

Universidade de São Paulo

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica



Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

4ª Prática – 03/11/2014

Análise Modal

Disciplina: PMR 5211 – Mecânica dos Sólidos Experimental

Professor: Marcílio Alves

Grupo:	Beugre Ouronon Marie	8999656
	Caio César Pereira Santos	5946407
	Eric Vargas	2370310
	Fernando Tralli	5696097
	Heloísa Guedes Mendonça	9170125

Sumário

Índice de Figuras	4
Índice de Tabelas	6
1 Introdução	7
1.1 Teoria de Vigas	7
1.2 Teoria de Placas	10
1.3 Frequências Naturais.....	11
1.4 Análise modal	12
1.4.1 Teórica	12
1.4.2 Experimental.....	15
1.4.3 Numérica	16
1.5 Experimento com uma placa quadrada e com uma viga.....	16
2 Descrição do experimento	17
2.1 Régua	17
2.2 Régua com massa concentrada na extremidade.....	18
2.3 Placa.....	19
3 Frequências naturais – Viga	20
3.1 Frequências de vibração teóricas	21
3.2 Frequências de vibração experimentais	25
3.3 Frequências de vibração numéricas	25
3.4 Comparação	28

4	Frequências naturais – Viga com massa na extremidade	29
4.1	Frequências de vibração teóricas	29
4.2	Frequências de vibração experimentais	32
4.3	Comparação	34
5	Frequências naturais – Placa.....	35
5.1	Frequências de vibração teóricas	35
5.2	Frequências de vibração experimentais	37
5.3	Frequências de vibração numéricas	39
5.4	Comparação	41
6	Anexo – Carta de comandos utilizada na simulação no LS-Dyna	44

Índice de Figuras

Figura 1.1 –Linha elástica de uma viga durante vibração	8
Figura 1.2 – Sistema massa-mola (1 grau de liberdade) com força aplicada em função do tempo.	13
Figura 2.1 – Montagem do experimento de análise modal da barra.....	18
Figura 2.2 –Foto dos equipamentos utilizados para ensaio experimental da placa.	19
Figura 3.1 – Modelo da régua discretizado em 15 elementos	26
Figura 3.2 –Primeiro e Segundo modos de vibrações.	27
Figura 3.3 –Terço e Quarto modos de vibrações.....	27
Figura 3.4 – Quinto e Sexto modos de vibrações.	27
Figura 4.1 – Montagem do experimento com régua e acelerômetro (em evidência) na extremidade livre	29
Figura 4.2 – Viga em balanço com uma massa concentrada em sua extremidade livre	30
Figura 4.3 – Figura de Lissajous: elipse resultante da composição de 2 sinais.....	33
Figura 4.4 –Curvas de Lissajous para os 4 modos de vibrar capturados, da régua com massa na extremidade.....	33
Figura 5.1 –Frequências e modos de vibração obtidos experimentalmente para a placa de alumínio	38
Figura 5.2 – Primeira frequência natural e primeiro modo de vibração (experimental e numérico).....	39
Figura 5.3 – Segunda frequência natural e segundo modo de vibração (experimental e numérico).....	40
Figura 5.4 – Terceira frequência natural e terceiro modo de vibração (experimental e numérico).....	40

Figura 5.5 – Quarta frequência natural e quarto modo de vibração (experimental e numérico)..... 41

Figura 5.6 – Quinta frequência natural e quinto modo de vibração (experimental e numérico)..... 41

Índice de Tabelas

Tabela 2.1 – Dimensões da régua.....	17
Tabela 2.2 – Equipamentos utilizados no ensaio experimental da régua	17
Tabela 2.3 – Equipamentos utilizados no ensaio experimental da régua com uma massa na extremidade.....	18
Tabela 3.1 – Seis primeiras frequências naturais teóricas para a régua sem massa na extremidade	25
Tabela 3.2 – Seis primeiras frequências naturais experimentais para a régua sem massa na extremidade.....	25
Tabela 3.3 – Valores numéricos das 6 primeiras frequências naturais numéricas para a régua sem massa na extremidade.....	26
Tabela 3.4 – Comparação entre os modos de vibrar teórico, experimental e numérico.	28
Tabela 4.1 – Cinco primeiras frequências naturais teóricas do sistema com acelerômetro acoplado.....	32
Tabela 4.2 – Frequências naturais experimentais para a régua com massa na extremidade	34
Tabela 4.3 – Comparação entre as frequências naturais teórica e experimental	34
Tabela 5.1 – Coeficientes G_i , J_i e H_i para placa livre-livre [Blevins, 2001]	36
Tabela 5.2 – Valores obtidos das 30 primeiras frequências naturais.....	37
Tabela 5.3 – Comparação dos valores de frequência obtidos.....	42
Tabela 5.4 – Desvios dos valores de frequência obtidos.....	43

1 Introdução

Análise modal é o estudo das propriedades dinâmicas de um sistema submetido a excitação através de vibrações. A análise dinâmica de um sistema pode ser feita por meio da análise modal teórica e experimental. Uma vez que qualquer resposta dinâmica de uma estrutura pode ser obtida como uma combinação de seus modos. As formas modais, as frequências modais e os fatores de amortecimento modais constituem uma descrição dinâmica completa desta estrutura.

Os métodos da análise modal caracterizam-se pelo cálculo direto dos parâmetros modais da estrutura a partir dos registros no tempo de sua excitação e resposta. A estimativa experimental dos parâmetros modais da estrutura pode ser diretamente realizada a partir dos sinais medidos ou após o processamento dos mesmos.

A análise modal teórica é baseada na técnica de elementos finitos. Essa técnica é baseada na resolução de um modelo matemático por equações diferenciais parciais. O Método de Elementos Finitos (MEF) é muito utilizado para análise de vibrações. Obtêm-se as matrizes físicas de massa e de rigidez da estrutura. Então, utilizam-se essas matrizes na formulação de um problema de autovalores e autovetores, sendo que a solução são as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. Esses resultados constituem o chamado modelo modal teórico.

1.1 Teoria de Vigas

A modelagem e o controle de vibrações de estruturas flexíveis tem sido alvo de estudos aprofundados em função da exigência que se tem no desempenho de sistemas estruturais. Sistemas estruturais devem apresentar um comportamento dinâmico preciso a fim de se garantir a estabilidade do sistema e precisão do movimento.

No equacionamento do modelo de viga de Euler-Bernoulli, em vibração livre, e sem escalonamento, somente deslocamentos produzidos por flexão pura são considerados. A Figura 1.1 apresenta a linha elástica de uma viga uniforme durante a vibração livre.

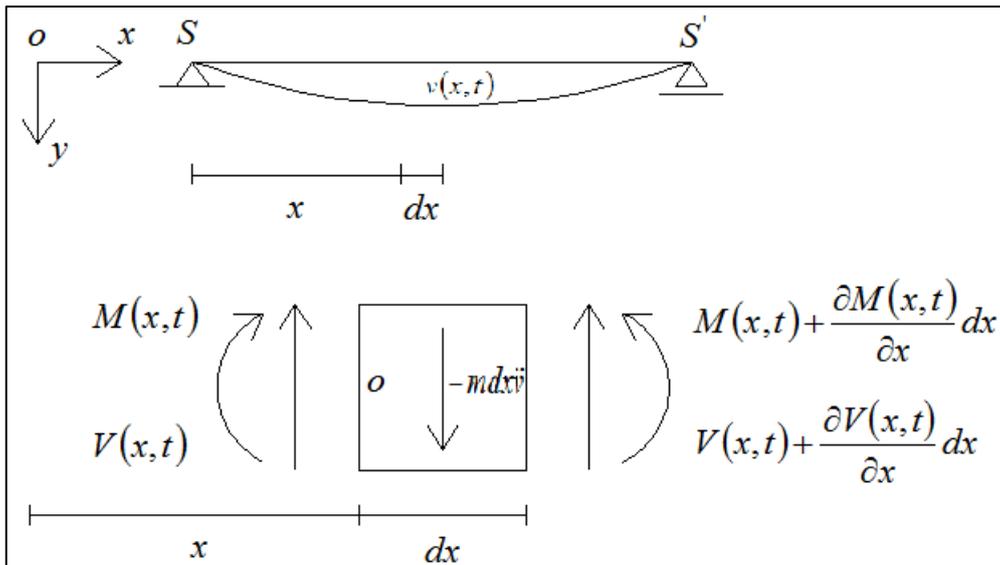


Figura 1.1 –Linha elástica de uma viga durante vibração

Considerando-se a Figura 1.1, aplica-se uma a 2ª lei de Newton ao somatório das forças na direção y como indicado em (1.1).

$$-V(x, t) + V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx = mdx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

O somatório dos momentos em relação ao ponto “o” é dado por (1.2).

$$M(x, t) - \left(M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right) - \left(V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad (1.2)$$

Em que M é o momento fletor e V a força cortante.

Desconsiderando o produto de dois diferenciais na equação (1.2) e considerando a relação aproximada entre momento fletor e curvatura de acordo com a teoria linear, chega-se, respectivamente nas relações (1.3) e (1.4).

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

Combinando-se (1.3) e (1.4), chega-se na equação do movimento (1.5), particularizada para pequenas curvaturas (linearidade geométrica).

$$EIv^{iv}(x, t) + m\ddot{v}(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

Levando-se em consideração os modos de vibrar, a solução de (1.5) pode ser admitida como um produto de uma função da posição no espaço com uma função de tempo, resultando na relação (1.6).

$$EIv^{iv}(x)T + mX(x)\ddot{T}(t) = 0 \quad (1.6)$$

Integrando-se os termos por separação de variáveis, obtém-se a equação (1.7), em que ω é a frequência natural angular.

$$X^{iv}(x) + \frac{m\omega^2}{EI}X(x) = 0 \quad (1.7)$$

Definindo o quociente β em (1.8), a resolução da equação diferencial (1.7) é explicitada na expressão (1.9).

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \quad (1.8)$$

$$X = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (1.9)$$

De posse dos valores das frequências naturais obtém-se os valores das constantes de integração e, por fim, dos modos de vibrar.

1.2 Teoria de Placas

Uma placa é um corpo sólido, limitado por duas superfícies planas paralelas, cujas dimensões laterais (largura e comprimento para placa retangular ou diâmetro em uma placa circular) são muito maiores que a distância entre as duas superfícies paralelas (espessura da placa) e, normalmente, as cargas atuantes são perpendiculares à superfície média.

Membranas e chapas podem ser vistas como casos bidimensionais de cordas e barras, respectivamente. Uma superfície pode ser tratada como uma membrana se ela apresentar rigidez desprezível às deformações. No seu movimento, a membrana tensa retorna a posição de equilíbrio somente com a força da tensão superficial a qual ela é submetida. No caso de uma chapa submetida a alguma deformação, torna-se relevante os valores de rigidez exercidos pelo material a esforços transversais, longitudinais e de torção.

A vibração livre não amortecida de placas retangulares consiste basicamente em um problema de valor de contorno da física matemática. Desde que a solução para a vibração livre de placas resulte em uma equação diferencial homogênea os métodos conhecidos para solução da equação bi harmônica podem ser utilizados. Os efeitos da inércia rotacional são aqui desprezados.

Para o caso de vibração livre, com força externa igual a zero, tem-se que a equação diferencial (1.10), de movimento não amortecido.

$$D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w} = 0 \quad (1.10)$$

Uma solução para Equação (1.10) é indicada em (1.11).

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)\theta(t) \quad (1.11)$$

Em que $X(x)$ e $Y(y)$ representam os modos de vibração, enquanto que os deslocamentos em função do tempo $\theta(t)$ são considerados como harmônicos, como indicado em (1.12).

$$\theta(t) = \sin(\omega t) \tag{1.12}$$

$$\theta(t) = \cos(\omega t)$$

A solução deve satisfazer as condições de contorno da placa e as condições iniciais do movimento em $t = 0$. Essas condições são $(w)_{t=0}$ e $(\dot{w})_{t=0}$. Temos, então, a equação de movimento para vibração livre, combinando as relações em (1.11) e (1.12) para se obter a equação (1.13).

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{1.13}$$

O primeiro modo de vibração corresponde a uma única onda senoidal nas direções x e y , respectivamente.

1.3 Frequências Naturais

Se, após uma perturbação inicial, um sistema continuar a vibrar por si próprio sem a ação de forças externas, a frequência com que ele oscila é conhecida como frequência natural. Um sistema vibratório com n graus de liberdade, terá, em geral, n frequências naturais de vibração distintas.

A solução de um sistema com n graus de liberdade é obtida de forma análoga ao sistema de um grau de liberdade. A equação geral do movimento é descrita por (1.14) para a massa m_i .

$$m_i \ddot{x} = \sum F_{i,j} \tag{1.14}$$

onde $F_{i,j}$ é a soma de todas as forças que agem no sistema e i é o número de graus de liberdade.

Aplicando-se a equação geral do movimento a cada massa do sistema, chega-se em (1.15) e em (1.16) na forma matricial.

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i \quad (1.15)$$

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = \vec{F} \quad (1.16)$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e \ddot{x} , \dot{x} e \vec{F} são os vetores de deslocamento, aceleração e força. Para vibração livre, \vec{F} e c são iguais a zero. Podemos encontrar a solução de (1.16) considerando o problema de autovalor como indicado em (1.17).

$$[[k] - \omega^2[m]]\vec{X} = 0 \quad (1.17)$$

Igualando o determinante característico a zero, pode-se determinar as frequências naturais (autovalores) e os modos naturais (autovetores). Embora esse método seja exato, a expansão do determinante característico e a solução da equação polinomial de n -ésimo grau resultante para se obter as frequências naturais pode tornar-se muito tediosas para valores grandes de n . Dessa forma, outro método amplamente usado para estimar as frequências naturais em sistemas com um grau de liberdade é o método de Rayleigh.

Frequências naturais de vibrações em estruturas são normalmente avaliadas através da aplicação de técnicas de identificação modal aos sinais analógicos ou digitais obtidos de dispositivos como acelerômetros, extensômetros elétricos, defectômetros.

1.4 Análise modal

1.4.1 Teórica

Um sistema simples massa-mola como indicado na Figura 1.2 tem uma equação de movimento que pode ser descrita por (1.18). Considerando-se um deslocamento $x = \sin(\omega t)$, pode-se escrever (1.18) como indicado em (1.19).

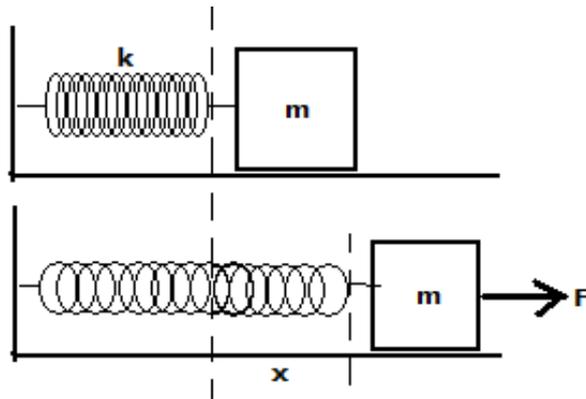


Figura 1.2 – Sistema massa-mola (1 grau de liberdade) com força aplicada em função do tempo.

$$\ddot{m}x + kx = F(t) \quad (1.18)$$

$$-m\omega^2x + kx = 0 \quad (1.19)$$

A solução de (1.19) corresponde a vibração livre não-amortecida do sistema. Com isso, as frequências de ressonância e os modos de vibrar podem ser obtidos por meio da solução dos problemas de autovetores e autovalores (equação(1.20)).

$$[A - \lambda I]\{x\} = 0 \quad (1.20)$$

Assim, percebe-se que a análise modal pode ser vista como um problema de autovetores e autovalores sendo a matriz A substituídas pelas matrizes de massa e rigidez, $[M]$ e $[K]$, resultando na relação (1.21).

$$[K - \omega^2 M]\{x\} = 0 \quad (1.21)$$

A solução não trivial de (1.21) fornece os autovalores ω^2 (quadrado das frequências de ressonância) e os vetores associados a ω^2 (os modos de vibrar). A equação exata para se obter os modos de vibrar e as frequências naturais de várias estruturas simples a partir da equação de equilíbrio dinâmico sem amortecimento e sem forças externas é indicado em (1.22), como proposto por Blevins (2001)¹.

¹ BLEVINS, R. “Formulas for Natural Frequency and Mode Shape”. Krieger Publish. Comp., 2001, 506p.

$$f_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}^2}{2\pi a^2} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.22)$$

$$i = 1,2,3, \dots, n$$

$$j = 1,2,3, \dots, n$$

Sendo as dimensões e propriedades da placa indicadas abaixo:

- a : comprimento
- b : largura
- h : espessura
- i : número de meia-ondas do modo de vibrar ao longo do eixo horizontal,
- j : número de meia-ondas do modo de vibrar ao longo do eixo vertical,
- E : módulo de elasticidade;
- γ : massa por unidade de área (γh para uma placa de material de densidade μ)
- ν : coeficiente de Poisson

O método aproximado de Blevin apresenta o cálculo simplificado, como indicado em (1.23).

$$f_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{G_1^4}{a^4} + \frac{G_2^4}{b^4} + 2J_1J_2 + 2\nu \left(\frac{H_1 + H_2 - J_1J_2}{a^2b^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

Dessa forma, os modos de vibrar da placa podem ser obtidos aproximadamente considerando uma analogia com modo de vibrar de vigas com indicado em (1.24) em que $\check{Z}_{i,j}$ descreve a posição de um ponto (x, y) na placa para o modo de vibrar i e j . Os parâmetros a e b são as dimensões da placa, i e j são os números de meia-ondas do modo de vibrar ao longo dos eixos x e y , respectivamente.

$$\check{Z}_{i,j}(x, y) = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (1.24)$$

1.4.2 Experimental

A análise modal experimental trata da determinação de frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais por meio de testes de vibração. Para tal análise deve-se levar em consideração que quando uma estrutura, máquina ou qualquer sistema são excitados, sua resposta exibe um pico acentuado na ressonância, quando a frequência da forçante for igual a frequência natural e o amortecimento não for grande. Outro aspecto a ser avaliado é que a fase da resposta muda para 180° quando a frequência forçante passa para a frequência natural da estrutura ou máquina, e a fase é de 90° na ressonância.

A medição da vibração experimental requer os seguintes equipamentos:

- um excitador ou fonte de vibração para aplicar uma força conhecida à estrutura;
- um transdutor para converter o movimento físico da estrutura ou máquina em um sinal elétrico;
- um amplificador de condicionamento de sinal para tornar as características do transdutor compatíveis com a eletrônica da entrada de sinais do sistema digital da aquisição de dados;
- um analisador para executar as tarefas de processamento de sinal e análise modal com a utilização de um *software* adequado.

Excitador: o excitador pode ser eletromagnético ou um martelo de impacto. O excitador eletromagnético pode fornecer grandes forças de entrada, de modo que a resposta pode ser facilmente medida. A saída do excitador pode ser facilmente controlada se ele for do tipo eletromagnético. O sinal de excitação normalmente é do tipo senoidal de varredura ou aleatório. No tipo senoidal de varredura, uma força harmônica de magnitude F é aplicada a várias frequências discretas em uma faixa de frequência específica de interesse.

Transdutor: Os transdutores mais populares são os piezelétricos, que podem ser projetados para produzir sinais proporcionais à velocidade ou a aceleração. Em um acelerômetro, o material piezelétrico age como uma mola rígida que provoca uma frequência de ressonância ou natural no transdutor. Normalmente, a máxima frequência mensurável de um acelerômetro é uma fração de uma frequência natural. Extensômetros também podem ser usados para medir a resposta de vibração de uma estrutura ou máquina.

Condicionador de sinal: Como a impedância de saída em transdutores não é apropriada para entrada direta no equipamento de análise de sinal, são usados condicionadores de sinal na forma de amplificadores de carga ou tensão para comparar e amplificar os sinais antes da análise.

Analizador: Após o condicionamento, o sinal de resposta é enviado a um analisador para processamento. Um analisador comum é o de transformada rápida de Fourier (FFT).

1.4.3 Numérica

Dentre as ferramentas numéricas disponíveis para se analisar as frequências e modos de vibrar de um sistema, destaca-se o método de elementos finitos (MEF). Quando se modela uma estrutura utilizando o método de elementos finitos, busca-se representar um meio contínuo dividindo a estrutura em elementos menores, finitos. Os elementos, por sua vez, podem ser 1D, 2D, 3D dependendo do que se deseja observar na resposta da estrutura investigada.

No MEF o domínio da integração é subdividido em uma série de regiões, ou elementos finitos interconectados entre si através de um número discreto de pontos nodais. Para cada região se estabelece um comportamento local aproximado, de tal forma que as incógnitas do problema em qualquer ponto do elemento podem ser definidas em função das mesmas incógnitas nos pontos nodais do elemento.

1.5 Experimento com uma placa quadrada e com uma viga

O objetivo do experimento é proceder à análise modal de uma placa quadrada e de uma viga de modo teórico, numérico e experimental.

Primeiramente, foi feito o experimento com a placa quadrada partindo-se de uma avaliação preliminar do modo de vibrar com as cinco primeiras frequências de ressonância. Posteriormente, variou-se o ganho e a frequência do sistema a fim de se obter os modos de vibrar experimentais da placa.

A segunda parte dessa prática avaliou os modos de vibrar de uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra. Foi feita também análise da viga com um acelerômetro na extremidade livre. Assim como na placa, foi feito o cálculo teórico dos modos de vibrar da viga e de suas cinco primeiras frequências de ressonância.

2 Descrição do experimento

O objetivo dessa prática é realizar a análise modal de duas estruturas, uma placa e uma viga, por meio cálculo teórico, numérico e método experimental. Primeiramente são feitas as estimativas dos modos e frequências de vibrar das estruturas e, posteriormente, por método experimental, tem-se uma previsão do comportamento das estruturas para as cinco primeiras frequências e modos de vibrar.

Para a montagem do experimento foram usados um *shaker* como excitador, um acelerômetro como transdutor, um amplificador como condicionador de sinal um osciloscópio e um gerador de funções. O *shaker* tem a função de excitar a estrutura analisada, o amplificador compara e amplifica o sinal e o osciloscópio processa o sinal apresentado as frequências de vibração.

2.1 Régua

Uma régua, com uma das extremidades livres e a outra fixa, foi ensaiada com a extremidade fixa sujeita a excitação do *shaker*. Para o acionamento do *shaker* foi utilizado um gerador de sinais que varia a frequência de excitação do *shaker* de um modo senoidal ao longo do tempo. A frequência e a amplitude da excitação são ajustadas por meio do gerador de sinais. Varia-se a potência de excitação por meio de um amplificador entre o gerador e o *shaker*.

A régua utilizada no ensaio é feita de aço inox e possui as dimensões indicadas na Tabela 2.1. Os equipamentos utilizados no ensaio estão indicados na Tabela 2.2.

Tabela 2.1 – Dimensões da régua

<i>Altura (mm)</i>	<i>Largura (mm)</i>	<i>Espessura (mm)</i>
600	25	1

Tabela 2.2 – Equipamentos utilizados no ensaio experimental da régua

<i>Equipamento</i>	<i>Marca</i>	<i>Modelo</i>
<i>Gerador de função</i>	Tektronix	AFG3021B
<i>Amplificador</i>	Cygnus	PP800
<i>Shaker</i>	Veb Robotron - Messelektronik	Type 11077

A Figura 2.1 apresenta a montagem do experimento indicando as conexões entre amplificador, osciloscópio, *shaker*, gerador de funções e régua.



Figura 2.1 – Montagem do experimento de análise modal da barra

2.2 Régua com massa concentrada na extremidade

Um acelerômetro é acoplado à extremidade livre da régua apresentada na Figura 2.1 e a extremidade fixa é sujeita à excitação do *shaker*. Para seu acionamento, utilizou-se um gerador de sinais que varia sua frequência de excitação de forma senoidal ao longo do tempo. A frequência e a amplitude da excitação são ajustadas por meio do gerador de sinais. Varia-se a potência de excitação por meio de um amplificador entre o gerador e o *shaker*. Conecta-se um osciloscópio ao acelerômetro para obter-se o sinal de saída.

A régua utilizada no ensaio é feita de aço inox e possui as dimensões já indicadas na Tabela 2.1. Os equipamentos utilizados no ensaio são aqueles indicados na Tabela 2.2 e na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Equipamentos utilizados no ensaio experimental da régua com uma massa na extremidade

<i>Equipamento</i>	<i>Marca</i>	<i>Modelo</i>
<i>Acelerômetro</i>	Metrolog	7505 A
<i>Osciloscópio</i>	Tektronix	MSO3014

2.3 Placa

Uma placa quadrada plana com as extremidades livres foi ensaiada e, em seu centro, uma força F é aplicada através de um *shaker*. Para o acionamento do *shaker* foi utilizado um gerador de sinais que varia a frequência de excitação ao longo do tempo. Com o gerador de sinal, pode-se ajustar a frequência e a amplitude da excitação e, com a utilização de um amplificador entre o gerador e o *shaker*, pode-se aumentar a potência da excitação.

A placa quadrada utilizada no ensaio é feita de alumínio e possui arestas de 35,1 *cm* e espessura de 1,58 *mm*. Os equipamentos utilizados são apresentados na Figura 2.2 e Tabela 2.2.



Figura 2.2 –Foto dos equipamentos utilizados para ensaio experimental da placa.

A abordagem para identificação das frequências naturais em todos os três experimentos é bastante experimental, pois depende de sensibilidade visual e auditiva para identificação dos harmônicos. Além disso, existem algumas perdas relacionadas ao processo. Por exemplo, assumiu-se que não existe defasagem entre o gerador de sinal e o amplificador.

Um composto particulado (purpurina) foi colocado sobre a superfície superior da placa de forma que, ao excitar a placa em variadas frequências, ele se acumule nos nós dos modos vibrantes e auxilie na identificação dos mesmos.

Essa experiência tem três etapas fundamentais; cálculo teórico das frequências naturais, análise modal através de experiência (utilizando o *shaker*, o gerador de sinal, o amplificador e um composto particulado de teste) e, por fim, simulação numérica utilizando programa de elementos finitos.

3 Frequências naturais – Viga

Vigas são estruturas amplamente utilizadas na engenharia, sendo um elemento estrutural unidimensional muito importante em vários sistemas estruturais. Uma grande quantidade de estruturas pode ser formada a partir de elementos tipo viga como, por exemplo, as treliças.

Uma viga pode ser definida como um elemento estrutural que possui o comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal, e estão principalmente submetidas a cargas laterais, resultando na flexão de sua dimensão maior. Uma viga também pode ser considerada como uma barra prismática, reta e longa, que deve suportar tração, compressão, flexão, cisalhamento transversal e torção. As vigas podem ser classificadas de acordo com a forma como são ligados aos seus apoios, assim tem viga simplesmente apoiada, em balanço ou viga bi engastada. Cada um desses tipos oferece diferentes valores de contorno quando da resolução de problemas onde esforços dinâmicos estão atuando sobre as vigas.

Existem dois modelos básicos para o estudo de vibrações em vigas, os modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. No modelo de Euler-Bernoulli o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, assim a rotação relativa da seção se aproxima mediante a derivada do deslocamento vertical; é também feita a suposição de que as seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da peça, após a deformação. No modelo de Timoshenko, não se desprezam as deformações devidas ao cortante; supõe-se também que as seções planas permaneçam planas, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois tem um giro da seção em relação a este eixo, devido ao cisalhamento. No entanto, é importante esclarecer que quando as dimensões da seção transversal da peça são pequenas quando comparadas com o seu comprimento (vigas longas e esbeltas), o modelo normalmente empregado é o de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko é mais adequado quando as dimensões da seção transversal não são desprezíveis quando comparadas com o comprimento da viga (vigas curtas).

A análise modal é a análise dos fenômenos vibratórios por meio de técnicas teóricas, experimentais e numéricas. Estas possibilitam a construção de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema em estudo através das suas

características naturais, que são as frequências naturais, as respectivas formas modais e os fatores de amortecimento modal.

As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, após cessada a força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto a estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela.

Os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma de suas frequências naturais. Ou seja: para cada frequência natural existe um modo de vibração específico, ou um perfil de vibração.

Neste capítulo serão analisadas as características modais, frequências naturais e modos de vibrar numa régua engastada numa extremidade, não amortecidos, usando o modelo de Euler-Bernoulli.

3.1 Frequências de vibração teóricas

Nesta seção, foram calculadas as frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração da régua usando o modelo de uma viga em balanço.

Para a régua de aço, foi considerado o módulo de Young $E = 210 \text{ GPa}$ e a densidade $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$. Suas dimensões já foram apresentadas na Tabela 2.1.

A massa linear é dada por $m = \rho \cdot e \cdot l$, e o momento de inércia, por $I = (la \cdot e^3)/12$, resultando em:

- Massa linear $m = 0,19734 \text{ kg/m}$
- Momento de inércia $I = 2,1083 \times 10^{-12} \text{ m}^4$

A equação do movimento da régua vibrante pode ser dada pela equação (3.1), de onda propagante, onde $c = \sqrt{(EI)/(\rho A)}$.

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

A resposta de vibração livre pode ser encontrada usando uma separação de variáveis, como ilustra a equação (3.2).

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (3.2)$$

sendo $W(x)$ o de vibração natural e $T(t)$ uma função dependente do tempo. Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1), tem-se:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a = \omega^2 \quad (3.3)$$

onde $a = \omega^2$ é uma constante positiva. Logo:

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.5)$$

onde $\beta^4 = \omega^2/c^2 = (\rho A \omega^2)/(EI)$

A solução da Eq. (3.5) é dada por:

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.6)$$

sendo A e B constantes dependentes das condições iniciais. Assume-se que a solução da (3.4) é uma função exponencial da seguinte forma:

$$W(x) = C e^{\alpha x} \quad (3.7)$$

onde C e α são constantes. Substituindo a Eq. (3.7) na Eq. (3.4), obtém-se a equação auxiliar:

$$\alpha^4 - \beta^4 = 0 \quad (3.8)$$

As raízes desta equação são dadas por:

$$\alpha = \pm\beta$$

$$\alpha = \pm i\beta$$
(3.9)

Assim, a solução da Eq. (3.4) pode ser expressa como:

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$
(3.10)

A Equação (3.10) pode ser expressa mais convenientemente por:

$$W(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x)$$
(3.11)

onde C_1 , C_2 , C_3 , e C_4 são constantes diferentes em cada caso. As frequências naturais da régua podem ser determinadas a partir da relação $\beta^4 = \omega^2/c^2 = (\rho A \omega^2)/(EI)$, obtendo então:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$
(3.12)

A régua é engastada em $x = 0$ e livre em $x = l$. Assim, as condições de contorno ficam dadas por:

$$W(0) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dx} = 0$$
(3.13)

$$EI \frac{d^2 W(l)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 W(l)}{dx^3} = 0$$
(3.14)

Usando a Eq. (3.13) e a Eq. (3.14) na Eq. (3.11), chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta l) & -\cos(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \\ -\cos(\beta l) & \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Isso implica que:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta l) & -\cos(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \\ -\cos(\beta l) & \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

O cálculo do determinante resulta em:

$$\cos(\beta l) \cosh(\beta l) = -1 \quad (3.17)$$

Resolvendo numericamente a Eq. (3.17), as quatro primeiras soluções são dadas em (3.18), sendo que, no geral, a solução pode ser aproximada pela Eq. (3.19).

$$\begin{aligned} \beta_1 l &= 1,8751 \\ \beta_2 l &= 4,6941 \\ \beta_3 l &= 7,8547 \\ \beta_4 l &= 10,9956 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\beta_n l \cong (2n - 1)\pi/2 \quad (3.19)$$

Substituindo os valores expressão (3.18) na Eq. (3.12) e usando a Eq. (3.19), obtém-se as frequências naturais teóricas dos seis primeiros modos de vibração, apresentados na

Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Seis primeiras frequências naturais teóricas para a régua sem massa na extremidade

<i>Modo</i>	<i>Freq. teórica [Hz]</i>
1	2,3283
2	14,5912
3	40,8550
4	80,0615
5	132,3460
6	197,7020

3.2 Frequências de vibração experimentais

A abordagem para identificação das frequências de vibração experimental, tanto para o acelerômetro sem massa quanto com massa na extremidade, se mostra intuitiva, uma vez que depende sensibilidade visual e auditiva para identificação dos harmônicos. Dessa forma, ajustando-se a frequência e a amplitude da excitação no gerador de sinal e, com a utilização de um amplificador entre o gerador e o *shaker*, aumentou-se a potência de excitação até se obter os cinco primeiros modos de vibrar da régua com e sem massa.

A Tabela 3.2 apresenta os valores experimentais obtidos das 6 primeiras frequências naturais.

Tabela 3.2 – Seis primeiras frequências naturais experimentais para a régua sem massa na extremidade

<i>Modo</i>	<i>Freq. experimental [Hz]</i>
1	2,2
2	14,3
3	40,0
4	78,4
5	131,8
6	195,3

3.3 Frequências de vibração numéricas

Nesta seção, o objetivo é obter as configurações dos modos naturais e as respectivas frequências da régua na posição vertical, engastado na extremidade de baixo, utilizando o Método dos Elementos Finitos. A Figura 3.1 representa o modelo de uma viga uniforme

de comprimento $L = 0,60 \text{ m}$, dividido em 15 elementos, utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

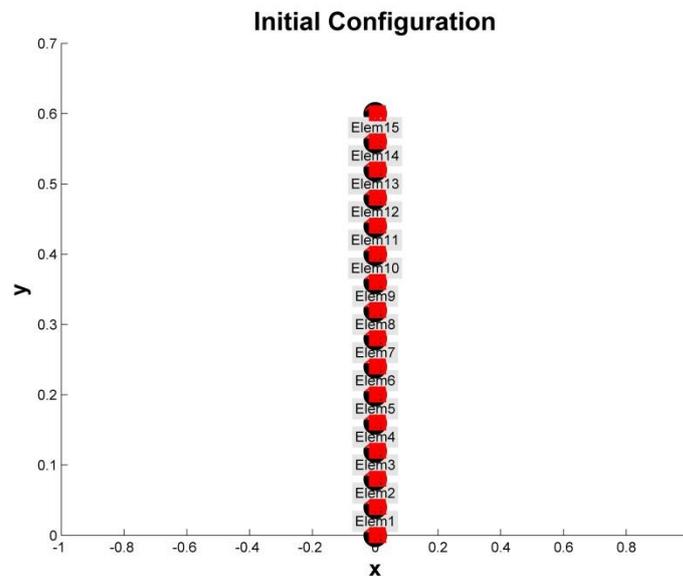


Figura 3.1 – Modelo da régua discretizado em 15 elementos

Para calcular as frequências e os modos de vibração, considera-se que a estrutura se encontra em regime livre não amortecido, com a extremidade do primeiro elemento engastada, simulando as condições do experimento.

O modelo com 15 elementos é, então, definido por uma matriz de rigidez K e uma matriz de massa M . Utilizando a teoria de análise modal já descrita no Capítulo 1, calcula-se os autovetores e autovalores do sistema, para obtenção das frequências naturais e respectivos modos de vibrar.

A Tabela 3.3 mostra os resultados obtidos numericamente, enquanto as figuras na página seguinte ilustram os modos de vibração.

Tabela 3.3 – Valores numéricos das 6 primeiras frequências naturais numéricas para a régua sem massa na extremidade

<i>Modo</i>	<i>Freq. teórica [Hz]</i>
1	2,3283
2	14,5913
3	40,8580
4	80,0769
5	132,417
6	197,932

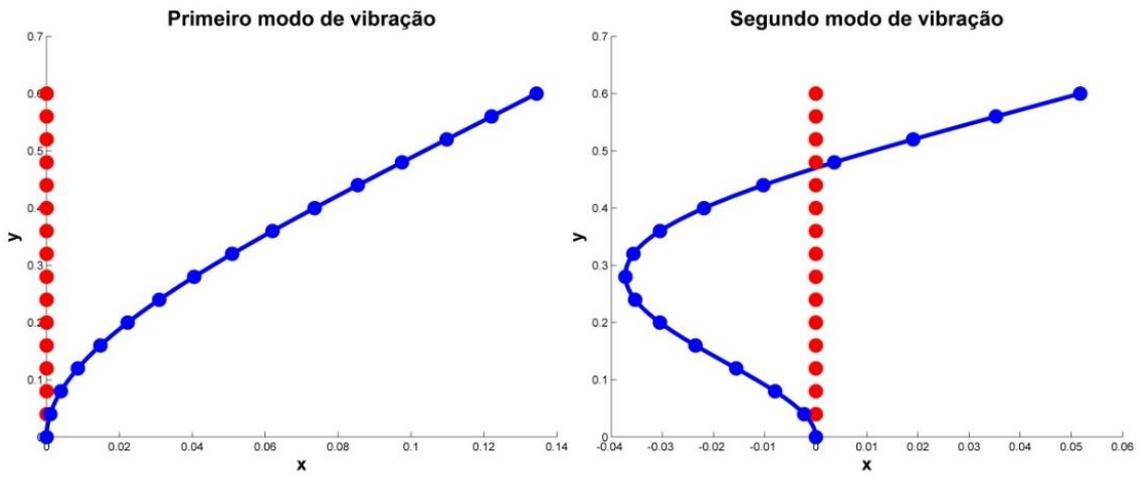


Figura 3.2 –Primeiro e Segundo modos de vibrações.

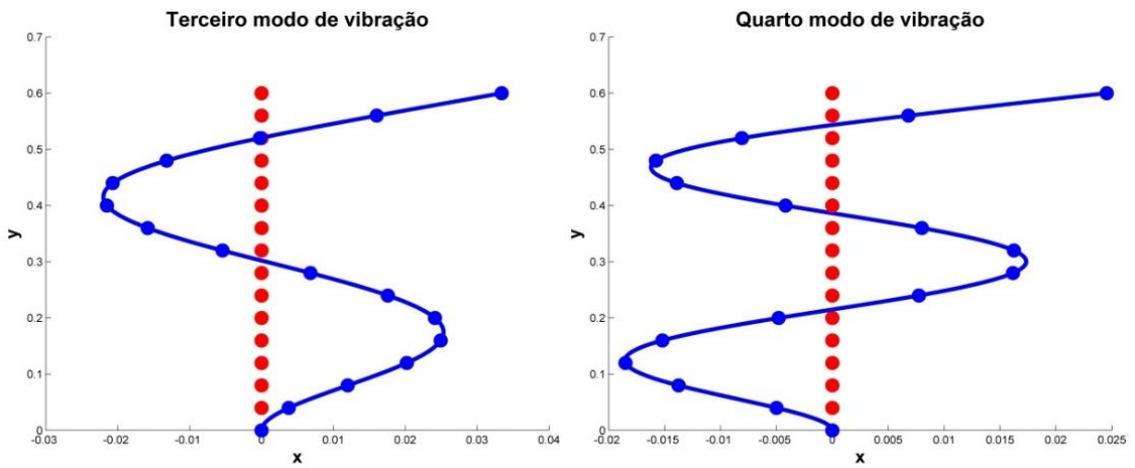


Figura 3.3 –Terço e Quarto modos de vibrações.

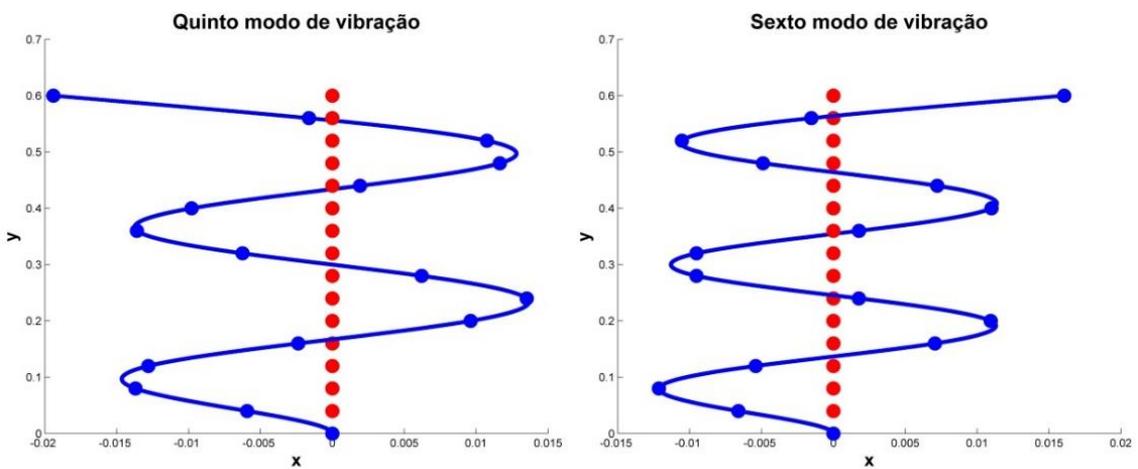


Figura 3.4 – Quinto e Sexto modos de vibrações.

3.4 Comparação

A Tabela 3.4 apresenta o resultado comparativo entre os modos de vibrar teórico, experimental e numérico.

Tabela 3.4 – Comparação entre os modos de vibrar teórico, experimental e numérico

<i>Modos</i>	<i>Freq. teoria</i> [Hz]	<i>Freq. experimental</i> [Hz]	<i>Freq. numérica</i> [Hz]
1	2,30	2,20	2,32
2	14,60	14,30	14,59
3	40,850	40,00	40,86
4	80,060	78,40	80,08
5	132,340	131,80	132,41
6	197,72	195,30	197,93

Pelos resultados apresentados na Tabela 3.4 pode-se perceber que os resultados teóricos, numéricos e experimentais estão bastante próximos. Os resultados obtidos teoricamente e numericamente, apresentam uma aproximação maior, registrando-se apenas diferenças pequenas, da ordem de 1%. Verificou-se que os resultados experimentais apresentam a diferenças sensivelmente maiores, na ordem de 2% em relação ao teórico, em função das condições do experimento, a calibração do acelerômetro e até erros dos instrumentos de medição.

Apesar da pequena diferença observada, os três métodos mostraram-se apropriados para se efetuar a análise modal da viga., com uma correlação ótima de resultados.

4 Frequências naturais – Viga com massa na extremidade

Esta seção apresenta a análise modal da mesma régua apresentada no Capítulo 3, com o acréscimo de uma massa concentrada em sua extremidade livre. São realizadas as análises teórica e experimental.

A massa concentrada na extremidade deve-se a instalação de um acelerômetro, para a medição da resposta do sistema em função da excitação do *shaker*, já descrita anteriormente. Assim, durante o experimento tem-se tanto o sinal de excitação de entrada do sistema quanto o sinal de resposta, obtido a partir da vibração do conjunto “régua – acelerômetro”. Uma imagem da montagem desse experimento, com detalhe para o acelerômetro instalado na extremidade livre da régua, pode ser observada na Figura 4.1.



Figura 4.1 – Montagem do experimento com régua e acelerômetro (em evidência) na extremidade livre

4.1 Frequências de vibração teóricas

Para posterior comparação com os resultados experimentais, primeiramente foram calculadas as frequências naturais de um sistema equivalente ideal, ou seja, uma viga em

balanço com uma massa concentrada em sua extremidade livre. A Figura 4.2 esquematiza essa configuração.

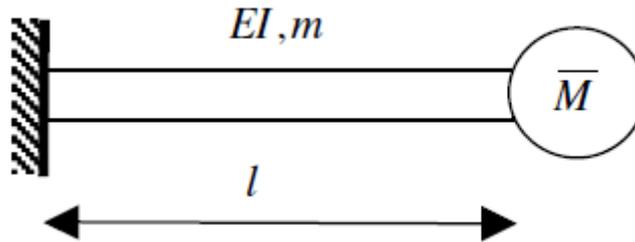


Figura 4.2 – Viga em balanço com uma massa concentrada em sua extremidade livre

Tem-se os mesmos parâmetros da régua que foram apresentados no capítulo anterior, com o termo adicional de massa do acelerômetro \bar{M} . Relembrando estes parâmetros do sistema:

- Massa linear $m = 0,197340 \text{ kg/m}$
- Momento de inércia $I = 2,1083 \times 10^{-12} \text{ m}^4$
- Módulo de Young $E = 210 \text{ GPa}$
- Comprimento $l = 0,6 \text{ m}$
- Massa do acelerômetro $\bar{M} = 0,0766 \text{ kg}$

Realizando os mesmos procedimentos teóricos apresentados anteriormente, relembrando a equação (3.11), tem-se:

$$W(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (4.1)$$

onde restam as constantes C_1 , C_2 , C_3 , e C_4 a determinar. Contudo, neste segundo caso, as condições de contorno se alteram. A régua continua engastada em $x = 0$, sendo que as condições apresentadas em (3.13) não se alteram:

$$W(0) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dx} = 0 \quad (4.2)$$

Já na extremidade livre $x = l$, a presença da massa do acelerômetro introduz uma força inercial, alterando tais condições de contorno. Assim, as novas condições de contorno para a extremidade livre são:

$$EI \frac{d^2 W(l)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 W(l)}{dx^3} = \bar{M} \ddot{w}(l, t) \quad (4.3)$$

Com essas novas condições de contorno, chega-se a um sistema bastante semelhante ao sistema apresentado em (3.15), com o acréscimo dos efeitos inerciais na última linha da matriz principal:

$$\lambda = \frac{\bar{M}}{m} \beta \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta l) & -\cos(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \\ \lambda \sin(\beta l) - \cos(\beta l) & \lambda \cos(\beta l) + \sin(\beta l) & \lambda \sinh(\beta l) + \cosh(\beta l) & \lambda \cosh(\beta l) + \sinh(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para a obtenção de uma solução trivial, da mesma forma que no capítulo anterior sem a presença da massa adicional do acelerômetro, impõem-se:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta l) & -\cos(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \\ \lambda \sin(\beta l) - \cos(\beta l) & \lambda \cos(\beta l) + \sin(\beta l) & \lambda \sinh(\beta l) + \cosh(\beta l) & \lambda \cosh(\beta l) + \sinh(\beta l) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

As frequências naturais teóricas do sistema decorrem, então, das raízes do polinômio resultante do cálculo do determinante. Tratando numericamente a equação (4.5), os cinco primeiros valores de β que satisfazem a igualdade são:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2,2618 \\ \beta_2 &= 6,7954 \\ \beta_3 &= 11,9431 \\ \beta_4 &= 17,1333 \\ \beta_5 &= 22,3437 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Assim, retomando a equação (3.12), pode-se calcular as cinco primeiras frequências naturais teóricas, resultando na Tabela 4.1.

$$\omega_i = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad [Hz] \quad (4.7)$$

Tabela 4.1 – Cinco primeiras frequências naturais teóricas do sistema com acelerômetro acoplado

<i>Modo</i>	<i>Freq. teórica</i> <i>[Hz]</i>
1	1,2196
2	11,0085
3	34,0035
4	69,9800
5	119,0151

As frequências naturais calculadas para o sistema com massa da extremidade são ligeiramente menores, se comparadas com as frequências naturais do sistema original. Assim, fica provado que a presença do acelerômetro na extremidade da régua altera a dinâmica do sistema.

4.2 Frequências de vibração experimentais

Existem formas diversas de se determinar a frequência de ressonância de um sistema. Neste capítulo, foi escolhido utilizar um acelerômetro na ponta da régua, o que altera a dinâmica do sistema original, como já foi visto. Com os sinais de entrada (excitação do *shaker*) e saída (resposta do acelerômetro) do sistema, pode-se determinar a ressonância do sistema através de Figuras de Lissajous.

Figuras de Lissajous resultam da composição gráfica de dois movimentos ondulatórios, um na horizontal e outro na vertical, como ilustra a Figura 4.3. Assim, com os sinais de entrada e saída do sistema analisados no osciloscópio, é possível visualizar as Figuras de Lissajous do sistema à medida que a frequência de excitação aumenta. Identificando as elipses alinhadas com os eixos cartesianos, identifica-se a defasagem de 90 graus entre entrada e saída o sistema e, portanto, identifica-se a ressonância e sua frequência correspondente.

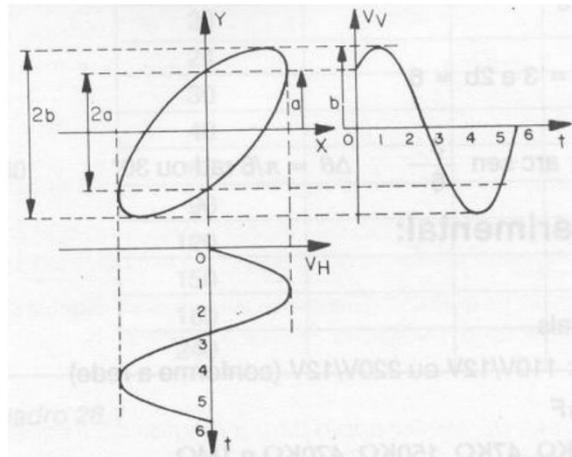


Figura 4.3 – Figura de Lissajous: elipse resultante da composição de 2 sinais

A Figura 4.4 apresenta as quatro primeiras Figuras de Lissajous obtidas para o experimento da viga com massa na extremidade.

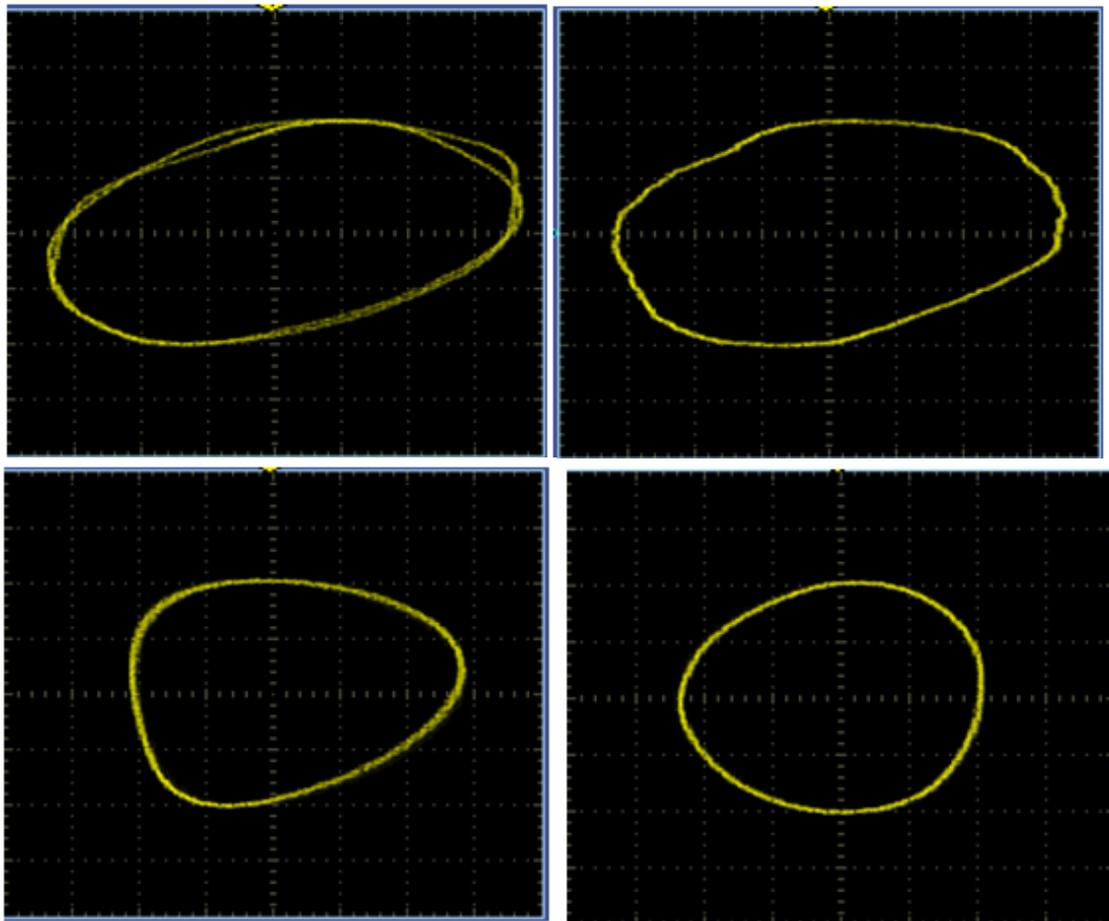


Figura 4.4 –Curvas de Lissajous para os 4 modos de vibrar capturados, da régua com massa na extremidade

Para cada uma das quatro Figuras de Lissajous obtidas, foi anotada a frequência de excitação do sistema. Tais imagens referem-se aos modos de vibrar 2 a 5, sendo que não

foi possível captar primeiro modo, pois a frequência de vibração era muito baixa e não gerava uma imagem nítida no osciloscópio.

Assim, a Tabela 4.2 apresenta os valores de frequência registrados experimentalmente, para o sistema “régua – acelerômetro”.

Tabela 4.2 – Frequências naturais experimentais para a régua com massa na extremidade

<i>Modo</i>	<i>F experimental [Hz]</i>
1	-
2	10,6
3	32,5
4	68,6
5	106,6

4.3 Comparação

Ambas abordagens descritas nas seções 4.1 e 4.2 podem ter seus resultados comparados. Comparando os valores de frequência obtidos teoricamente, com aqueles advindos da observação das Figuras de Lissajous, tem-se a Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Comparação entre as frequências naturais teórica e experimental

<i>Modos</i>	<i>Freq. teoria [Hz]</i>	<i>Freq. experimental [Hz]</i>
1	1,22	-
2	11,01	10,6
3	34,00	32,5
4	69,98	68,6
5	119,02	106,6

Nota-se uma correlação muito boa entre resultados teóricos e resultados experimentais, com uma redução significativa de frequências, quando comparadas as frequências do sistema sem massa adicional (Tabela 3.4). Diferenças de menos de 5% foram observadas para a segunda, terceira e quarta frequências. A diferença um pouco maior obtida para a quinta frequência natural deve-se ao fato no acelerômetro se deslocar para frequências maiores. Como ele estava acoplado magneticamente à régua, a medida que a vibração aumentava era cada vez mais difícil de mantê-lo na extremidade livre do sistema.

5 Frequências naturais – Placa

De forma geral, pode-se dizer que a análise modal é um processo pelo qual descreve-se uma estrutura em termos de suas características naturais, que são as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas modais, ou seja, suas propriedades dinâmicas. Essas propriedades dinâmicas podem ser observadas através dessa experiência da vibração de uma placa simples.

A partir de medições visuais (e também sonoras) pode-se fazer uma análise da resposta da dinâmica estrutural quando excitada em um amplo espectro de frequências. Como resultado, obtêm-se as frequências naturais da estrutura e seus modos de vibrar (formas assumidas pela estrutura em cada uma das frequências naturais).

Esse capítulo está organizado em três partes:

- Uma análise teórica da placa, abordando-se a análise modal de forma puramente teórica, continuando o procedimento introduzido no primeiro capítulo deste relatório;
- Uma análise experimental a, seguindo o que fora comentado no item 2.3, utilizando uma placa metálica, *shaker*, gerador de sinal, amplificador e composto particulado de teste;
- Uma análise numérica, realizando a análise modal através de um *software* de elementos finitos.

O objetivo é comparar os resultados analíticos, experimentais e numéricos.

5.1 Frequências de vibração teóricas

Como já visto no Capítulo 1, as frequências naturais de uma placa podem ser estimadas através de expressões analíticas. Tais expressões foram apresentadas na Equação (1.22). Em seguida, para simplificação do cálculo, foi apresentada a equação (1.23), em função de coeficientes G_i , J_i e H_i . Relembrando essa expressão, tem-se:

$$f_{i,j} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{G_1^4}{a^4} + \frac{G_2^4}{b^4} + 2J_1J_2 + 2v \left(\frac{H_1 + H_2 - J_1J_2}{a^2b^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-v^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

Os coeficientes G_i , J_i e H_i , para o caso da placa com extremidades livres, podem ser obtidos a partir da Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Coeficientes G_i , J_i e H_i para placa livre-livre [Blevins, 2001]

<i>Modo</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>J</i>
1	0	0	0
2	0	0	1,216
3	1,506	1,248	5,017
$n (n > 3)$	$n - \frac{3}{2}$	$\left(n - \frac{3}{2} \right) \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(n - \frac{3}{2} \right) \cdot \pi} \right]$	$\left(n - \frac{3}{2} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{6}{\left(n - \frac{3}{2} \right) \cdot \pi} \right]$

Em seguida, considera-se as seguintes propriedades da placa de alumínio:

- a : comprimento da placa ($a = 351 \text{ mm}$);
- b : largura da placa ($b = 351 \text{ mm}$);
- h : espessura da placa ($h = 1,58 \text{ mm}$);
- i : número de meia-ondas do modo de vibrar ao longo do eixo horizontal;
- j : equivalente a i , porém no eixo vertical;
- E : módulo de elasticidade ($E = 70 \text{ GPa}$, para alumínio);
- γ : massa por unidade de área ($\gamma = 4,27 \text{ kg/m}^2$, para alumínio);
- v : coeficiente de Poisson;
- λ : coeficiente que depende do material, condições de contorno e do modo de vibrar.

A partir da expressão relembrada com a Equação (5.1), os valores teóricos das 30 primeiras frequências naturais da placa quadrada foram calculados e são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Valores obtidos das 30 primeiras frequências naturais

<i>Modo</i>	<i>Frequência (Hz)</i>	<i>Modo</i>	<i>Frequência (Hz)</i>	<i>Modo</i>	<i>Frequência (Hz)</i>
1	0	11	177,65	21	716,55
2	1,41	12	215,26	22	790,34
3	6,69	13	256,49	23	867,74
4	15,52	14	301,34	24	948,77
5	27,87	15	349,80	25	1033,41
6	43,81	16	401,88	26	1121,67
7	63,35	17	457,58	27	1213,55
8	86,51	18	516,90	28	1309,04
9	113,27	19	579,83	29	1408,15
10	143,65	20	646,38	30	1510,89

5.2 Frequências de vibração experimentais

As frequências e modos de vibração naturais da placa quadrada também foram obtidos de forma experimental. A placa foi fixada no seu ponto central em um “*shaker*” (ver item 2.3), no qual se pode alterar a frequência e amplitude de oscilação a partir de um gerador de função e um amplificador.

Os valores das frequências e modos de vibração naturais são apresentados na Figura 5.1, na página seguinte.

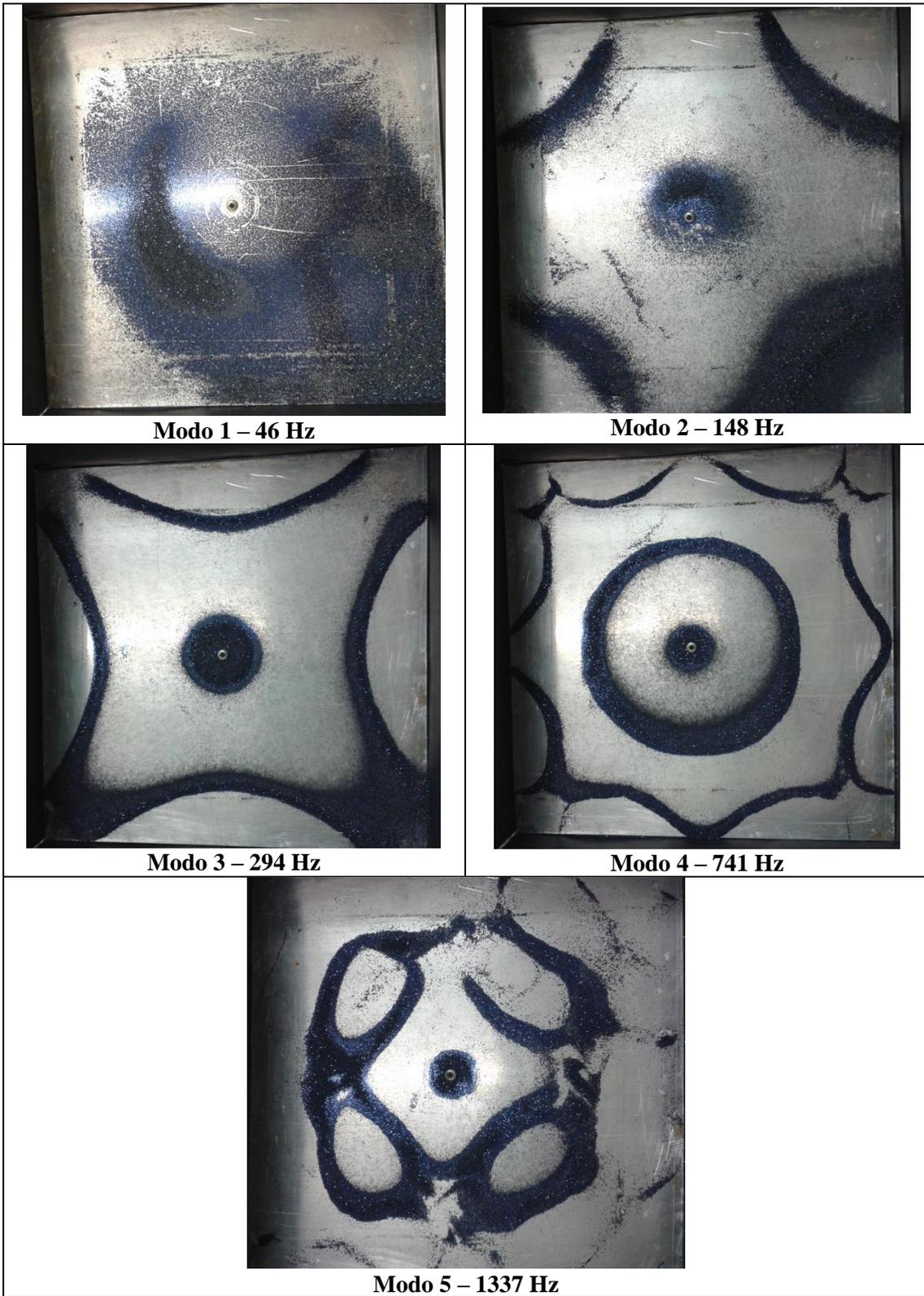


Figura 5.1 –Frequências e modos de vibração obtidos experimentalmente para a placa de alumínio

5.3 Frequências de vibração numéricas

Outra forma de se estimar os valores das frequências e modos de vibração da placa é através da utilização de métodos numéricos, como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Para a estimativa dos modos de vibração, o software LS-Dyna foi utilizado. Para a simulação via MEF, foi construída uma malha com 1600 elementos (40x40) do tipo “casca” (*shell*) com 5 pontos de integração. A carta de comandos pode ser visualizada em Anexo ao final do relatório.

A partir dos modos obtidos de forma experimental (Figura 5.1), foram observados os modos de vibração numéricos que apresentavam o mesmo comportamento. Dessa forma, os modos e frequências numéricos correspondentes aos experimentais são apresentados nas Figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 para cada um dos 5 primeiros modos de vibrar encontrados.

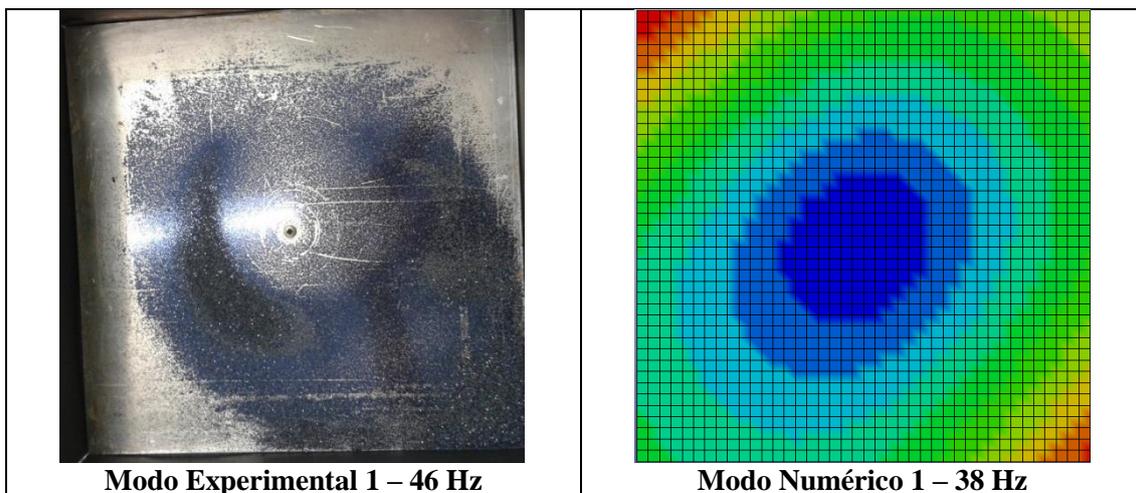


Figura 5.2 – Primeira frequência natural e primeiro modo de vibração (experimental e numérico)

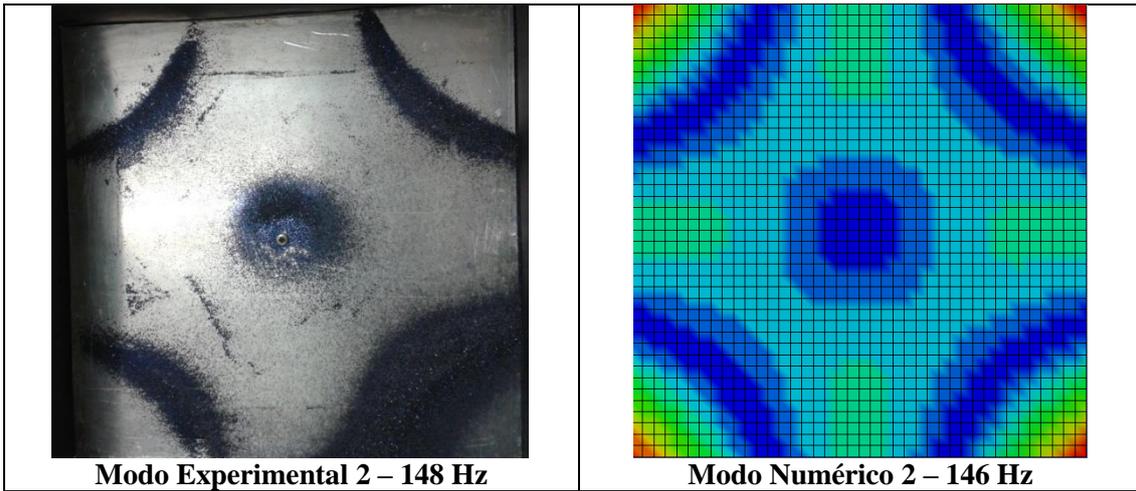


Figura 5.3 – Segunda frequência natural e segundo modo de vibração (experimental e numérico)

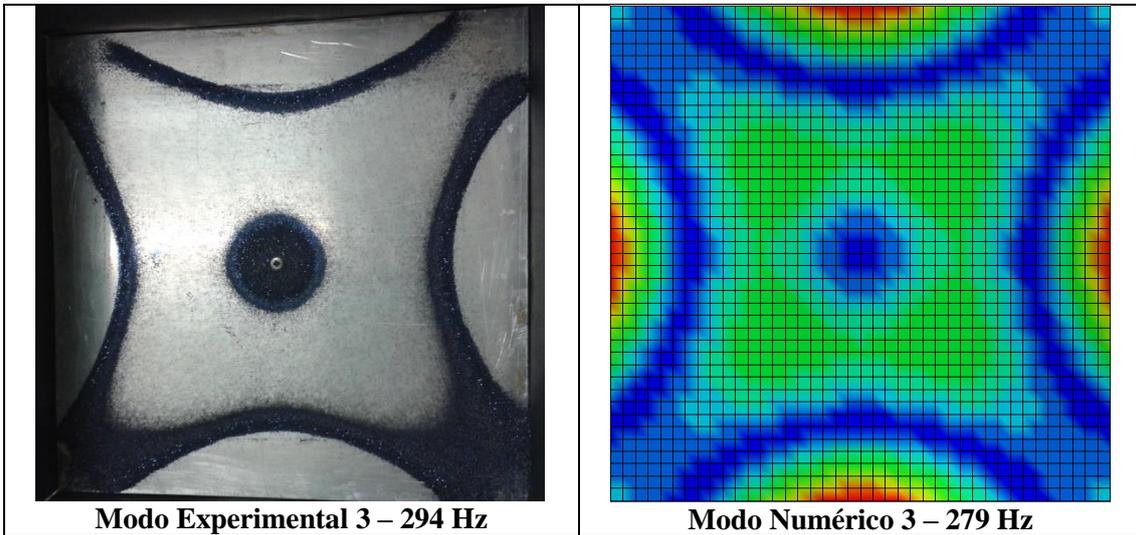


Figura 5.4 – Terceira frequência natural e terceiro modo de vibração (experimental e numérico)

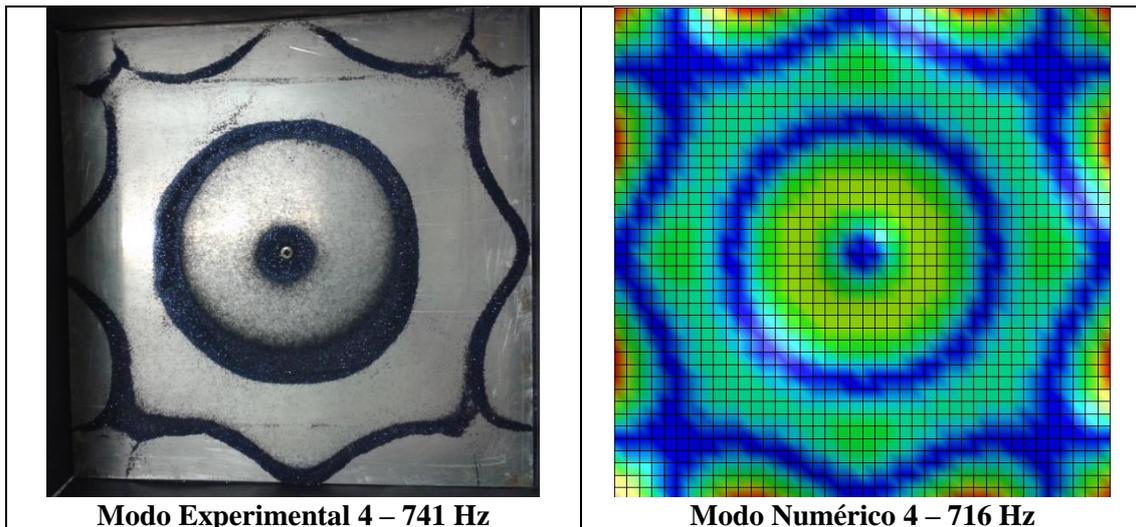


Figura 5.5 – Quarta frequência natural e quarto modo de vibração (experimental e numérico)

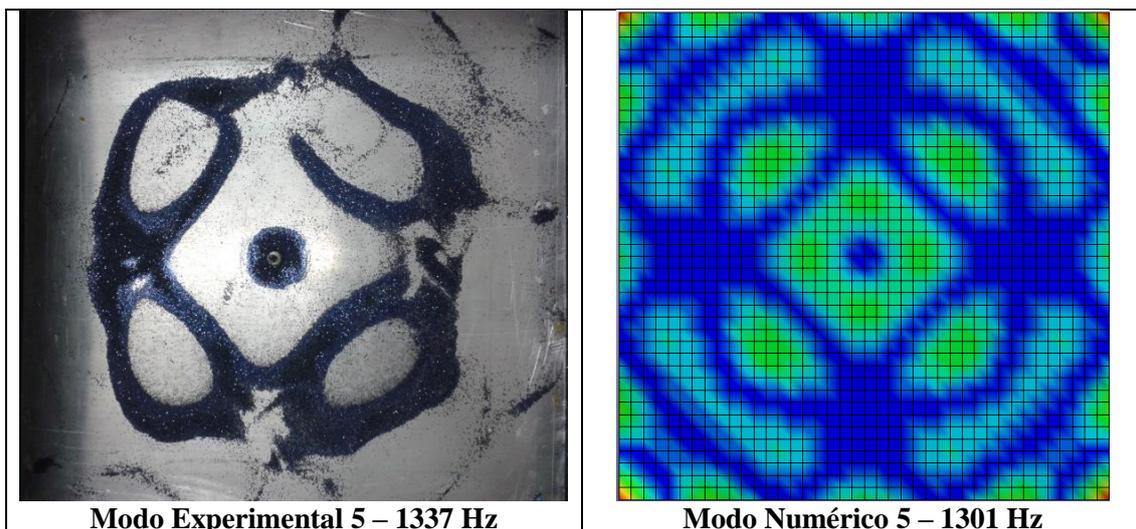


Figura 5.6 – Quinta frequência natural e quinto modo de vibração (experimental e numérico)

5.4 Comparação

Os valores de frequência obtidos a partir da Equação (5.1), do experimento (item 5.2) e com a simulação numérica (item 5.3) são apresentados na Tabela 5.3.

Como pode ser verificado nessa tabela, uma quantidade significativamente menor de modos são obtidos a partir do experimento. Isso se deve ao fato de ser difícil a identificação visual dos modos de vibração. Também se deve considerar que o *shaker* consegue apenas excitar os modos flexionais da estrutura. Outra questão é que a equação

analítica não leva em conta o amortecimento da estrutura, que pode prevenir o aparecimento de alguns dos modos de vibração durante o experimento.

Tabela 5.3 – Comparação dos valores de frequência obtidos
Frequências (Hz)

<i>Modo</i>	<i>Frequências (Hz)</i>		
	<i>Analítica</i>	<i>Experimental</i>	<i>Numérica</i>
1	0	-	-
2	1,41	-	-
3	6,69	-	-
4	15,5	-	-
5	27,9	-	-
6	43,8	46	38
7	63,4	-	-
8	86,5	-	-
9	113	-	-
10	144	148	146
11	178	-	-
12	215	-	-
13	256	-	-
14	301	294	279
15	350	-	-
16	402	-	-
17	458	-	-
18	517	-	-
19	580	-	-
20	646	-	-
21	717	741	716
22	790	-	-
23	868	-	-
24	949	-	-
25	1033	-	-
26	1122	-	-
27	1214	-	-
28	1309	1337	1301
29	1408	-	-
30	1511	-	-

Na Tabela 5.4 são apresentados os desvios encontrados entre os 3 métodos distintos. De modo geral, os desvios obtidos podem ser considerados relativamente baixo.

Tabela 5.4 – Desvios dos valores de frequência obtidos

<i>Modo</i>	<i>Analítica (Hz)</i>	<i>Experimental (Hz)</i>	<i>Desvio (%)</i>	<i>Numérica (Hz)</i>	<i>Desvio (%)</i>
6	43,8	46	4,8	38	-15,3
10	144	148	2,7	146	1,4
14	301	294	-2,4	279	-7,9
21	717	741	3,2	716	-0,1
28	1309	1337	2,1	1301	-0,6

6 Anexo - Carta de comandos utilizada na simulação no LS-Dyna

```

$# LS-DYNA Keyword file created by LS-PrePost 4.1 - 08Mar2014(14:00)
$# Created on Nov-03-2014 (10:35:15)
*KEYWORD
*CONTROL_IMPLICIT_EIGENVALUE
$#   neig      center      lflag      lftend      rflag      rhtend      eigmth      shfscl
      60      0.000      0-1.000E+29      01.0000E+29      2      0.000
$#   isolid     ibeam     ishell     itshell     mstres     evdump
      0      0      0      0      0      0
*CONTROL_IMPLICIT_GENERAL
$#   imflag      dt0      imform      nsbs      igs      cnstn      form      zero_v
      1      0.000      2      1      2      0      0      0
*BOUNDARY_SPC_NODE_BIRTH_DEATH
$#   nid      cid      dofz      dofz      dofz      dofz      dofz      dofz
      841      0      1      1      1      1      1      1
$#   birth      death
      0.000      0.000
*PART
$# title
Placa
$#   pid      secid      mid      eosid      hgid      grav      adpopt      tmid
      1      1      1      0      0      0      0      0
*SECTION_SHELL_TITLE
section placa
$#   secid     elform      shrf      nip      propt      qr/irid      icomp      setyp
      1      16      1.000000      5      1      0      0      1
$#   t1      t2      t3      t4      nloc      marea      idof      edgset
      1.580000      1.580000      1.580000      1.580000      0.000      0.000      0.000      0
*MAT_ELASTIC_TITLE
aluminio
$#   mid      ro      e      pr      da      db      not used
      1      2.7000E-9      70000.000      0.330000      0.000      0.000      0
*ELEMENT_SHELL
$#   eid      pid      n1      n2      n3      n4      n5      n6      n7      n8
$# Devido ao excessivo número de elementos, essa parte foi omitida.
*NODE
$#   nid      x      y      z      tc      rc
$# Devido ao excessivo número de nós, essa parte foi omitida.
*END

```