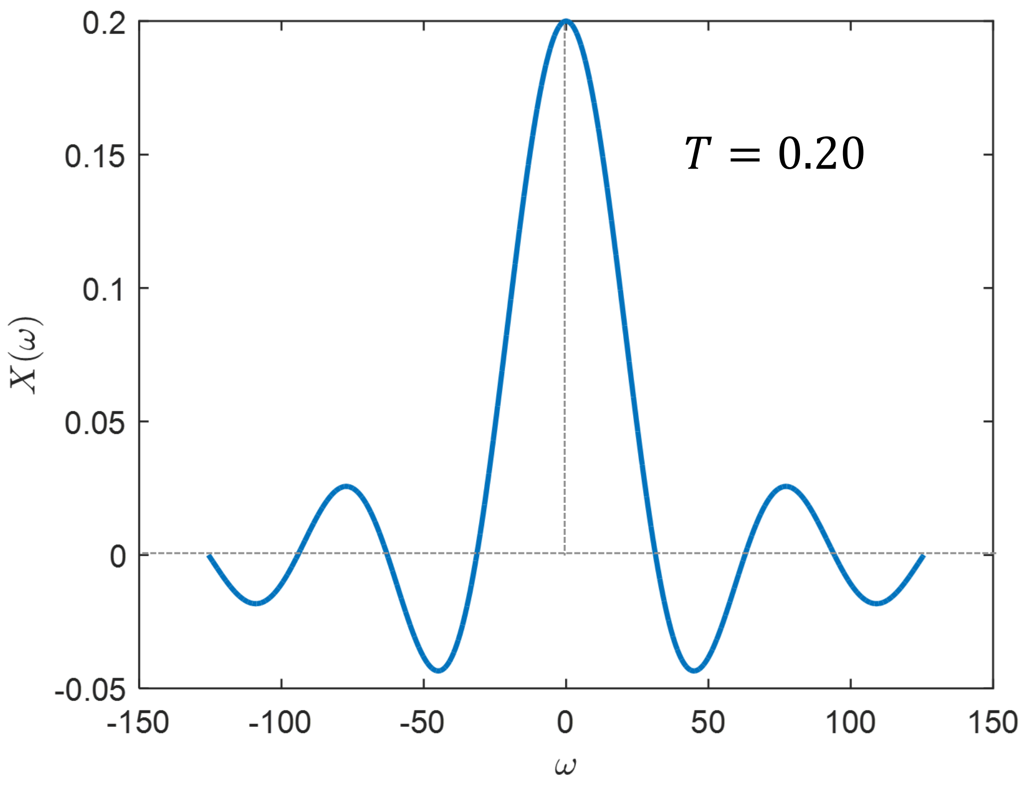
$$\angle X(\omega) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ X(\omega) > 0 \\ -\pi \ \ se \ \ X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Diagrama de fase



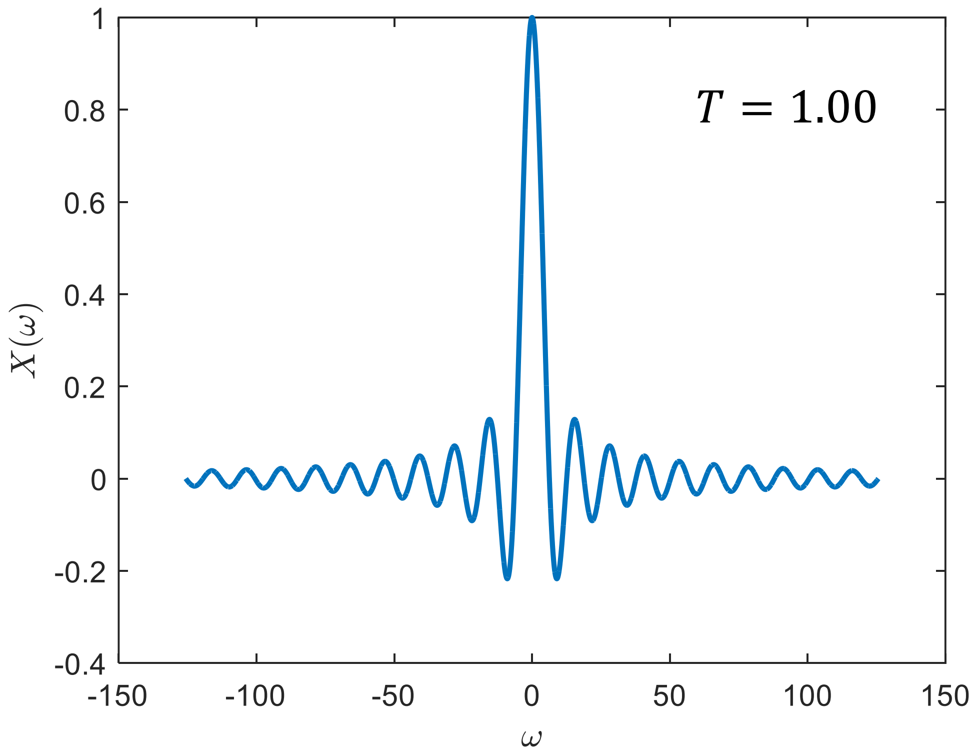
$$X(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$$





Essa relação bidirecional é muitas vezes escrito como:

$$1 \underset{FT}{\rightarrow} \delta(\omega)$$
$$\delta(t) \underset{FT}{\rightarrow} 1$$

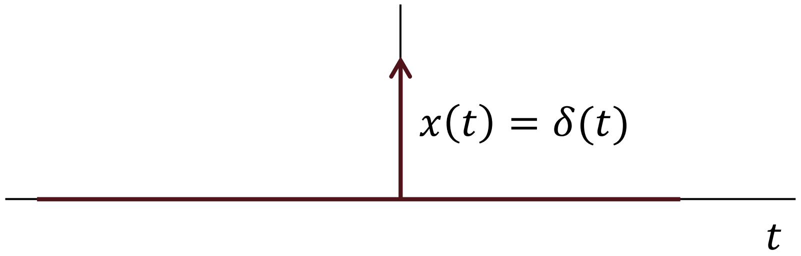


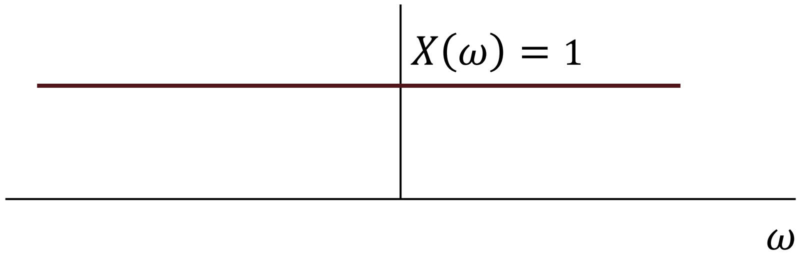
FT PARA IMPULSO UNITÁRIO $\delta(t)$

Se $x(t) = \delta(t)$,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

Impulso unitário contém componentes em todas as frequências.





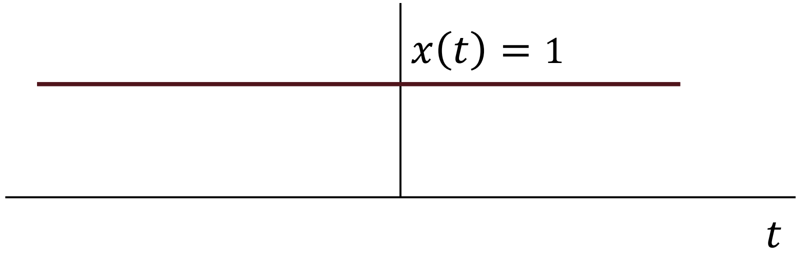
INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega)$

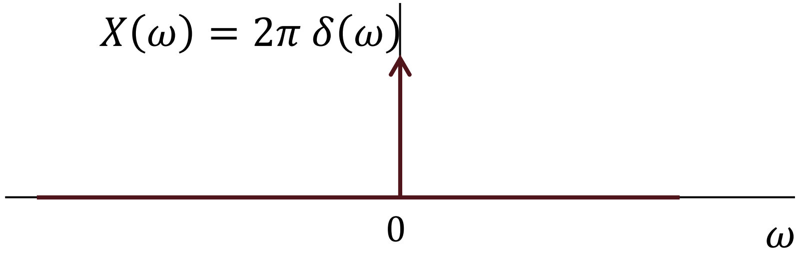
Se,

$$X(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega)$$

Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

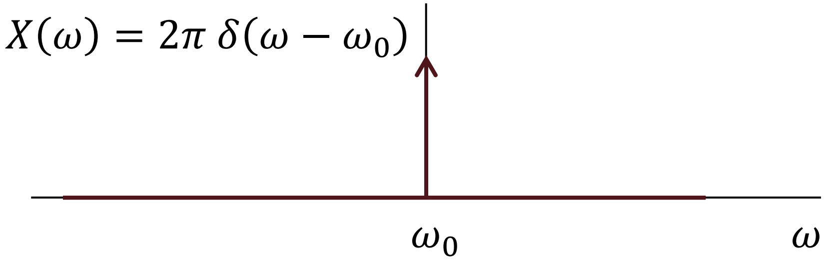




INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega - \omega_0)$

Se,
$X(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega - \omega_0)$

Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\ \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Similarmente:

$$X(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$$

ENTÃO....

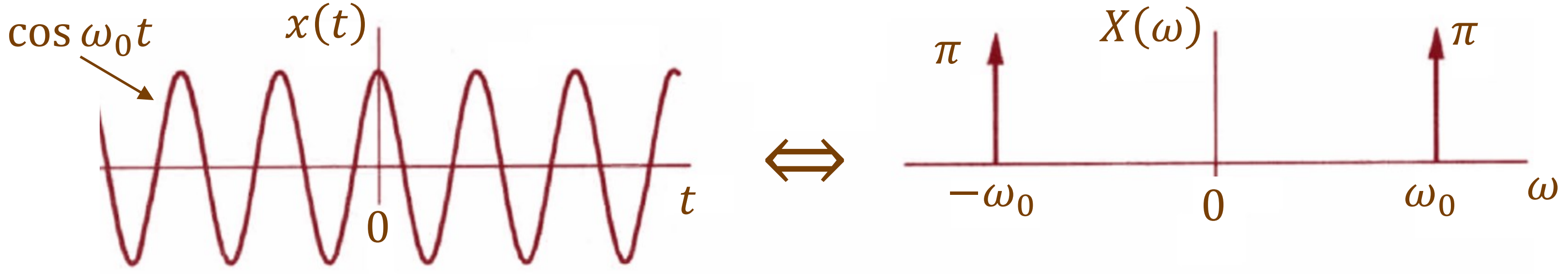
$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\text{rect}\,(t/T)$	$T\text{sinc}\,(\omega T/2)$

TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO COSSENO $\cos \omega_0 t$

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$X(\omega) = \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right]$$

Espectro de sinal cosseno tem dois impulsos em frequências positiva e negativa.



$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \theta)$
$f_0 = 10Hz$
$A = 0{,}5$
$\theta = \pi/6$

$$x(t) = cos(w_0 t - \theta) = \frac{e^{j(w_0 t - \theta)} + e^{-j(w_0 t - \theta)}}{2}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}(\frac{e^{j(w_0 t - \theta)} + e^{-j(w_0 t - \theta)}}{2})$$

$$= \frac{\mathcal{F}(e^{j(w_0 t - \theta)}) + \mathcal{F}(e^{-j(w_0 t - \theta)})}{2}$$

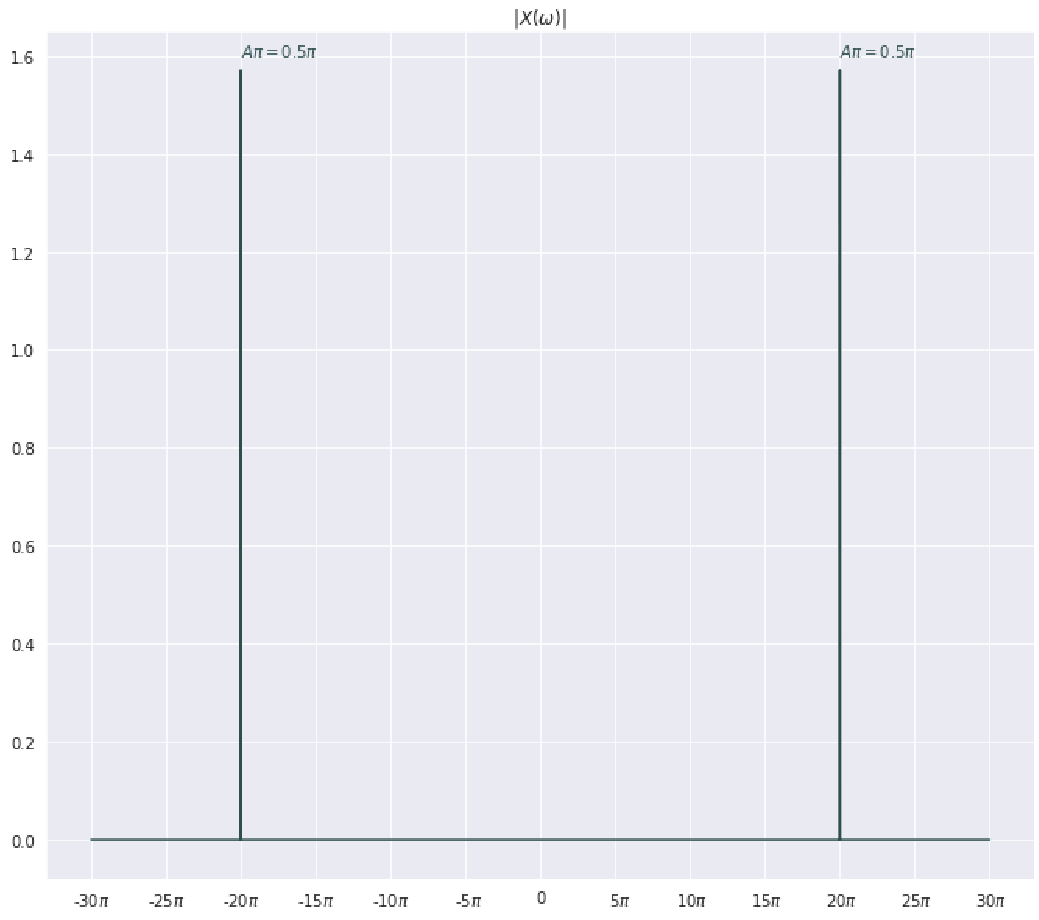
$$= \frac{e^{-j\theta}\mathcal{F}(e^{jw_0 t}) + e^{j\theta}\mathcal{F}(e^{-jw_0 t})}{2}$$

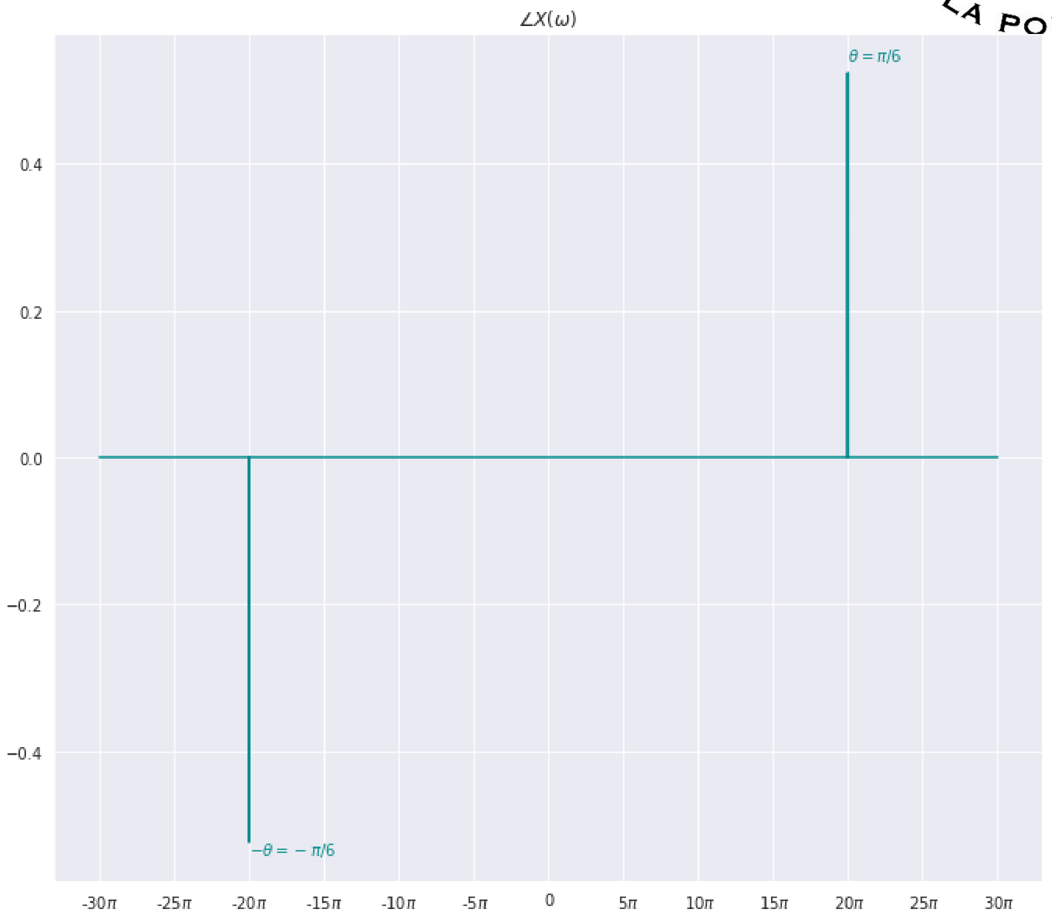
$$= \frac{e^{-j\theta}2\pi\delta(w - w_0) + e^{j\theta}2\pi\delta(w + w_0)}{2}$$

$$= \pi(e^{-j\theta}\delta(w - w_0) + e^{j\theta}\delta(w + w_0))$$

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \theta)$
$f_0 = 10Hz$
$A = 0,5$
$\theta = \pi/6$

$$X(\omega) = A\,\pi(e^{-j\theta}\delta(w - w_0) + e^{j\theta}\delta(w + w_0))$$





FT PARA QUALQUER SINAL PERIÓDICO

Se pudermos usar a FT para sinais periódicos também, podemos seguir adiante e esquecer FS.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{jn\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

FT PARA QUALQUER SINAL PERIÓDICO

Se pudermos usar a FT para sinais periódicos também, podemos seguir adiante e esquecer FS.

Série de Fourier...
Síntese...

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{jn\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$X(\omega)$ que satisfaz essa equação é chamado de

Trem de impulsos

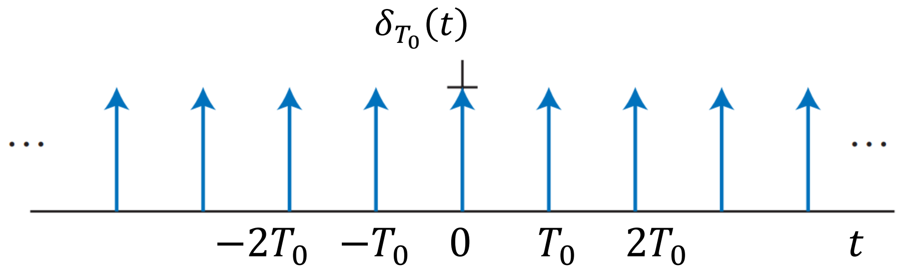
E define a transformada de Fourier para sinais periódicos em função dos coeficientes $X[n]$ da série de Fourier exponencial.

Ou seja, FT de um sinal periódico é uma versão amostrada ! Resulta em um espectro discreto com impulsos nos harmônicos $n\omega_0$ de amplitude igual ao coeficiente da série de Fourier naquele harmônico multiplicado por 2π.

FT PARA UM TREM DE IMPULSOS

Então, considere agora um trem de impulso

$$x(t) = x[n] = \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



No domínio da frequência, o trem de impulsos pode ser definido como,

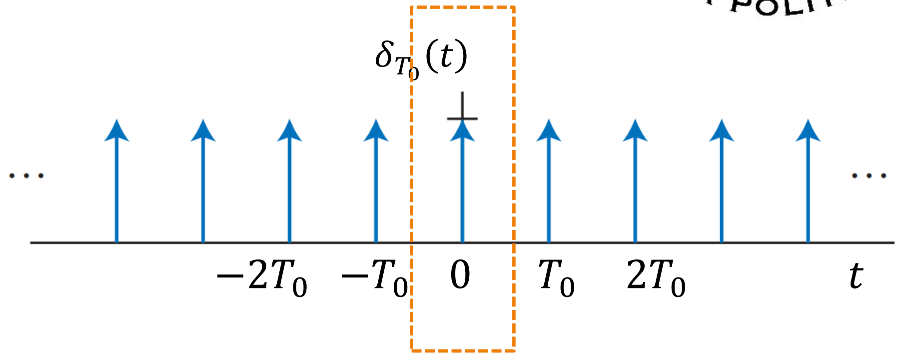
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\delta(t-nT_0)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$



Dado que a função $t \to \delta(t-nT_0)$ é nula no intervalo $[-T/2, T/2]$ para $n \neq 0$ tem-se somente um termo no somatório, de forma que,

$$X[n] = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt} = \frac{1}{T_0}1 = \frac{1}{T_0}$$

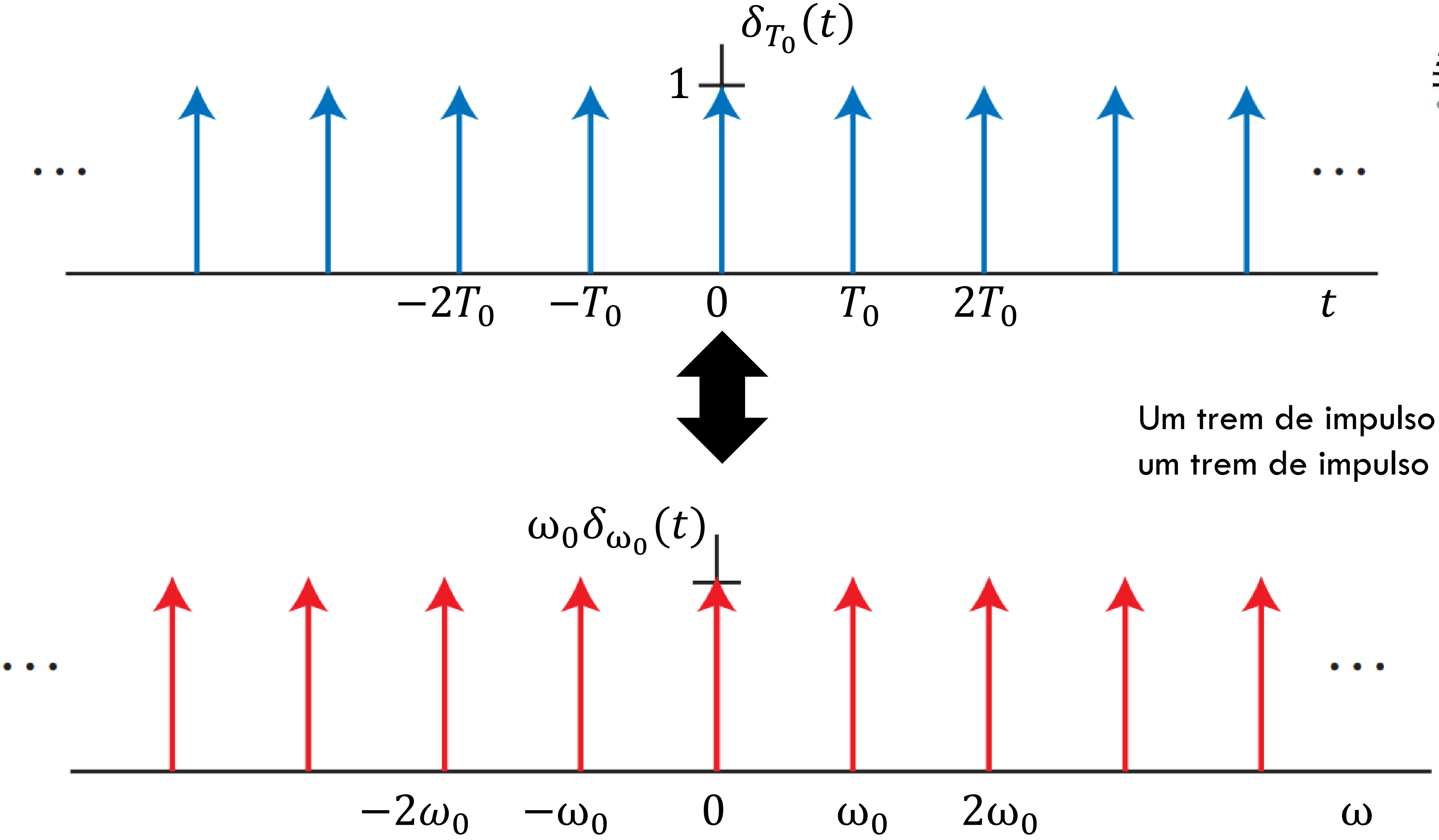
$= e^{-j0\omega_0 t} = 1, n = 0$

$= 0, n \neq 0$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0}$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



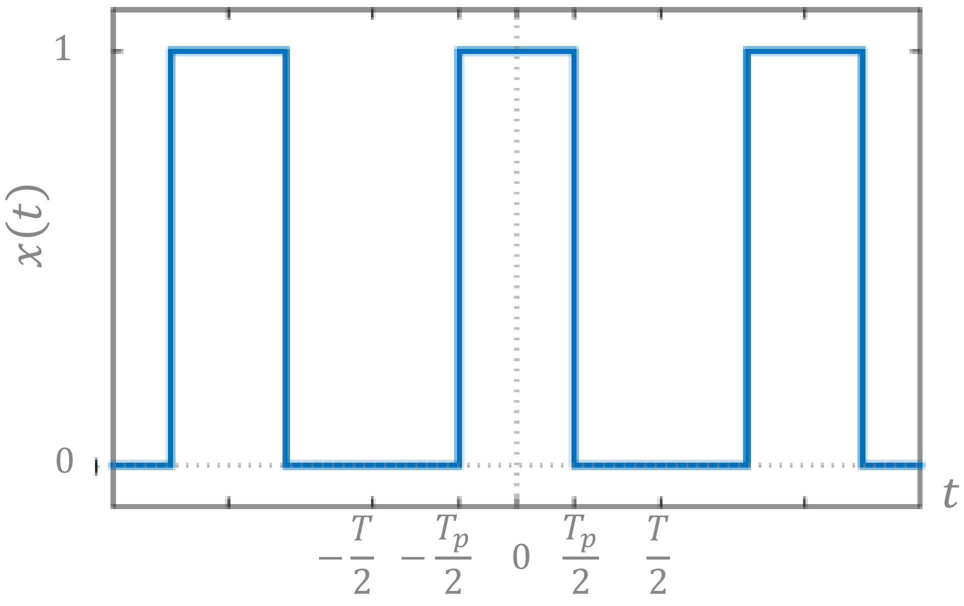
Um trem de impulso no tempo é um trem de impulso na frequência

FUNÇÃO RETANGULAR

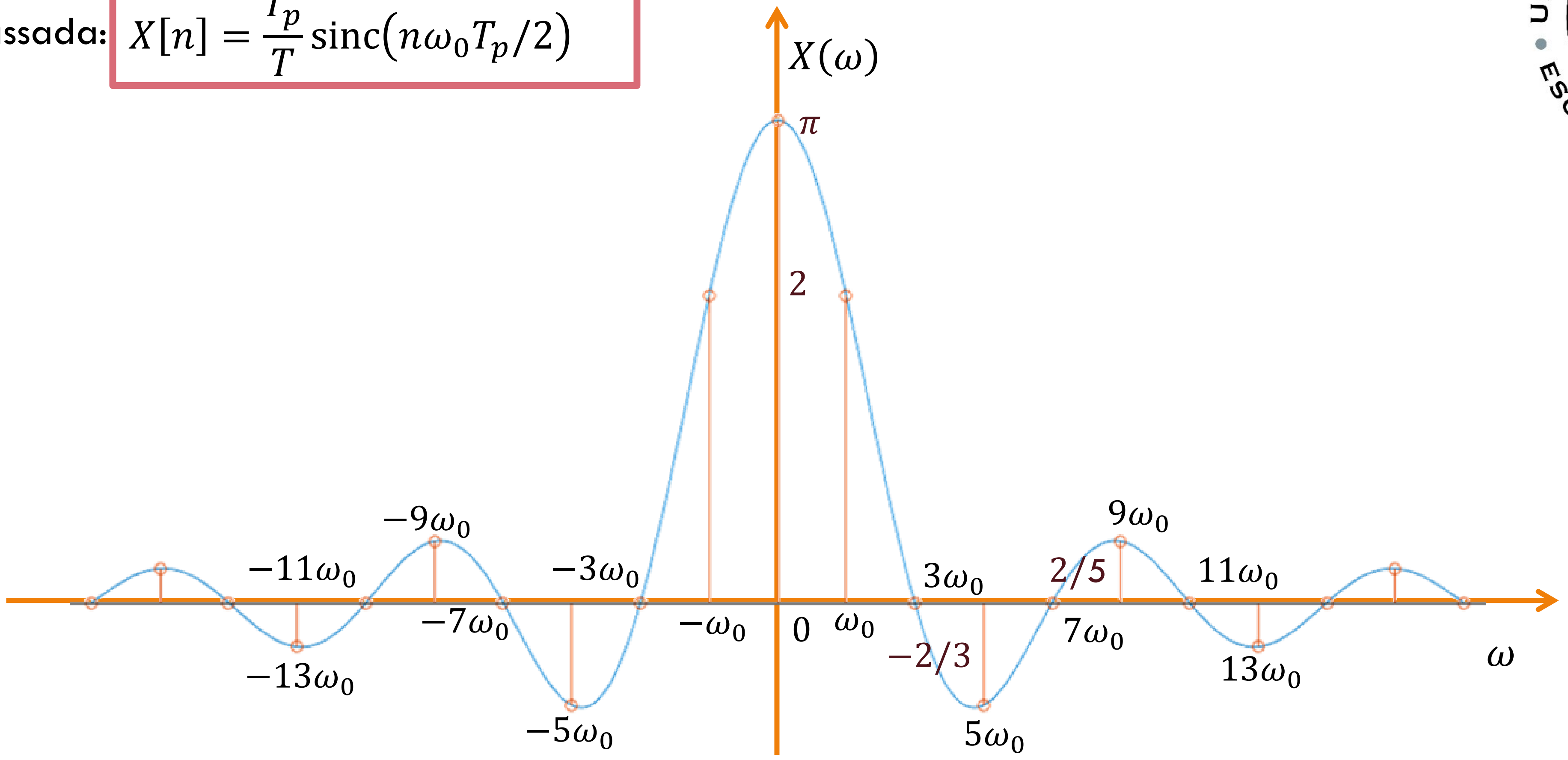
Suponha que a função retangular que já analisamos seja estendida e transformada em uma função periódica...

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t| < \dfrac{T_p}{2} \\ 0, & \text{se} \quad \dfrac{T_p}{2} < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$x(t + nT) = x(t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



Da aula passada: $X[n] = \frac{T_p}{T}\,\mathrm{sinc}(n\omega_0 T_p/2)$

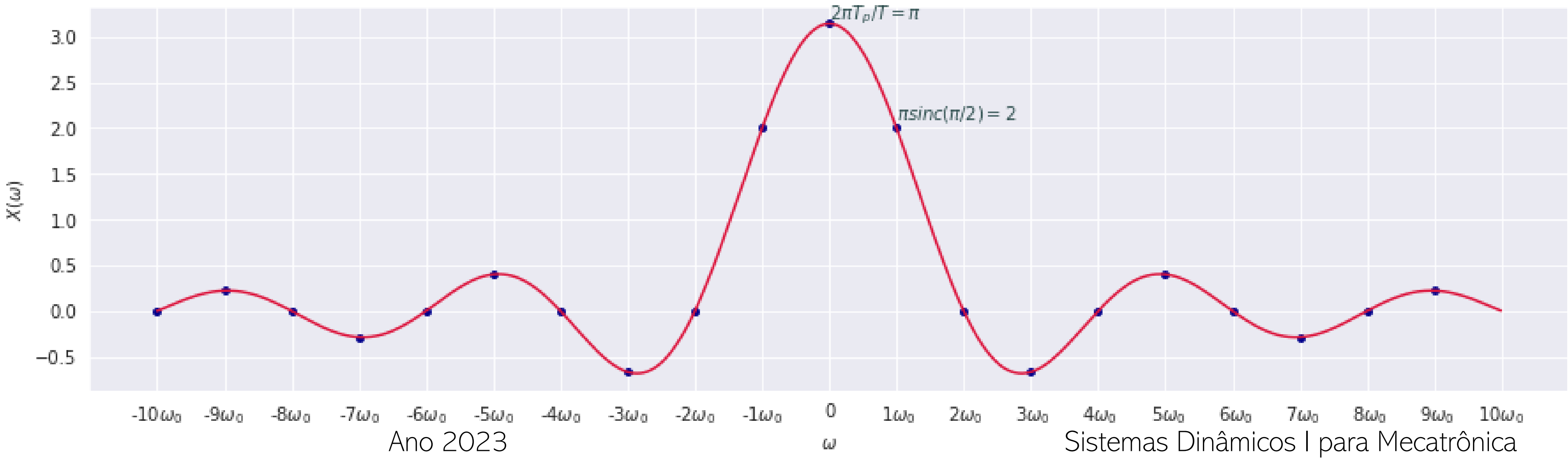


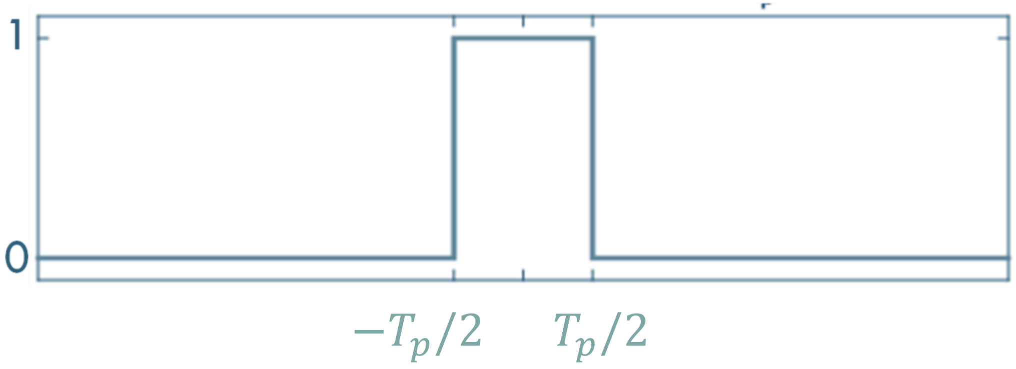
$T_p = 2, \qquad T = 4, \qquad \omega_0 = \pi/2$

$$X[n] = \frac{T_p}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 T_p/2)$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{T_p}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 T_p/2)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

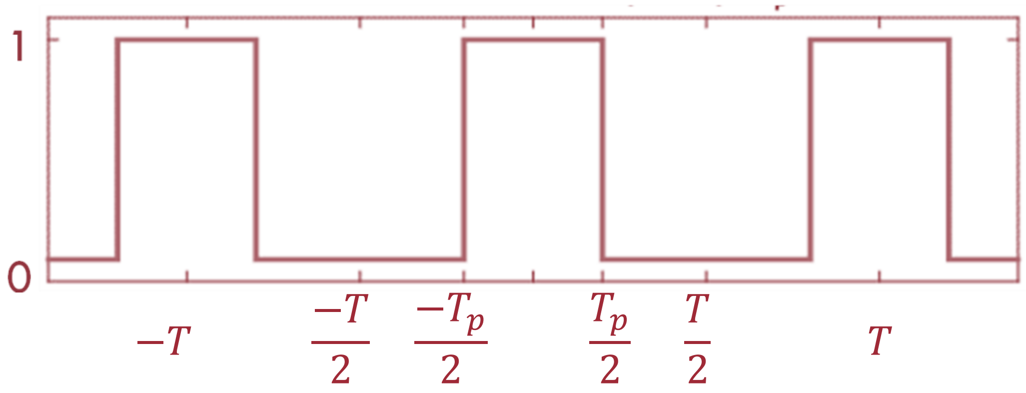




$$X(\omega) = T_p \operatorname{sinc}\left(\omega T_p/2\right)$$

Se $x_T(t)$ é a extensão periódica de $x(t)$, com o período T, então os coeficientes da Transformada de Fourier, $X_T(\omega)$, de $x_T(t)$, e $X(\omega)$, de $x(t)$, são relacionados por:

$$X_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} X(n\omega_0)$$



$$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{T_p}{T} \operatorname{sinc}\left(n\omega_0 T_p/2\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma ferramenta muito valiosa na análise de sinais e sistemas no domínio da frequência. As propriedades da FT fornecem *insights* sobre muitas propriedades ou resultados no processamento de sinal.

DUALIDADE

Transformada direta e inversa são similares!

Pequenas diferenças:

- O fator 2π que aparece na equação inversa
- O índice exponencial com sinais opostos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) \qquad X(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$$

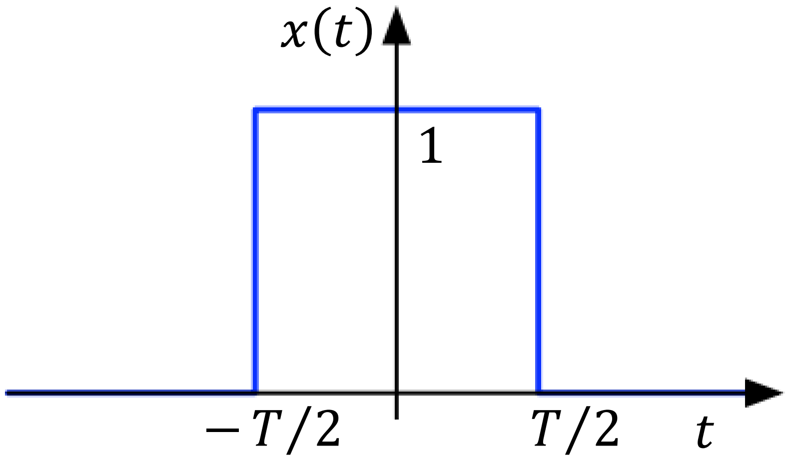
Base para dualidade de tempo e frequência:

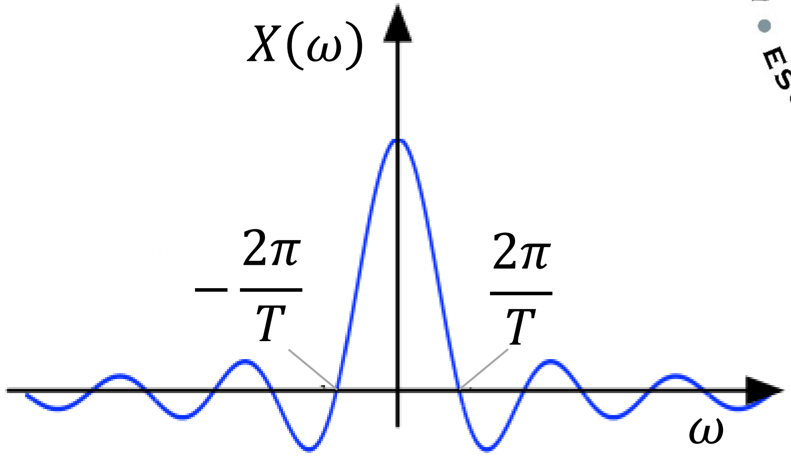
Para qualquer relação entre $x(t)$ e $X(\omega)$, existe uma relação dual, obtida trocando $x(t)$ e $X(\omega)$ (com pequenas modificações),

$$x(t) \xrightarrow[CTFT]{} X(\omega)$$

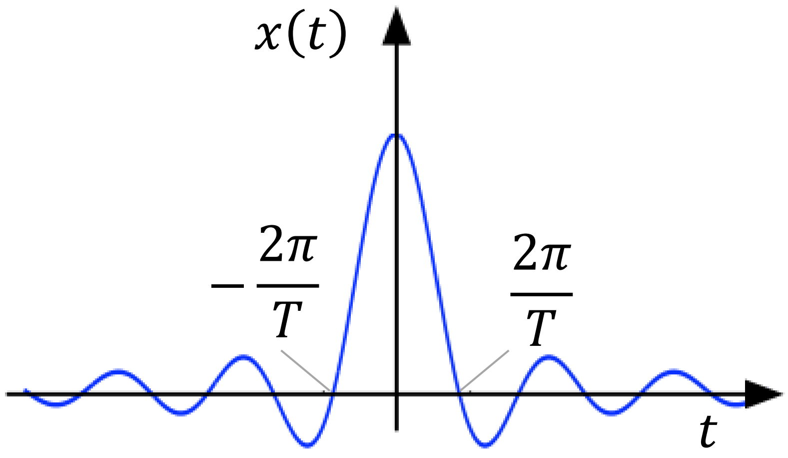
$$X(t) \xrightarrow[CTFT]{} 2\pi\, x(-\omega)$$

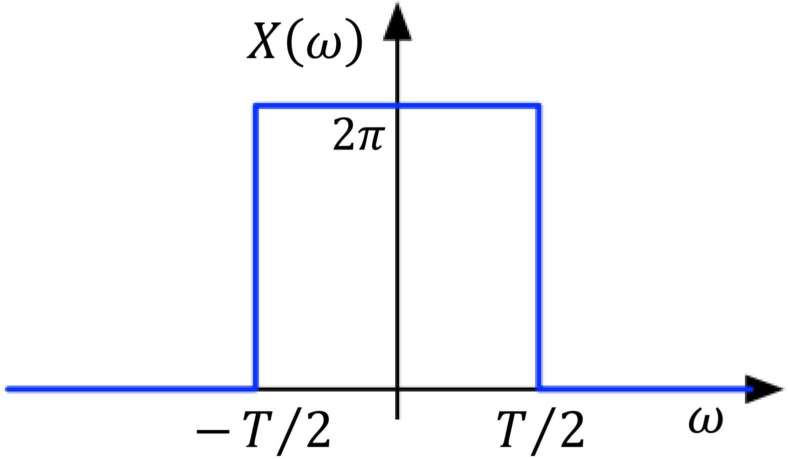
$$rect(t/T) \xrightarrow[CTFT]{} Tsinc\,(\omega T/2)$$





$$Tsinc\,(tT/2) \xrightarrow[CTFT]{} 2\pi\, rect(\omega/T)$$





LINEARIDADE

A propriedade de linearidade ou de superposição de efeitos estabelece que combinações lineares no domínio do tempo correspondem a combinações lineares no domínio da frequência.

$$ax(t) + by(t) \longrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

$$x(t) = 4\cos(2\pi 10t + \pi/3) + 24\sin(2\pi 100t - \pi/8)$$

Use as seguintes funções,

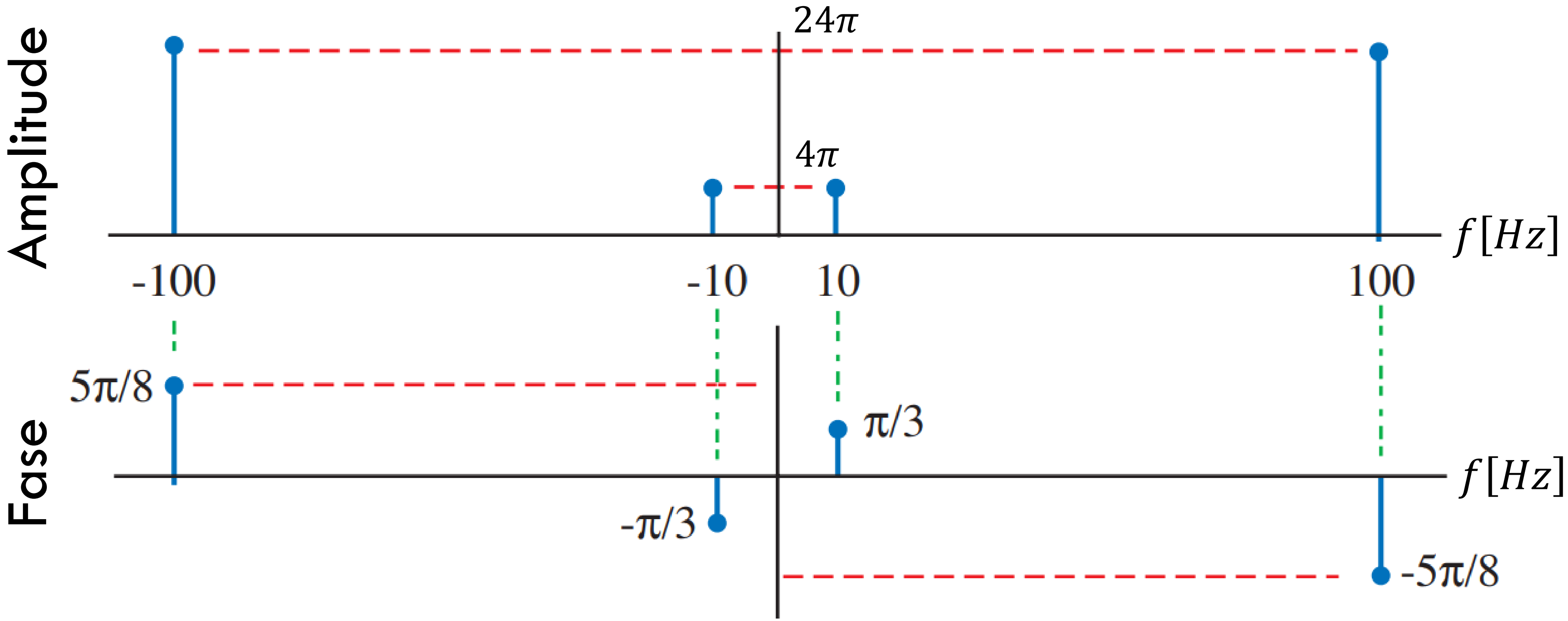
$$x(t) = \cos\omega_0 t \quad \rightarrow \quad X(\omega) = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \cos\omega_0 t$$

$$x(t) = 4\cos(2\pi 10t + \pi/3) + 24\sin(2\pi 100t - \pi/8)$$

$$x(t) = 4\cos(2\pi 10t + \pi/3) + 24\cos(2\pi 100t - 5\pi/8)$$

$$x(t) = 4\cos(2\pi 10t + \pi/3) + 24\cos(2\pi 100t - 5\pi/8)$$

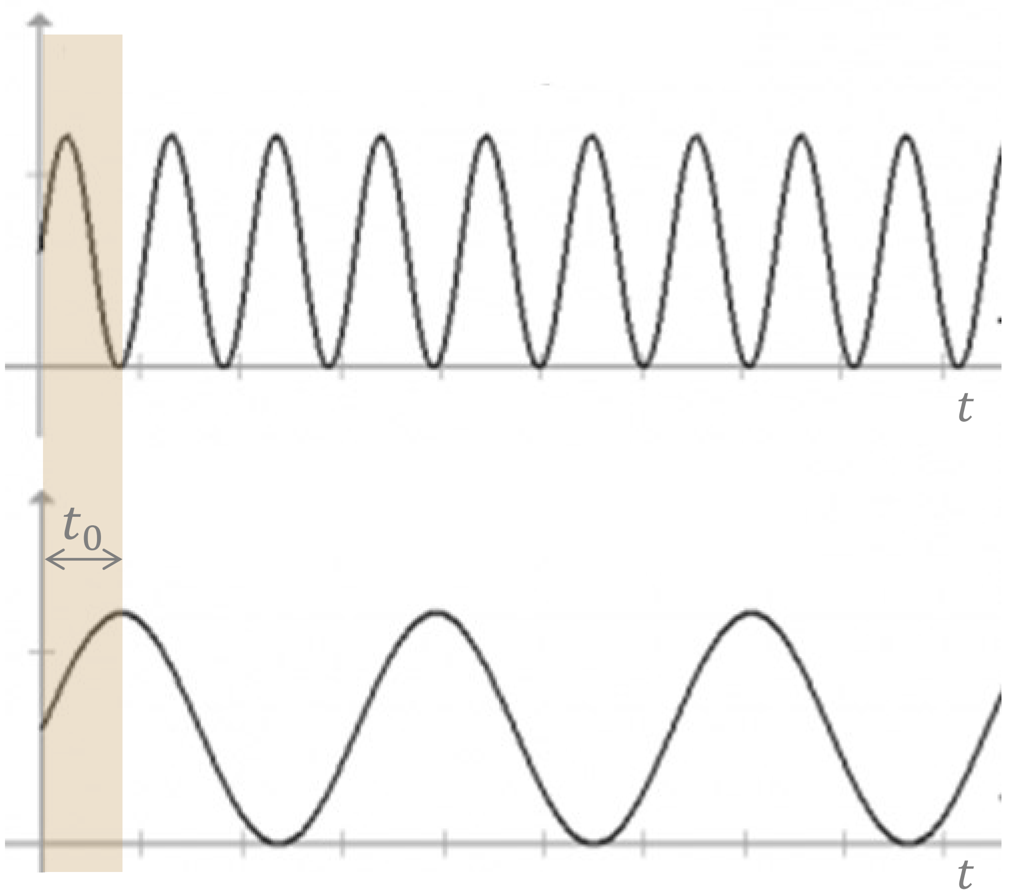


TRANSLAÇÃO NO TEMPO

Transladar um sinal no domínio do tempo faz com que a transformada de Fourier seja multiplicada por uma exponencial complexa.

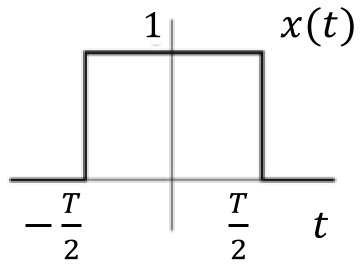
$$x(t - t_0) \xrightarrow[CTFT]{} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

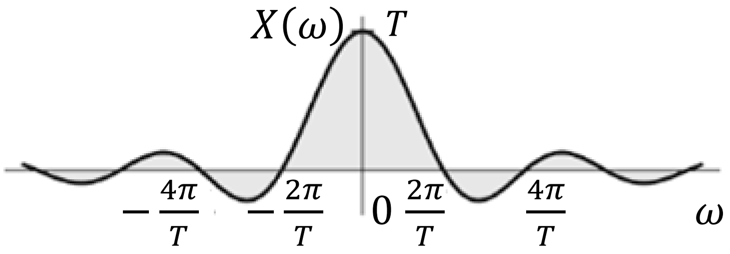
Este resultado mostra que retardar um sinal por t_0 segundos não altera o espectro de amplitude. O espectro de fase, no entanto, é alterado por $-\omega t_0$.

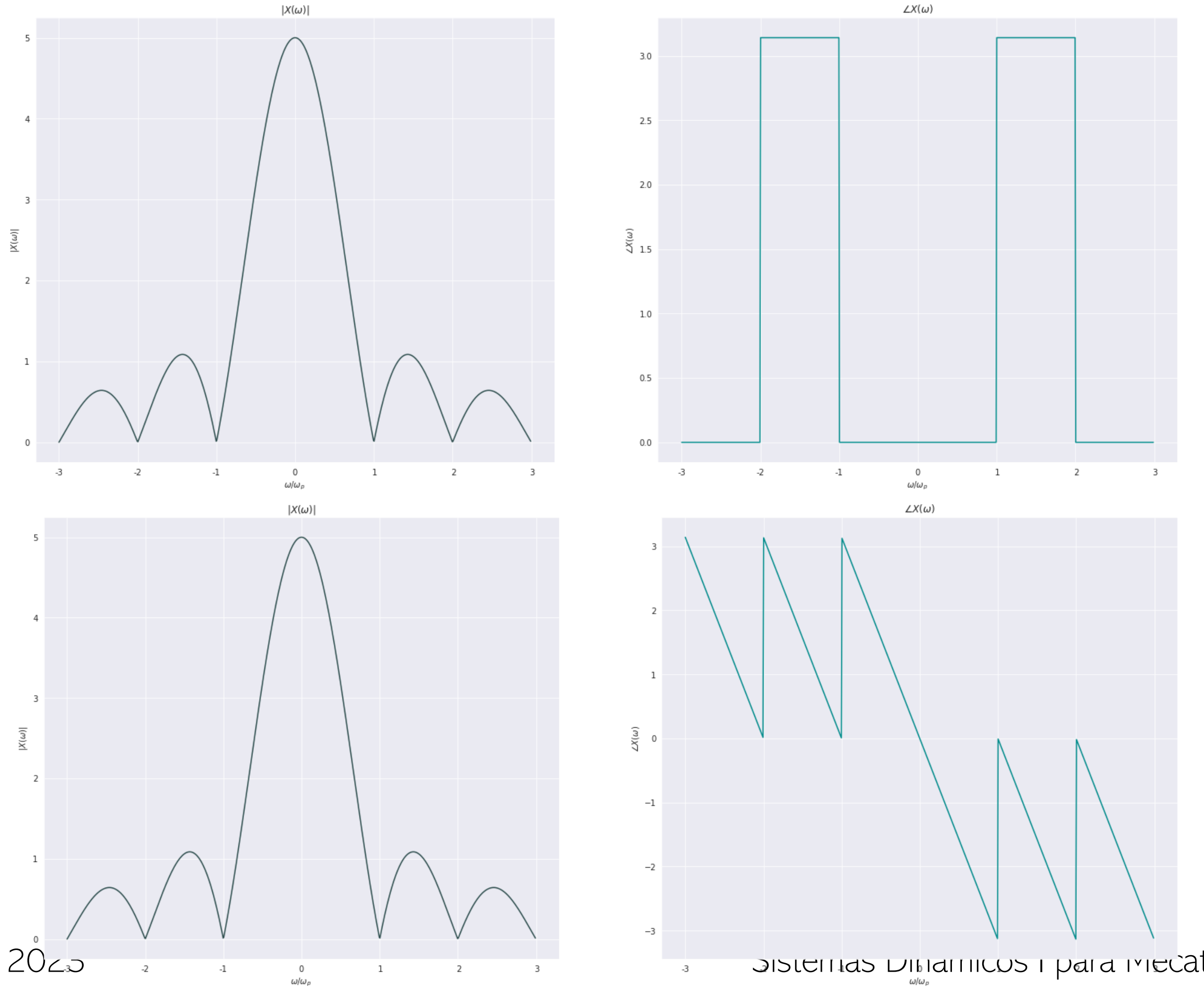


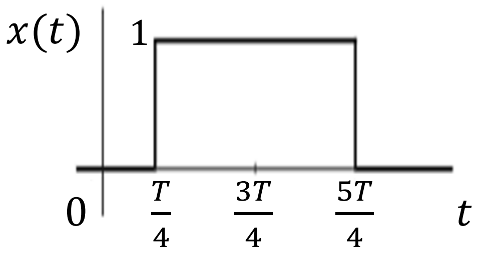
$\cos \omega t$ atrasado de t_0 é dado por: $\cos(\omega t - \omega t_0)$

O princípio do desvio de fase linear é muito importante, e vamos encontrá-lo novamente, por exemplo, em filtragem de sinal sem distorção.


1
x(t)
−T/2
T/2
t


X(ω)
T
−4π/T
−2π/T
0
2π/T
4π/T
ω

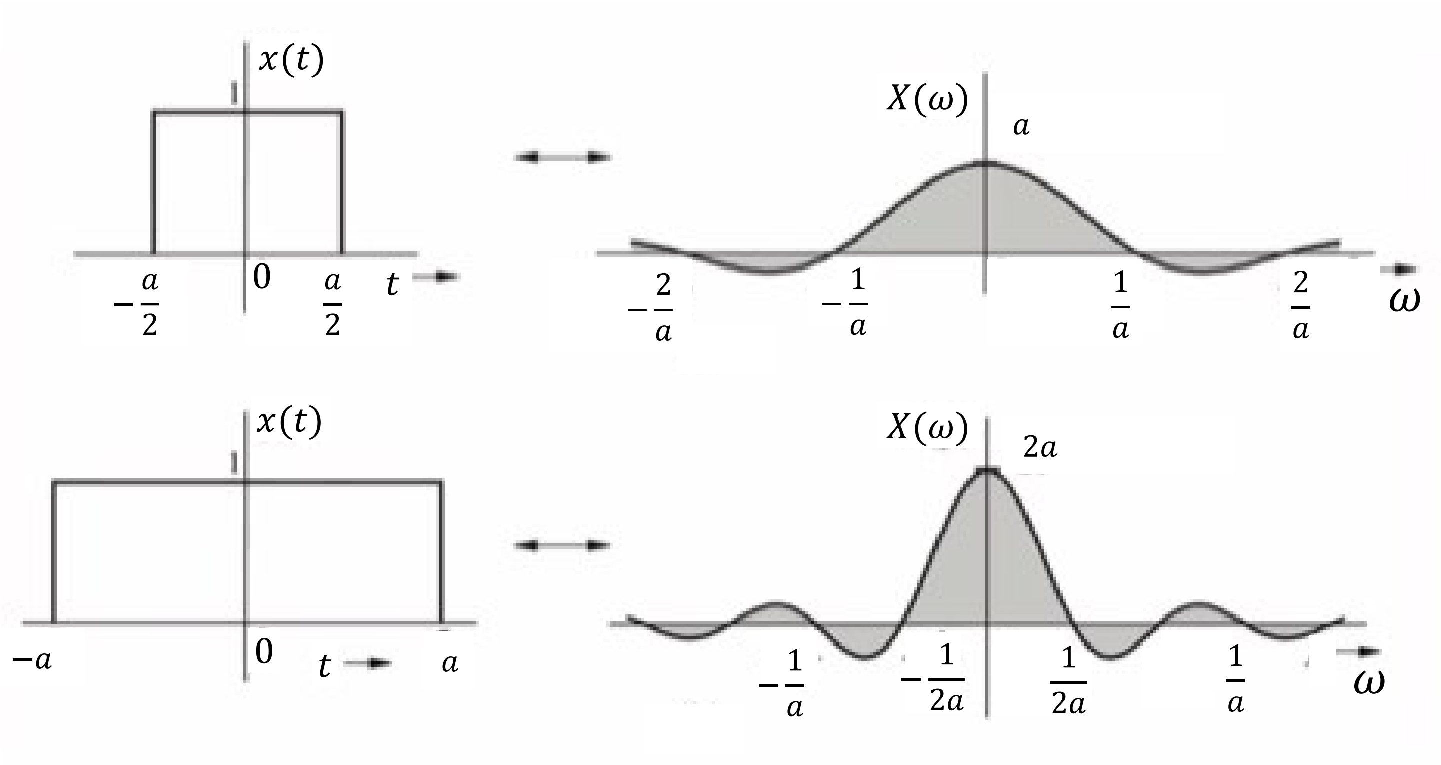

|X(ω)|
∠X(ω)
|X(ω)|
∠X(ω)


x(t)
1
0
T/4
3T/4
5T/4
t

ESCALONAMENTO NO TEMPO

A **compressão de um sinal no domínio do tempo** resulta numa **expansão no domínio da frequência** e vice-versa.

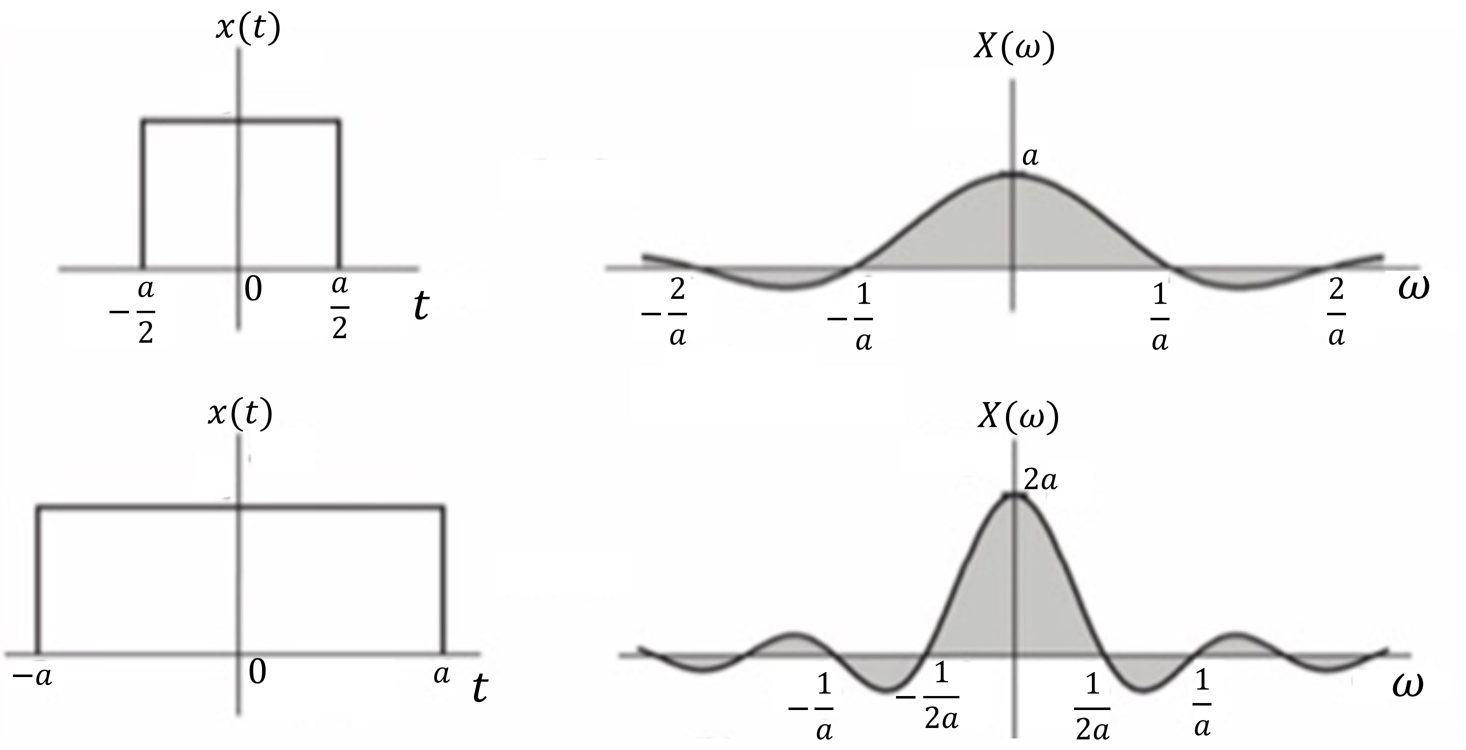
$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



ESCALONAMENTO NO TEMPO

A **compressão de um sinal no domínio do tempo** resulta numa **expansão no domínio da frequência** e vice-versa.

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO

A transformada de Fourier converte a operação de diferenciação no tempo na multiplicação por $j\omega$ na frequência.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

CONVOLUÇÃO

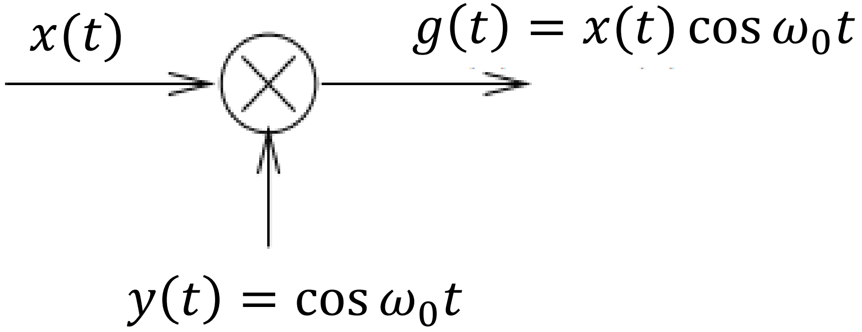
A transformada de Fourier da convolução de dois sinais é o produto das transformadas desses sinais.

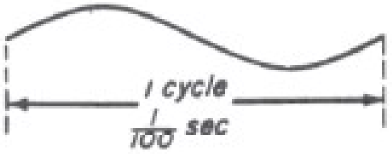
$$w(t) = x(t) * y(t) \rightarrow W(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

Portanto,

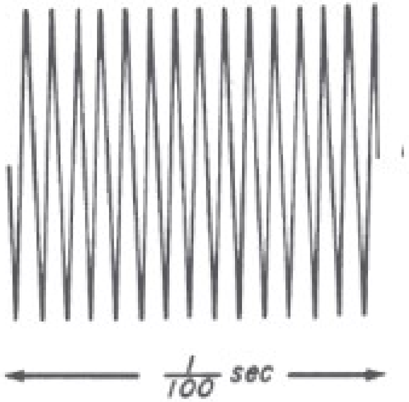
$$w(t) = x(t)y(t) \rightarrow W(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

MODULAÇÃO

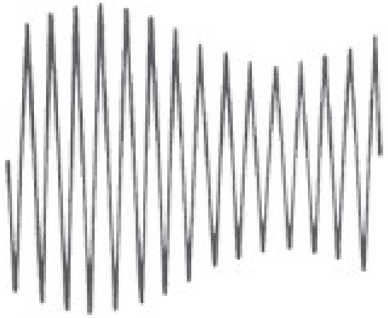




Onda modulante



Onda portadora



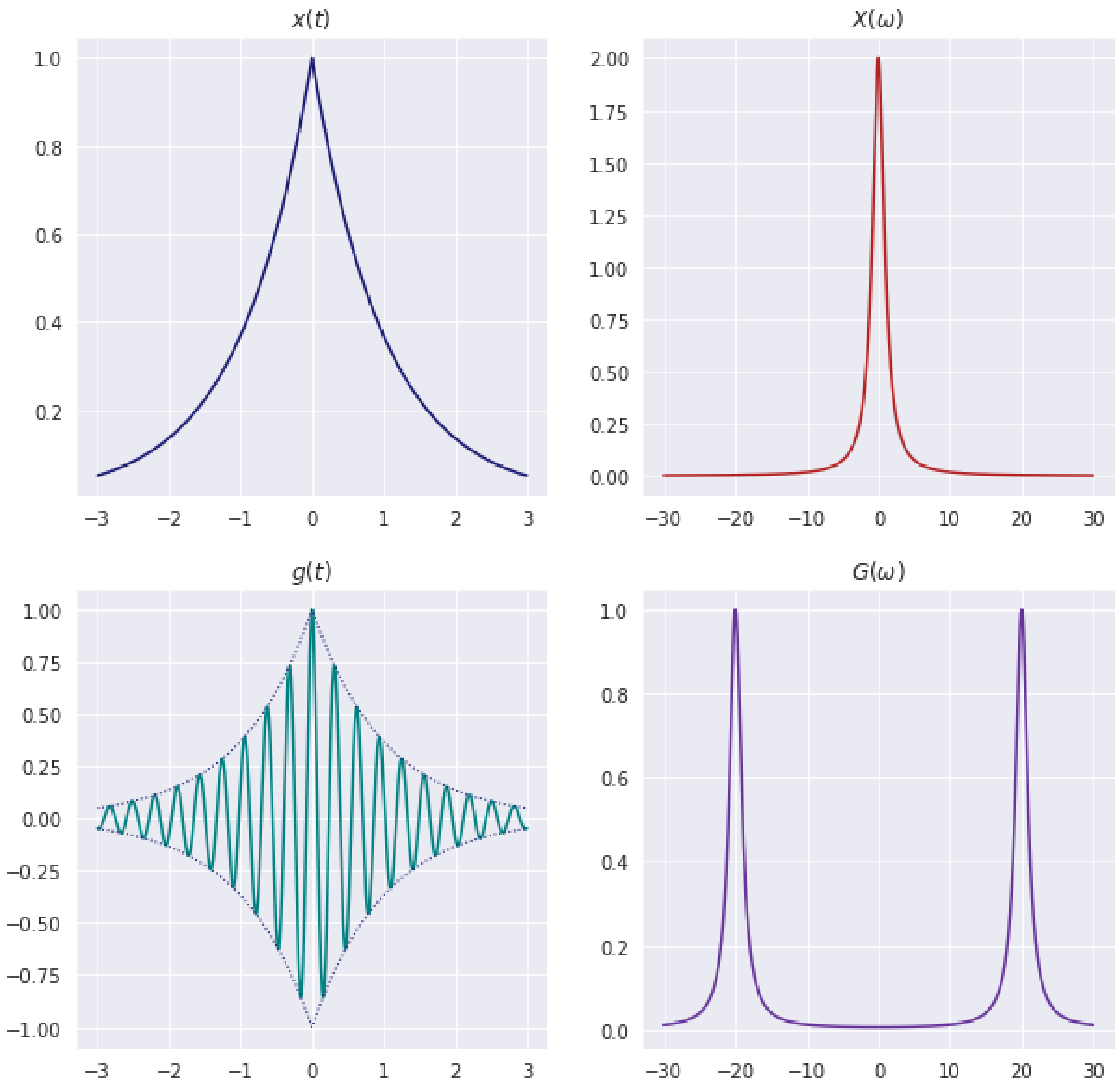
Onda modulada

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) Y(\omega - \lambda) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\delta(\omega - \lambda - \omega_0) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\delta(\omega - \lambda + \omega_0) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$



modulador

$$x(t) = e^{-|t|}$$

portador

$$y(t) = \cos 20t$$

$$g(t) = x(t)y(t)$$

$$g(t) = e^{-|t|}\cos 20t$$

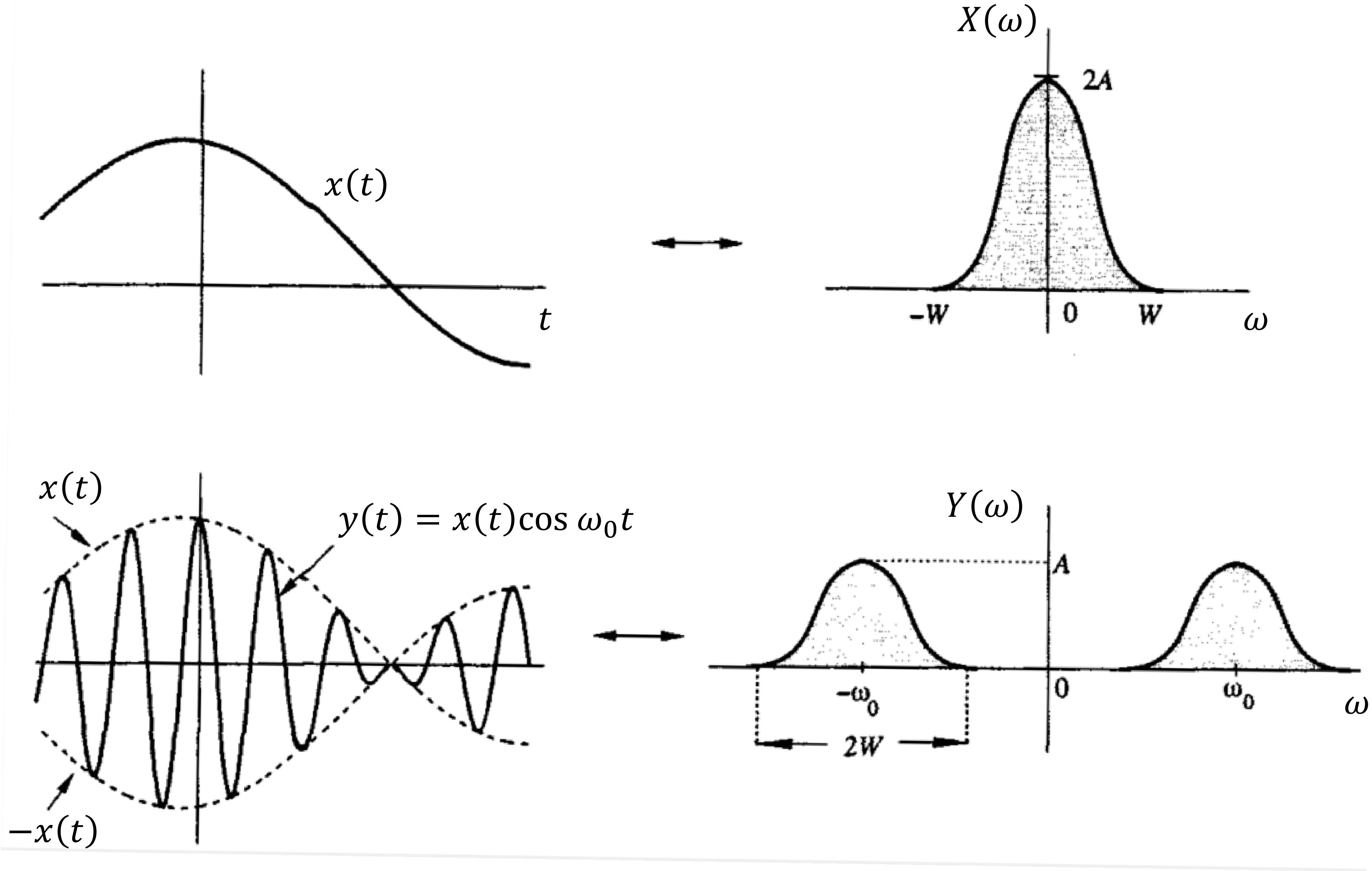
Domínio da frequência,

$$X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$Y(\omega) = \pi\delta(\omega - 20) + \pi\delta(\omega + 20)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{1+(\omega-20)^2} + \frac{1}{1+(\omega+20)^2}$$



X(ω)
2A
x(t)
t
-W
0
W
ω
x(t)
y(t) = x(t)cos ω0t
Y(ω)
A
-ω0
0
ω0
ω
2W
−x(t)

TRANSLAÇÃO NA FREQUÊNCIA

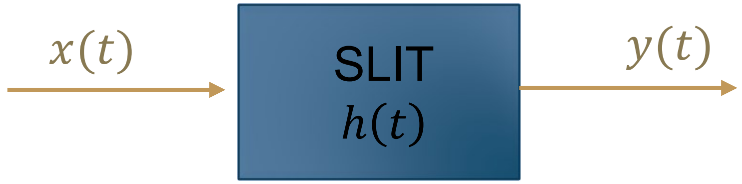
Transladar um sinal no domínio da frequência faz com que o sinal no domínio do tempo seja multiplicado por uma exponencial complexa.

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xrightarrow[CTFT]{} X(\omega - \omega_0)$$

RESPOSTA IMPULSO E CONVOLUÇÃO

O sistema é completamente caracterizado pela função resposta ao impulso, $h(t)$. A saída $y(t)$, é obtida no domínio do tempo por Convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$



Ou, no domínio da frequência,

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

onde $H(\omega)$ é a resposta em frequência do sistema, definida como a transformada de Fourier de $h(t)$,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

PRÓXIMA AULA: DTFT

Venha preparado.
Reveja a aula de hoje.