Método dos Elementos Finitos

Modelamento x análise

Problema real

↓ **Simplificações e aproximações**

Modelo físico

↓

Modelo matemático

(equação diferencial)

↓ **Discretização**

Modelo numérico

(DF, MEF,MEC,…)

↓

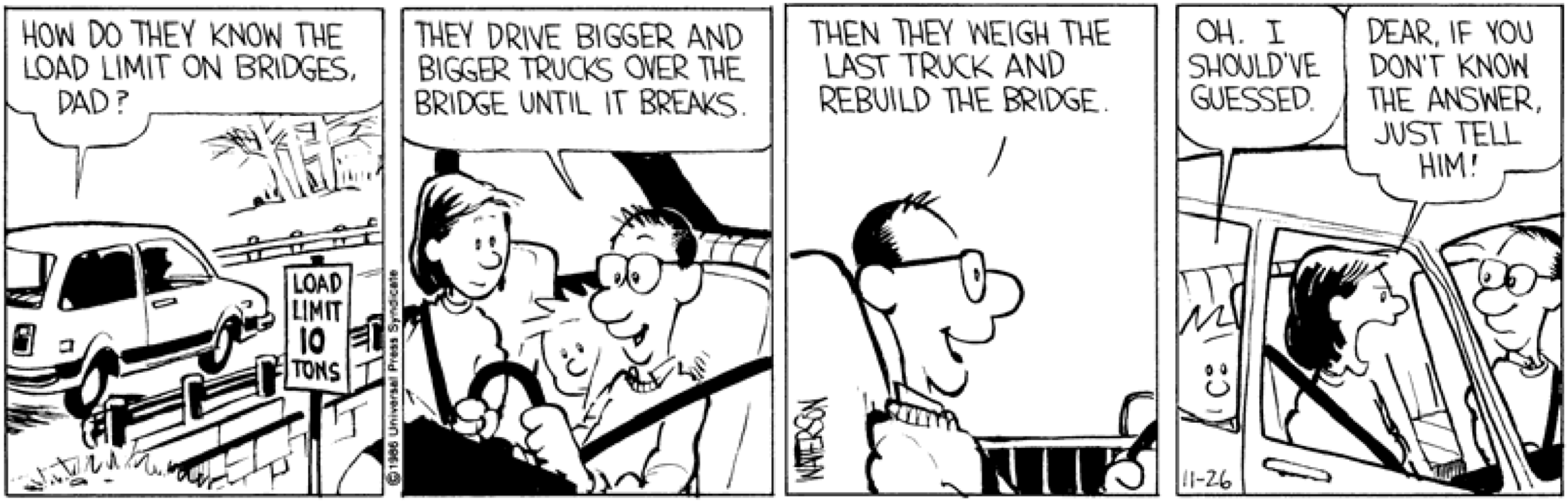
Análise

Ex: Cálculo de tensões

Modelos de engenharia

- Um bom modelo deve:
  - Considerar os aspectos essenciais do problema;
  - Desprezar os fatores secundários;
  - Fornecer resultados próximos ***o suficiente*** das respostas reais.
- Habilidade em modelamento é baseada na visualização do problema físico e relacionamento com o que queremos analisar:
  - Distribuição de temperatura?
  - Campo de tensões?
  - Campo de deformações?
- Se as previsões do modelo não estão de acordo com as respostas reais ou esperadas é necessário refinar o modelo:
  - Incluir aspectos inicialmente desprezados.

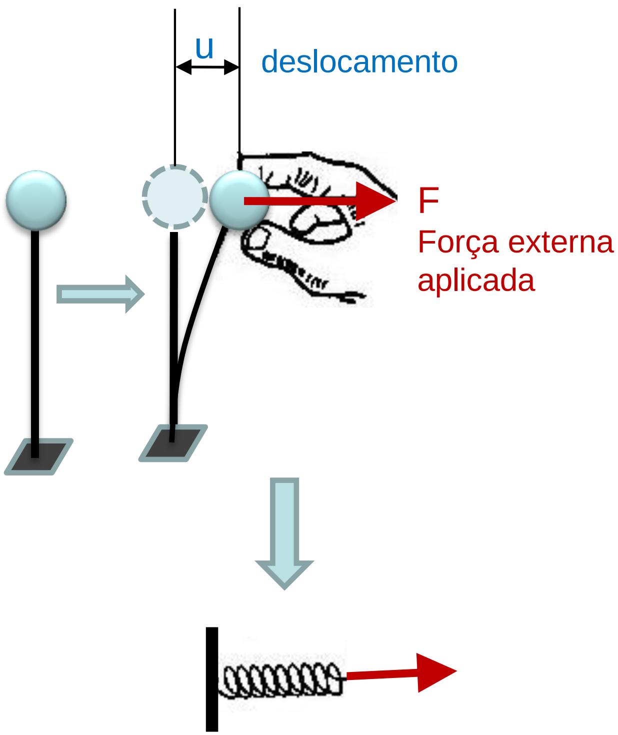
Então, como fazer?



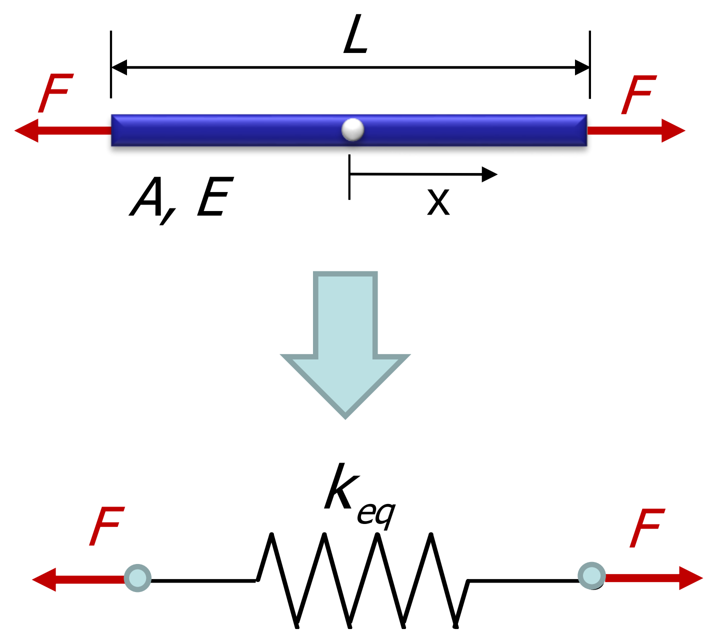
- Problemas devem ser simplificados usando certas aproximações…

Modelos numéricos são ***aproximações*** dos modelos matemáticos.

Rigidez de uma barra uniforme

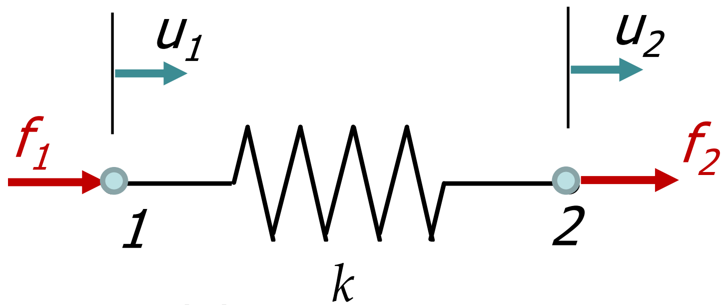


F=Ku



$$k_{eq} = \frac{AE}{L}$$

Forças e deslocamentos nodais



u_i e u_j :deslocamentos nodais
f_i e f_j : forças nodais.

$$f_1 = k(u_1 - u_2)$$
$$f_2 = k(u_2 - u_1)$$

$$k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$Kd = F$$

$$\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais

Ou graus de liberdade do elemento

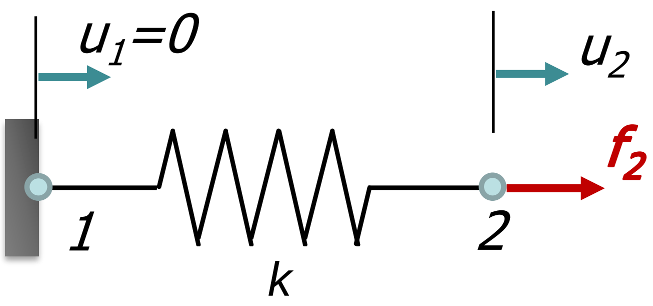
$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Vetor de forças nodais

Singularidade da matriz de rigidez do elemento

$$K^{-1} = ??$$

- **A matriz K é *singular* :** em equilíbrio estático, os deslocamentos nodais não podem ser determinados unicamente por um par de forças aplicadas nos nós. Um dos nós deve ter deslocamento prescrito e, daí, o deslocamento da outra extremidade pode ser unicamente determinado.



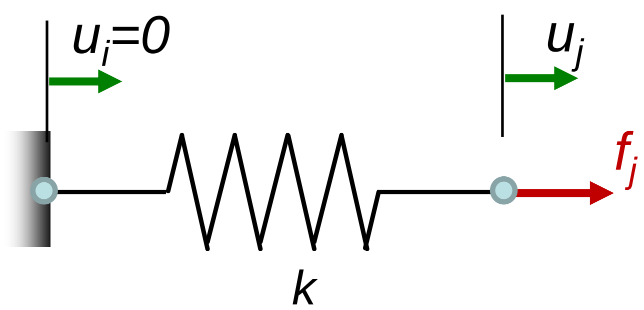
Restringir alguns nós da estrutura significa ***aplicar condições de contorno***.

Solução para um único elemento

$$k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Nó ***i*** é fixo:

$$ku_j = f_j \quad \Longrightarrow \quad u_j = \frac{f_j}{k}$$



Redução da matriz

- Note que quando um deslocamento ou GL está restrito e vale zero, linhas e colunas de **k** associadas àquele deslocamento são eliminadas e apenas o restante da matriz é resolvida.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Linha associada com u_i

Coluna associada com u_i

Condições de contorno homogêneas

Por exemplo $u_1 = 0$,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

0

Força nodal conhecida

$$f_2 = k u_2 \rightarrow u_2 = \frac{f_2}{k}$$

Força de reação desconhecida no nó 1

$$f_1 = -k u_2$$

1. **Delete as linhas e colunas apropriadas** da matriz de rigidez global e resolva o conjunto reduzido de equações para os deslocamentos nodais desconhecidos.

2. **Deslocamentos e forças NÃO PODEM ser conhecidos no mesmo nó.** Se o deslocamento é desconhecido, a força naquele nó é conhecida e vice-versa.

Condição de contorno não homogênea

Por exemplo $u_1 = \delta$, um valor conhecido diferente de zero

$$\begin{bmatrix} k & k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +k\delta \end{matrix}$$

Força nodal conhecida

$$f_2 = -k\delta + ku_2 \rightarrow u_2 = \frac{f_2 + k\delta}{k}$$

Força de reação desconhecida no nó 1

$$f_1 = k(\delta - u_2)$$

1. **Delete as linhas e colunas apropriadas** da matriz de rigidez global e resolva o conjunto reduzido de equações para os deslocamentos nodais desconhecidos.

2. **Não esqueça de modificar o lado direito da equação!!!**

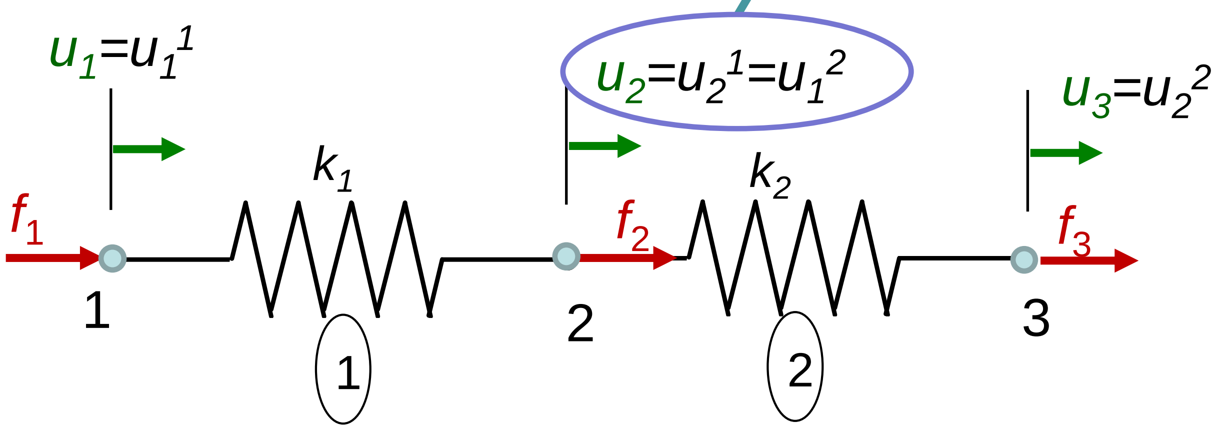
Vários elementos

Considere agora duas molas rigidez diferente unidas uma a outra. Precisamos da definição de nó **local** x nó **global**.

Os nós são numerados **globalmente** como nós 1,2 e 3.

Os nós 1 e 2 são os nós 1 e 2 **locais** do elemento 1. os nós 2 e 3 são os nós 1 e 2 **locais** do elemento 2.

Deslocamento do nó 2 global:
-Deslocamento do nó local 2 do elemento 1
-Deslocamento do nó local 1 do elemento 2



Equilíbrio de forças

- Já sabemos que os deslocamentos nodais de dois elementos ligados deve ser o mesmo no nó de ligação. E as forças?

- ***A soma das forças nodais externas atuando em cada nó deve ser igual à soma das forças nodais de cada elemento.***

$$F_1 = F_1^1$$

$$F_2 = F_2^1 + F_1^2$$

$$F_3 = F_2^2$$

onde F_1, F_2, F_3 são forças externas nodais, no sistema global

Equações de equilíbrio globais

- Quando continuidade e equilíbrio de forças são impostos, as equações de **equilíbrio global** resultante são,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\boldsymbol{kd}=\boldsymbol{F}$$

Matriz de rigidez global

M*atriz de rigidez global* (sempre simétrica)

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais global

$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Vetor global de forças nodais

$$\mathbf{F}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos nodais globais são também conhecidos como graus de liberdade globais.

Montagem da matriz de rigidez global

- A matriz de rigidez *global* é montada através da união das matrizes de rigidez de cada elemento, da seguinte forma:

Matriz de rigidez do elemento ①

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez do elemento ②

Análise em EF

Um método numérico para aproximação de uma equação diferencial complexa em um número finito the equações algébricas.

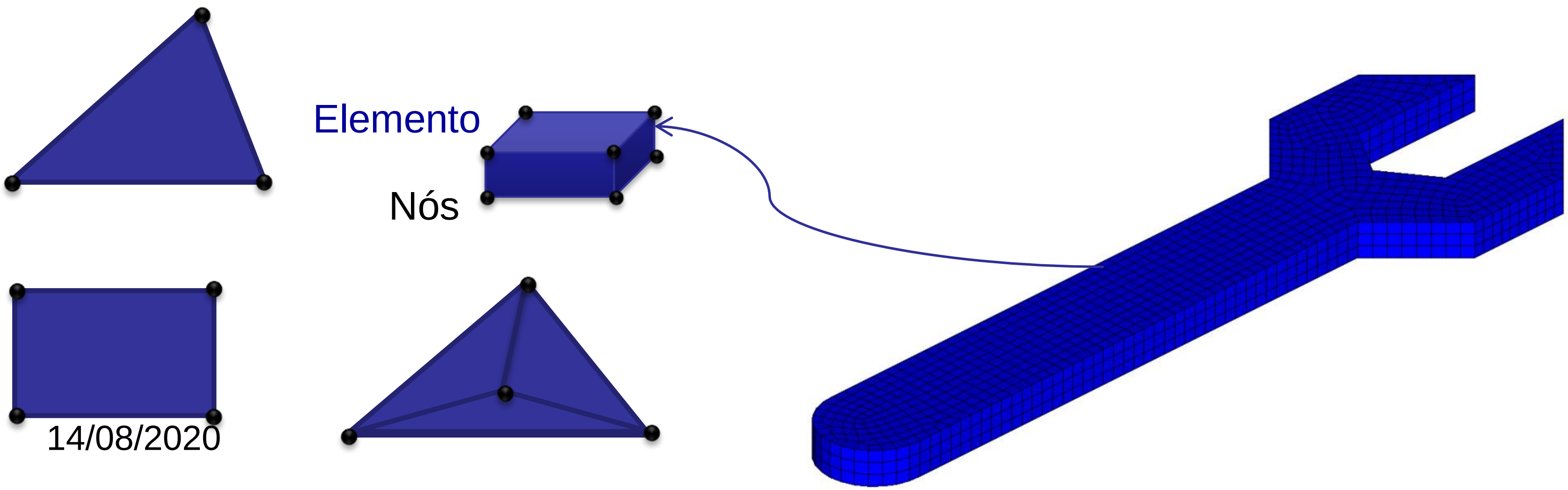
Requerimentos para fazer uma análise em EF

A obtenção de resultados confiáveis requer conhecimento teórico estrutural e conhecimento do MEF!

- Conhecimento da área (estrutural, térmica, etc.);
- Habilidade para resolver uma versão simplificada via métodos analíticos;
- Comportamento dos elementos utilizados;
- Limitações e aproximações utilizadas pelo programa.

Método dos Elementos Finitos

- Envolve a divisão da estrutura (domínio) em número finito de **elementos**
- Elementos adjacentes estão conectados através de seus nós dos vértices – chamados **pontos nodais** ou simplesmente nós.
- Cada elemento tem uma forma geométrica simples

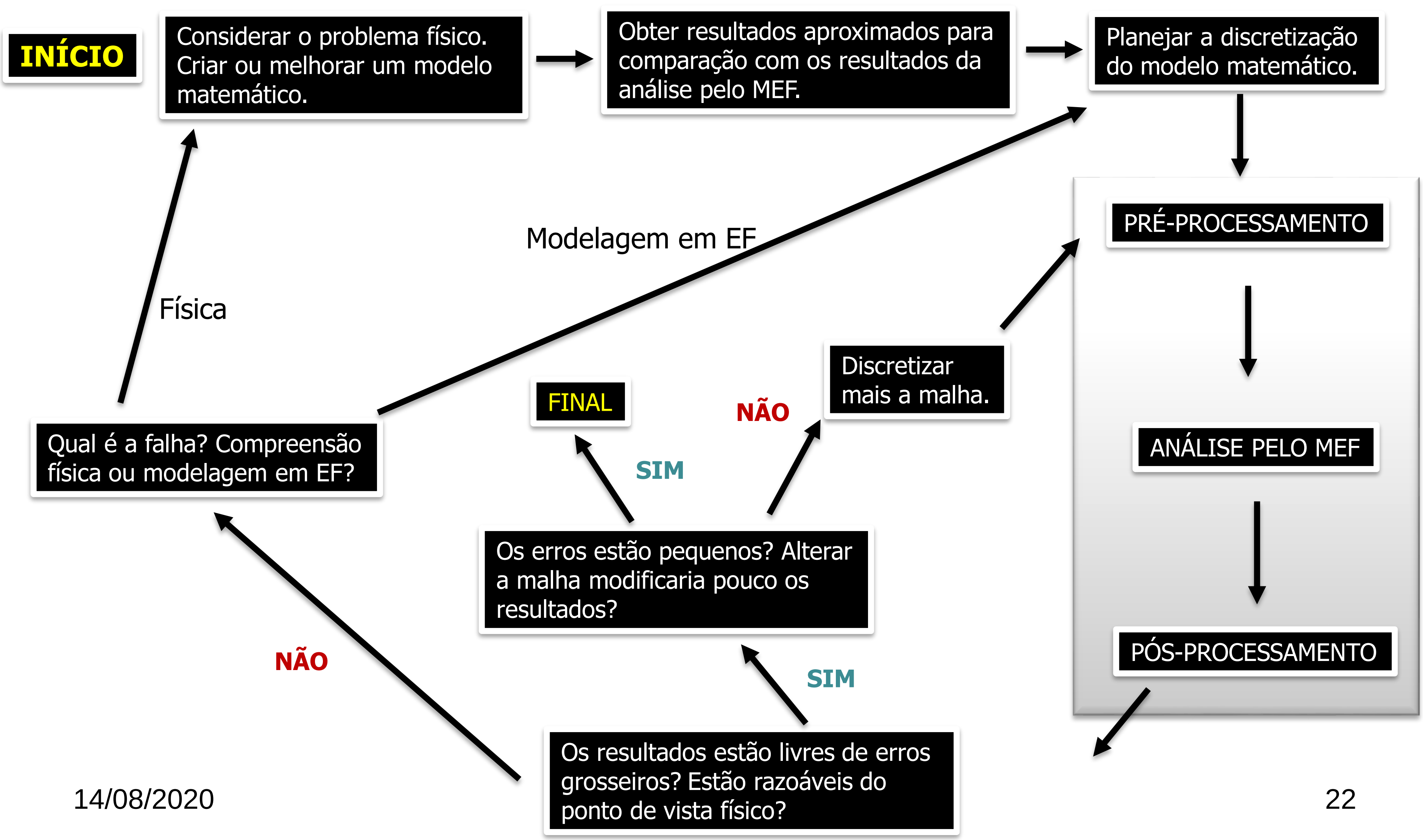


- O equilíbrio é obtido em função dos deslocamentos nodais (graus de liberdade).

- Deslocamentos fora dos pontos nodais (no interior dos elementos) são interpolados a partir dos valores nodais.

- Tensões e deformações no interior dos elementos são obtidas a partir dos deslocamentos nodais:
  - Deformações são as derivadas dos deslocamentos.
  - Tensões são calculadas a partir das deformações, utilizando-se a lei constitutiva do material.

Utilização do MEF



Referência

- Online tutorial Abaqus

- https://www.impactbook.org/

Look inside

IMPACT ENGINEERING: Fundamentals, Experiments and Nonlinear Finite Elements Paperback – July 7, 2020

by MARCILIO ALVES (Author)

See all formats and editions

Paperback
$86.97

1 Used from $123.00
4 New from $86.97

IMPACT ENGINEERING: Fundamentals, Experiments, Non-linear Finite Elements, by Marcilio Alves, with contributions from Dora Karagiozova and Larissa Driemeier, covers the basic aspects of the dynamic analysis of structures undergoing small to large displacements, linear and nonlinear elastic material behavior to viscoplasticity, equipping the reader with the basic features of simple and advanced structural impact analysis.The book covers theoretical, numerical and experimental mechanics,