

### AULA 3

#### Movimento de um corpo rígido em torno de seu centro de massa

##### 1. Modelo físico

Admitiremos que o corpo rígido tenha forma arbitrária, mas que esteja suspenso por uma suspensão Cardan (Fig.1), de modo tal que o seu centro de massa permaneça imóvel durante todo o tempo.

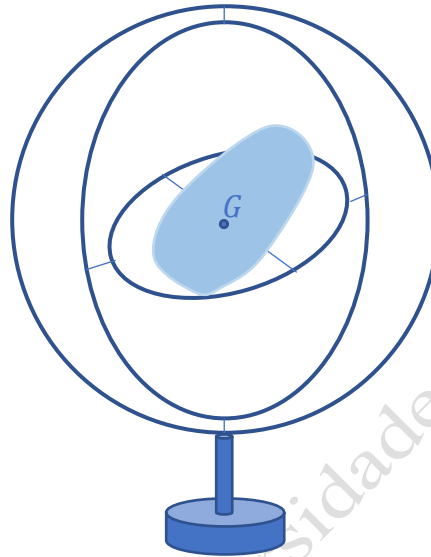


Figura 1. Corpo rígido de forma arbitrária suspenso por uma suspensão Cardan.

O corpo é posto em movimento graças à aplicação de uma percussão inicial. Admitindo-se que não haja atrito nos mancais, o sistema de forças agentes sobre o corpo durante todo o seu movimento é nulo, ou seja:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad (1 - 1)$$

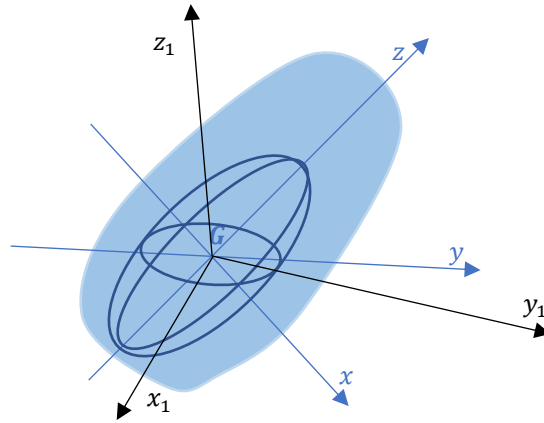
e

$$\vec{M}_G = \vec{0} \quad (1 - 2)$$

Em tais circunstâncias, o corpo realiza um **movimento por inércia**, também chamado de **movimento espontâneo** ou **movimento à la Poincaré**.

##### 2. Sistemas de referência e propriedades mecânicas

Para descrever esse movimento, utilizaremos dois sistemas de referência – um fixo no espaço ( $Gx_1y_1z_1$ ), outro fixo no corpo ( $Gxyz$ ). Para simplificar as equações, admitiremos que os eixos do sistema móvel coincidam com os eixos principais de inércia do corpo (Fig.2).



**Figura 2.** Sistemas de referência e elipsoide de inércia.

Admitiremos também que a matriz de inércia do corpo no polo  $G$ , descrita no sistema de eixos principais de inércia  $Gxyz$ , seja conhecida e dada por

$$[J_G] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

### 3. Equações de Euler

Aplicando-se ao problema a equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, isto é,

$$\left. \frac{d\vec{H}_G}{dt} \right|_{Gx_1y_1z_1} = [J_G][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_G][\vec{\omega}]\} = \vec{0} \quad (3-1)$$

conclui-se que o momento da quantidade de movimento do corpo é invariante, ou seja:

$$\vec{H}_G = \overline{const} \quad (3-2)$$

Representando-se o vetor rotação instantânea do corpo como

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (3-3)$$

chega-se às famosas equações de Euler

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

as quais descrevem o movimento por inércia de um corpo rígido.

Integrando-se as equações diferenciais de primeira ordem (3-4) para uma dada condição inicial, obtém-se a **evolução temporal do vetor rotação instantânea do corpo**, ou seja, a função vetorial

$$\vec{\omega}(t) = p(t)\vec{i} + q(t)\vec{j} + r(t)\vec{k} \quad (3-5)$$

e, por decorrência, a do seu eixo instantâneo de rotação, de orientação

$$\vec{I}(t) = \frac{\vec{\omega}(t)}{|\vec{\omega}(t)|} \quad (3-6)$$

### 3.1 Caso em que o elipsoide de inércia é uma esfera

Nesse caso, tem-se  $A = B = C$  e as equações de Euler assumem a forma:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 \\ \frac{dr}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.1 - 1)$$

ou seja,

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) = p(0)\vec{i} + q(0)\vec{j} + r(0)\vec{k} \quad (3.1 - 2)$$

#### TAREFA 1

- (a) Implemente a chamada da função **ode** do **Scilab** para integrar as equações diferenciais de primeira ordem (3-3).
- (b) Supondo que os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $Gx, Gy, Gz$  sejam  $A = B = C = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , mostre que qualquer eixo desse corpo é um eixo permanente de rotação.

### 3.2 Caso em que o elipsoide de inércia é um elipsoide de revolução

Suporemos que  $A = B \neq C$ . Em tal caso, as equações de Euler assumem a forma:

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = 0 \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0 \\ C \frac{dr}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.2 - 1)$$

A terceira das equações acima fornece:

$$r(t) = r(0) \quad (3.2 - 2)$$

Introduzindo-se a variável auxiliar

$$\Omega = \frac{C - A}{A} r \quad (3.2 - 3)$$

as duas primeiras equações 3.2-1 se transformam em:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \Omega q = 0 \\ \frac{dq}{dt} - \Omega p = 0 \end{cases} \quad (3.2 - 4)$$

Multiplicando-se a primeira das equações acima por  $p$  e a segunda por  $q$  e adicionando-se ambas essas equações, tem-se:

$$p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} = 0 \quad (3.2 - 5)$$

Finalmente, integrando-se a equação diferencial acima com relação ao tempo, obtém-se:

$$p^2(t) + q^2(t) = [\omega_e(0)]^2 \quad (3.2 - 6)$$

em que  $\omega_e$  é a projeção do vetor rotação instantâneo  $\vec{\omega}$  no plano equatorial (plano  $Gxy$ , conforme ilustrado na Fig. 3).

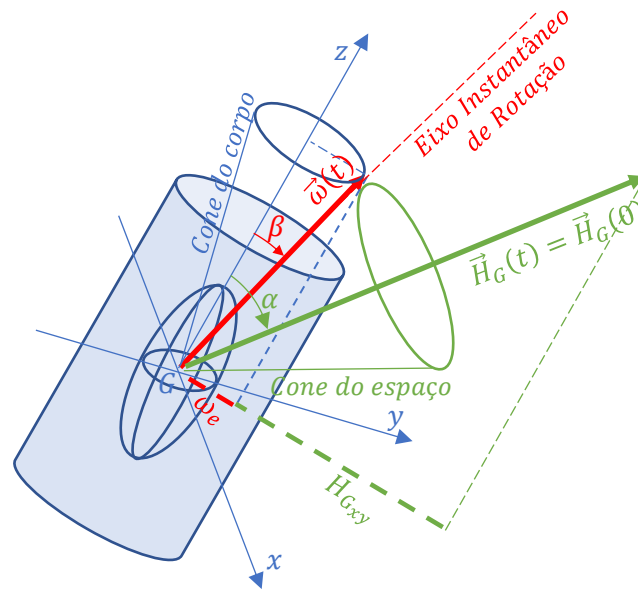


Figura 3. Precessão estacionária regular progressiva.

Das equações 3.2-2 e 3.2-6, conclui-se que

$$|\vec{\omega}(t)| = |\vec{\omega}(0)| \quad (3.2 - 7)$$

Da equação 3-2 tem-se

$$\vec{H}_G(t) = \vec{H}_G(0) \quad (3.2 - 8)$$

Observe-se que a projeção de  $\vec{H}_G$  no plano equatorial  $Gxy$  é dada por

$$H_e = \sqrt{H_{G_x}^2 + H_{G_y}^2} = \sqrt{(Ap)^2 + (Aq)^2} = A\sqrt{p^2 + q^2} \quad (3.2 - 9)$$

Confrontando-se 3.2-9 com 3.2-6 e analisando-se a geometria da Fig. 3, conclui-se que

$$H_{G_e}(t) = H_{G_e}(0) \quad (3.2 - 10)$$

e que as projeções de  $\vec{\omega}$  e  $\vec{H}_G$  no plano  $G_{xy}$  estão alinhadas.

Das conclusões acima, infere-se que o eixo  $Gz$  e os vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{H}_G$  pertencem ao mesmo plano e que esse plano gira em torno do vetor invariante  $\vec{H}_G$ , fixo no espaço.

Como a direção de  $\vec{\omega}$  é variável no tempo, enquanto a de  $\vec{H}_G$  é fixa,  $\vec{\omega}$  gira em torno de  $\vec{H}_G$  descrevendo um cone fixo no espaço, denominado **cone do espaço**. Ao mesmo tempo,  $\vec{\omega}$  gira em torno de  $Gz$ , descrevendo um cone móvel no espaço, denominado **cone do corpo**. Portanto, o movimento do corpo pode ser concebido como um movimento de *rolamento sem escorregamento do cone do corpo sobre o cone do espaço*.

Da Fig. 3, observa-se que os ângulos **invariantes**  $\alpha$  e  $\beta$  entre o eixo  $Gz$  e os vetores  $\vec{H}_G$  e  $\vec{\omega}$ , respectivamente, são dados por:

$$\tan \alpha = \frac{H_{G_e}}{H_{G_z}} = \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{Cr} \quad (3.2 - 11)$$

e

$$\tan \beta = \frac{\omega_e}{\omega_z} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} \quad (3.2 - 12)$$

de modo que

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{A}{C} \quad (3.2 - 13)$$

É importante destacar que, se  $A < C$  (corpo achatado), então  $\alpha < \beta$  e o cone do espaço é interior ao cone do corpo (Fig.4); diz-se, nesse caso, que o corpo realiza precessão estacionária regular **retrógrada**. Porém, se  $A > C$  (corpo alongado), então  $\alpha > \beta$  e o cone do espaço é exterior ao cone do corpo (Fig.3); diz-se, nesse caso, que o corpo realiza precessão estacionária regular **progressiva**.

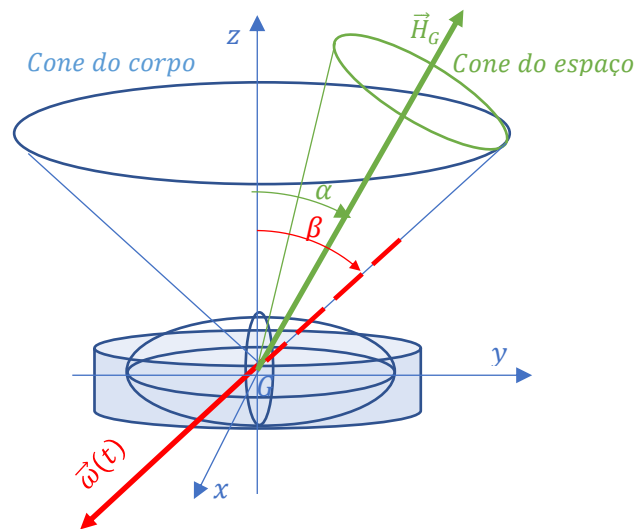


Figura 4. Precessão estacionária regular retrógrada.

## TAREFA 2

Suponha que os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $Gx, Gy, Gz$  sejam  $A = B = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e  $C = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

- Simule as equações diferenciais (3.2-1) adotando as seguintes condições iniciais: 1ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{i}$ ; 2ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{j}$ ; 3ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{k}$ ; 4ª)  $\vec{\omega}_0 = 3\vec{i} + 1,5\vec{j} + 8\vec{k}$ . Em seguida, utilizando a função **plot** do **Scilab**, construa os seguintes gráficos:  $p = p(t), q = q(t), r = r(t)$ .
- Mostre, numericamente, que  $p^2(t) + q^2(t)$  é invariante.
- Mostre, numericamente, que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são invariantes.
- Utilizando a função **comet3D** do **Scilab**, desenhe a trajetória descrita pela extremidade do vetor rotação instantânea do corpo,  $\vec{\omega}$ , durante o movimento referente à 4ª condição inicial do item (a).
- Utilizando a função **comet3D** do **Scilab**, desenhe a trajetória descrita pela extremidade do vetor momento da quantidade de movimento em  $G$ , ou seja,  $\vec{H}_G$ , durante o movimento referente à 4ª condição inicial do item (a).  
**Observação Importante:**  $\vec{H}_G$  é invariante para um observador ligado ao referencial inercial, mas não para um observador ligado ao referencial do corpo.
- Adote  $A = B = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e  $C = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Em seguida, simule as equações diferenciais 3.2-1 para a 4ª condição do item (a), desenhe as trajetórias descritas pelas extremidades dos vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{H}_G$  e calcule os ângulos invariantes  $\alpha$  e  $\beta$ .
- Analise os resultados anteriores.

### 3.3. Caso em que o elipsoide de inércia possui 3 diâmetros principais distintos

Esse problema clássico, em que  $A \neq B \neq C$ , foi resolvido por dois grandes matemáticos – Euler, que o resolveu de forma analítica, e Poinsot, que propôs uma brilhante solução geométrica.

Nos próximos tópicos, apresentaremos essas duas soluções, iniciando pela solução geométrica de Poinsot.

### 4. Solução geométrica de Poinsot

Como

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{H}_G(t) \right|_{Gx_1y_1z_1} = \vec{M}_G = \vec{0} \quad (4-1)$$

conclui-se que o momento da quantidade de movimento em  $G$  é invariante, ou seja,

$$\vec{H}_G = [J_G][\omega] = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k} = \overrightarrow{const} \quad (4-2)$$

É importante salientar novamente que a invariância de  $\vec{H}_G$  se observa apenas no **referencial inercial** ( $Gx_1y_1z_1$ ), mas não no referencial móvel. Sendo  $\vec{H}_G$  um vetor **fixo no espaço** e, considerando-se que as equações de Euler são descritas no referencial  $Gxyz$  ligado ao corpo rígido, a evolução temporal de  $\vec{H}_G$  reflete o ponto de vista de um observador ligado a esse corpo observando um vetor fixo no espaço. E, como o corpo, em geral, irá realizar um movimento de precessão estacionária irregular, para o observador a ele ligado o vetor  $\vec{H}_G$  mudará continuamente de direção, **aparentando** ser variável.

Retomando a discussão prévia acerca da equação 4-2, conclui-se, evidentemente, que **o módulo elevado ao quadrado de  $\vec{H}_G$  é invariante**. Expressando-se esse escalar nas coordenadas ligadas ao corpo, tem-se:

$$|\vec{H}_G(t)|^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \ell^2 \quad (4-3)$$

Considerando-se que não atuam no corpo forças dissipativas e que a sua energia potencial não se altera durante o movimento (pois  $G$  é um ponto fixo), conclui-se que **a energia cinética do corpo é invariante**, ou seja:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) = \frac{h}{2} \quad (4-4)$$

A função  $T = T(p, q, r)$ , dada pela equação 4-4, representa a superfície de um elipsoide no **espaço de coordenadas**  $(p, q, r)$ . Esse elipsoide, denominado **elipsoide de Poinsot**, é o lugar geométrico das extremidades do vetor rotação instantânea  $\vec{\omega}$  do corpo compatíveis com um dado nível  $T$  constante de energia cinética. Portanto, ao longo do tempo, a extremidade do vetor  $\vec{\omega}$  descreverá curvas traçadas sobre o elipsoide de Poinsot, curvas essas chamadas de **poloides**.

Notemos ainda que o gradiente da função escalar  $T$  é o vetor

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial p} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial q} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial r} \vec{k} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k} = \vec{H}_G \quad (4-5)$$

Sabe-se que, em cada ponto do espaço  $(p, q, r)$ , o vetor  $\nabla T$  é normal à superfície  $T = const$ . Sendo  $\Pi$  o plano tangente a esse elipsoide em  $(p, q, r)$  e, considerando-se que

$$\nabla T = \vec{H}_G = \overrightarrow{const} \quad (4-6)$$

conclui-se que o corpo rígido se move de forma tal que o **elipsoide de Poinot role e pivote sem deslizar sobre o plano invariante  $\Pi$** . Essa interpretação é conhecida, na literatura, como **solução geométrica de Poinot**.

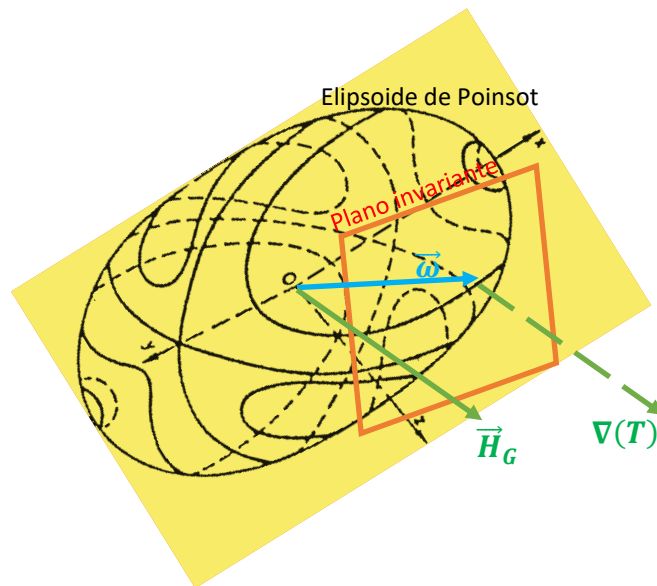


Figura 3. Elipsoide de Poinot e plano invariante.

As curvas traçadas pela extremidade do vetor rotação instantânea  $\vec{\omega}$  sobre o plano invariante são chamadas de **herpoloides**.

### TAREFA 3

- (a) Suponha que os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $Gx, Gy, Gz$  sejam, respectivamente,  $A = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $B = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e  $C = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Simule as equações diferenciais (3-4) adotando as seguintes condições iniciais: 1ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{i}$ ; 2ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{j}$ ; 3ª)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{k}$ ; 4ª)  $\vec{\omega}_0 = 3\vec{i} + 1,5\vec{j} + 8\vec{k}$ . Em seguida, utilizando a função **plot** do **Scilab**, construa os seguintes gráficos: i)  $p = p(t), q = q(t), r = r(t)$ ; ii)  $H_{Gx} = H_{Gx}(t), H_{Gy} = H_{Gy}(t), H_{Gz} = H_{Gz}(t)$ .
- (b) Mostre, para cada um dos casos anteriores, que  $T$  e  $|\vec{H}_G|$  são invariantes.
- (c) Mostre que os eixos correspondentes aos momentos de inércia máximo ( $A$ ) e mínimo ( $C$ ) do corpo são estáveis. **Sugestão:** Simule o movimento do corpo adotando as seguintes condições iniciais: i)  $\vec{\omega}_0 = 5\vec{i} + \varepsilon_1\vec{j} + \varepsilon_2\vec{k}$ ; ii)  $\vec{\omega}_0 = \varepsilon_1\vec{i} + \varepsilon_2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Sendo  $\varepsilon_1 \approx 0$  e  $\varepsilon_2 \approx 0$ , a trajetória da extremidade do vetor  $\vec{\omega}$  estará contida em uma pequena esfera de raio  $\delta$  e centro  $(5,0,0)$ , para o caso (i) e centro  $(0,0,5)$  para o caso 2.
- (d) Mostre que o eixo correspondente ao momento de inércia intermediário ( $B$ ) é instável. **Sugestão:** Simule o movimento do corpo adotando a seguinte condição inicial:  $\vec{\omega}_0 = \varepsilon_1\vec{i} + 5\vec{j} + \varepsilon_2\vec{k}$ , com  $\varepsilon_1 \approx 0$  e  $\varepsilon_2 \approx 0$ . Observe que a poloide obtida apresenta duas cúspides.
- (e) Construa, para  $T = 80 \text{ Joules}$  (constante), um conjunto abrangente de poloides correspondentes a distintas condições iniciais, de modo a produzir, na medida do possível, uma figura similar ao elipsoide de Poinot (Fig.3).

## 5. Solução analítica das equações de Euler

Para resolver o sistema de equações diferenciais (3-3), Euler substituiu duas dessas equações pelas equações algébricas (4-3) e (4-4).

O desenvolvimento que daí decorre é simplificado se se definem as seguintes constantes auxiliares:

$$\mu = \frac{h}{\ell} \quad (5-1)$$

$$D = \frac{\ell^2}{h} \quad (5-2)$$

A partir das definições anteriores, conclui-se que

$$h = D\mu^2 \quad (5-3)$$

$$\ell = D\mu \quad (5-4)$$

Dois pontos devem ser aqui destacados:

(i) a constante  $\mu$  corresponde à projeção de  $\vec{\omega}$  na direção de  $\vec{H}_G$ , ou seja,

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{H}_G}{|\vec{H}_G|} = \frac{2T}{\ell} = \frac{h}{\ell} = \mu \quad (5-5)$$

(ii) a constante  $D$  tem a dimensão de momento de inércia.

Admitiremos também que

$$D \neq A \quad D \neq B \quad D \neq C \quad (5-6)$$

ou seja, que, no momento da partida o vetor rotação instantânea não coincide com a direção de nenhum dos eixos principais de inércia do corpo (isso poderá ser demonstrado adiante).

Utilizando as definições anteriores, o problema passa a ser descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2 \quad (5-7)$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2 \quad (5-8)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0 \quad (5-9)$$

Para resolvê-lo, utilizaremos as equações algébricas (5-7) e (5-8) para expressar  $p$  e  $r$  em função de  $q$ ; em seguida, substituiremos essas funções na equação diferencial (5-9).

Eliminando-se  $r$  e  $p$  das equações (5-7) e (5-8), obtêm-se, respectivamente:

$$D^2\mu^2 - A^2p^2 - B^2q^2 = C(D\mu^2 - Ap^2 - Bq^2) \quad (5-10)$$

$$D^2\mu^2 - B^2q^2 - C^2r^2 = A(D\mu^2 - Bq^2 - Cr^2) \quad (5-11)$$

Desenvolvendo-se as equações anteriores, resultam:

$$p^2 = \frac{D(D - C)\mu^2 - B(B - C)q^2}{A(A - C)} = \frac{B(B - C)}{A(A - C)}(f^2 - q^2) \quad (5-12)$$

$$r^2 = \frac{D(A - D)\mu^2 - B(A - B)q^2}{C(A - C)} = \frac{B(A - B)}{C(A - C)}(g^2 - q^2) \quad (5-13)$$

onde



$$f^2 = \mu^2 \frac{D(D - C)}{B(B - C)} \quad (5 - 14)$$

$$g^2 = \mu^2 \frac{D(A - D)}{B(A - B)} \quad (5 - 15)$$

Analisando-se as equações (5-12) e (5-13), verifica-se que, como  $A > B > C$ , necessariamente  $D \geq C$  e  $A \geq D$ . Os casos  $D = C$  e  $D = A$  correspondem a movimentos de rotação permanente em torno dos eixos principais de inércia mínimo e máximo, respectivamente.

Além disso, para que  $p, r \in \mathbb{R}$ , deve-se ter

$$q^2 \leq \min(f^2, g^2) \quad (5 - 16)$$

Analisemos, portanto, a diferença

$$g^2 - f^2 = \frac{D(A - D)}{B(A - B)} \mu^2 - \frac{D(D - C)}{B(B - C)} \mu^2$$

que, após desenvolvimento algébrico, se transforma em:

$$g^2 - f^2 = \frac{D(A - C)(B - D)}{B(B - C)(A - B)} \mu^2 \quad (5 - 17)$$

A equação anterior mostra que, sendo  $A > B > C$ , o sinal de  $g^2 - f^2$  é o de  $B - D$ , o qual é conhecido a partir das condições iniciais (vide 5-2).

Portanto, se  $B > D$ , por exemplo,  $g^2 > f^2$  e daí decorrem as seguintes conseqüências:

- a) a componente  $q$  assume valores no intervalo  $[-f, f]$  (vide 5-16);
- b) a componente  $r$  nunca se anula (vide 5-13), conservando sempre o mesmo sinal, o qual é conhecido a partir do valor inicial  $r_0$ ;
- c) a componente  $p$  se anula sempre que  $q = \pm f$  (vide 5-12);
- d) supondo  $r > 0$ , a equação (5-9) mostra que, se  $dq/dt > 0$  então  $p < 0$  e se  $dq/dt < 0$  então  $p > 0$ .

As conclusões anteriores possibilitam a determinação correta dos sinais das raízes das equações (5-12) e (5-13), ou seja, de:

$$p = \pm \sqrt{\frac{B(B - C)}{A(A - C)}} \sqrt{f^2 - q^2} \quad (5 - 18)$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{B(A - B)}{C(A - C)}} \sqrt{g^2 - q^2} \quad (5 - 19)$$

Introduzindo-se (5-18) e (5-19) em (5-9), tem-se:

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) \left[ \pm \sqrt{\frac{B(B - C)}{A(A - C)}} \sqrt{f^2 - q^2} \right] \left[ \pm \sqrt{\frac{B(A - B)}{C(A - C)}} \sqrt{g^2 - q^2} \right] = 0$$

ou seja,

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(B - C)(A - B)}{AC}} \sqrt{f^2 - q^2} \sqrt{g^2 - q^2} \quad (5 - 20)$$

Para integrar corretamente a equação diferencial acima é necessário adotar o seguinte procedimento:

- a) quando  $q$  aumenta, até atingir o valor  $+f$ , adota-se o sinal  $+$ ;
- b) à medida que  $q$  decresce até atingir o valor  $-f$ , adota-se o sinal  $-$ ;

c) repetem-se os passos *a* e *b* continuamente.

Da equação (5-20), resulta que:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC} \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}}} \quad (5-21)$$

A integral que comparece no lado direito da equação (5-21) é uma **integral elíptica de primeira espécie**, mas isso só ficará evidente após a adoção das seguintes transformações de variáveis:

$$q = f \cdot s \quad (5-22)$$

$$k^2 = \frac{f^2}{g^2} = \frac{D(D-C)B(A-B)}{B(B-C)D(A-D)} = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)} \quad (5-23)$$

onde  $k < 1$  pois  $g^2 > f^2$ .

Dessa forma, tem-se:

$$dq = f ds \quad (5-24)$$

e

$$\sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{s^2} - q^2\right)(g^2 - k^2 g^2 s^2)} = fg \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)} \quad (5-25)$$

Assim, resulta que

$$\frac{dq}{\sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}} = \frac{f ds}{fg \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} = \frac{ds}{g \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} \quad (5-26)$$

Substituindo-se (5-26) em (5-21), tem-se:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC} g \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}} \quad (5-27)$$

Introduzindo-se (5-15) na equação acima, resulta:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC} \mu \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}} \quad (5-28)$$

Introduzindo-se a frequência angular

$$n = \mu \sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}} \quad (5-29)$$

a integral do lado direito da equação (5-28) se apresenta na **forma normal** de uma integral elíptica de primeira espécie, de modo que:

$$n(t - t_0) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} \quad (5-30)$$

Se, além disso, definirmos  $t_0$  como **o instante em que  $q$  se anula durante a fase em que  $dq/dt > 0$** , a equação anterior adquire a forma:

$$n(t - t_0) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (5-31)$$

Finalmente, utilizando a notação

$$\tau = n(t - t_0) \quad (5-32)$$

tem-se:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (5-33)$$

Portanto, invertendo-se a integral elíptica acima, chega-se a (vide apostila da Aula 4):

$$s = \text{sn}(\tau, k) \quad (5-34)$$

A equação (5-22) fornece, então:

$$q = f \cdot s = \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}} \text{sn}(\tau, k) \quad (5-35)$$

As componentes  $p$  e  $r$  do vetor rotação absoluta são determinadas a partir das equações (5-18) e (5-19) e das relações (5-22) e (5-23), ou seja:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \sqrt{f^2 - q^2} = \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \frac{q}{s} \sqrt{1-s^2} \\ \Rightarrow p &= f \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \sqrt{1 - \text{sn}^2(\tau)} = \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}} \text{cn}(\tau, k) \end{aligned} \quad (5-36)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{g^2 - q^2} = \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{g^2 - k^2 g^2 s^2} \\ \Rightarrow r &= g \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(\tau)} = \mu \sqrt{\frac{D(A-D)}{C(A-C)}} \text{dn}(\tau, k) \end{aligned} \quad (5-37)$$

Em suma, a evolução temporal das componentes do vetor rotação instantânea do corpo é descrita pelas funções

$$\begin{cases} p(\tau) = \varepsilon \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}} \text{cn}(\tau, k) \\ q(\tau) = \varepsilon' \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}} \text{sn}(\tau, k) \\ r(\tau) = \varepsilon'' \mu \sqrt{\frac{D(A-D)}{C(A-C)}} \text{dn}(\tau, k) \end{cases} \quad (5-38)$$

onde  $\tau$  é dado pela equação 5.32 e  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  podem assumir valores  $+1$  ou  $-1$ , **determinados mediante análise**. Por exemplo: Se  $r_0 > 0$ ,  $r$  permanece sempre positivo. Logo,  $\varepsilon'' = +1$ . Caso  $dp/dt > 0$ , a primeira das equações de Euler (3-3) indica que  $q \cdot r < 0$ , de modo que  $\varepsilon' = -1$ . Logo, a terceira das equações (3-3) indica que  $\varepsilon = +1$ .

#### TAREFA 4

- (a) Suponha que os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $Gx, Gy, Gz$  sejam, respectivamente,  $A = 3kg \cdot m^2$ ,  $B = 2kg \cdot m^2$  e  $C = 1kg \cdot m^2$ . Simule as equações diferenciais (3-4) adotando a seguinte condição inicial:  $\vec{\omega}_0 = 3\vec{i} + 1,5\vec{j} + 8\vec{k}$ . Para essa condição, construa os gráficos  $p = p(t)$ ,  $q = q(t)$ ,  $r = r(t)$ .
- (b) Mostre, a partir dos resultados da simulação, que a inequação 5-16 está correta.
- (c) Utilize a expressão 5-17 para calcular  $g^2 - f^2$ . Mostre que, se  $g^2 > f^2$  os dados obtidos na simulação corroboram as conclusões **a-d** marcadas em **rosa**. Em caso contrário, estabeleça as conclusões **a'-d'** correspondentes e mostre que os dados obtidos na simulação corroboram essas conclusões.
- (d) Compare os resultados da simulação (a) com as soluções analíticas (equações 5-38).

## 6. Modelo lagrangeano do movimento

Tomando como referência a Fig.2, a transformação entre os sistemas de referência  $Gxyz$  e  $Gx_1y_1z_1$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

em que os ângulos de precessão ( $\psi$ ), nutação ( $\theta$ ) e rotação própria ( $\varphi$ ) são medidos, respectivamente, em torno do eixo  $Gz_1$ , da linha dos nós ( $Gx_1$  rotacionado de  $+90^\circ$  em torno de  $Gz_1$ ) e do eixo  $Gz$ .

Utilizando os ângulos de Euler  $\psi, \theta, \varphi$ , o vetor rotação instantânea do corpo se expressa como:

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{i} + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{j} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{k} \quad (6-2)$$

O momento da quantidade de movimento no polo  $G$  fica representado como:

$$\vec{H}_G = A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{i} + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{j} + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{k} \quad (6-3)$$

A energia cinética do corpo fica expressa por:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\ \Rightarrow T = \frac{1}{2}\{A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2\} \quad (6-4)$$

Como a energia potencial do corpo é invariante, as equações de Lagrange se expressam na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad q \in \{\psi, \theta, \varphi\} \quad (6-5)$$

Aplicando-se as equações (6-5) às coordenadas generalizadas  $\psi, \theta, \varphi$  chega-se, após um longo trabalho de desenvolvimento algébrico, às seguintes equações diferenciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} & \{(A - B) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta\} \ddot{\psi} + \frac{A - B}{2} \sin \theta \sin 2\varphi \ddot{\theta} + C \cos \theta \ddot{\varphi} \\ & + \{(A - B) \sin 2\theta \sin^2 \varphi + (B - C) \sin 2\theta\} \dot{\psi} \dot{\theta} + (A - B) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \dot{\psi} \dot{\varphi} \\ & + \frac{A - B}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \dot{\theta}^2 + \{(A - B) \sin \theta \cos 2\varphi - C \sin \theta\} \dot{\varphi} \dot{\theta} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6 - 6)$$

$$\begin{aligned} & (A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \ddot{\psi} + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \ddot{\theta} + [(A - B) \sin \theta \cos 2\varphi + C \sin \theta] \dot{\psi} \dot{\varphi} \\ & - (A - B) \sin 2\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi - C) \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6 - 7)$$

$$\begin{aligned} & C \cos \theta \ddot{\psi} + C \ddot{\varphi} + \left(\frac{B - A}{2}\right) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \dot{\psi}^2 - \{(A - B) \sin \theta \cos 2\varphi + C \sin \theta\} \dot{\psi} \dot{\theta} \\ & - \left(\frac{B - A}{2}\right) \sin 2\varphi \dot{\theta}^2 = 0 \end{aligned} \quad (6 - 8)$$

**TAREFA 5**

- a) Verifique se o desenvolvimento algébrico das equações (6-6) – (6-8) está correto. Faça as devidas correções, caso sejam identificados erros no processo dedutivo.
- b) Particularize essas equações diferenciais para os casos  $A = B = C$  e  $A = B \neq C$ .

**7. Representação em espaço de estados das equações diferenciais do movimento (6-6), (6-7), (6-8)**

Analisando as equações diferenciais (6-6) a (6-8), verificamos que elas são da forma

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \ddot{\psi} + \alpha_{12} \ddot{\theta} + \alpha_{13} \ddot{\varphi} + \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_{21} \ddot{\psi} + \alpha_{22} \ddot{\theta} + \alpha_{23} \ddot{\varphi} + \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_{31} \ddot{\psi} + \alpha_{32} \ddot{\theta} + \alpha_{33} \ddot{\varphi} + \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7 - 1)$$

onde os coeficientes  $\alpha_{ij}$  e os termos  $\gamma_i$  são funções da forma  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\theta, \varphi)$  e  $\gamma_i = \gamma_i(\theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ , respectivamente. Por exemplo,  $\alpha_{12}$  corresponde a

$$\alpha_{12} = \frac{A - B}{2} \sin \theta \sin 2\varphi$$

enquanto que  $\gamma_3$  se expressa como

$$\gamma_3 = \left(\frac{B - A}{2}\right) \sin^2 \theta \sin 2\varphi \dot{\psi}^2 - \{(A - B) \sin \theta \cos 2\varphi + C \sin \theta\} \dot{\psi} \dot{\theta} - \left(\frac{B - A}{2}\right) \sin 2\varphi \dot{\theta}^2$$

Interpretando-se o sistema de equações diferenciais (7-1) como um sistema linear de equações algébricas nas incógnitas  $\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ , escreve-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (7 - 2)$$

obtendo-se, como solução:

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} &= \frac{(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\gamma_3 + (\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})\gamma_2 + (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}} \\
\ddot{\theta} &= \frac{(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21})\gamma_3 + (\alpha_{13}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{33})\gamma_2 + (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}} \\
\ddot{\phi} &= \frac{(\alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{21})\gamma_3 + (\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32})\gamma_2 + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}}
\end{aligned} \tag{7-3}$$

Dessa forma, as equações diferenciais de segunda ordem (6-6) a (6-8) podem ser representadas pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\left[ \begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\
\frac{dy_2}{dt} &= \frac{(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\gamma_3 + (\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})\gamma_2 + (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}} \\
\frac{dy_3}{dt} &= y_4 \\
\frac{dy_4}{dt} &= \frac{(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21})\gamma_3 + (\alpha_{13}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{33})\gamma_2 + (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{31})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}} \\
\frac{dy_5}{dt} &= y_6 \\
\frac{dy_6}{dt} &= \frac{(\alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{21})\gamma_3 + (\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32})\gamma_2 + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})\gamma_1}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\alpha_{33} + (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_{32} + (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})\alpha_{31}}
\end{aligned} \right. \tag{7-4}$$

onde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{7-5}$$

**TAREFA 6**

- (a) Após verificar se o desacoplamento dos termos de segunda ordem das equações diferenciais 6-6, 6-7 e 6-8 foi realizado de forma correta, implemente a chamada à função **ode** do **Scilab** para integrar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (7-4). **Sugestão:** no laço de integração, inclua funções auxiliares para calcular os coeficientes  $\alpha_{ij}$  e os termos  $\gamma_i$ .
- (b) Considere os 3 casos a seguir: 1º.  $A = B = C = 3kg \cdot m^2$ ; 2º.  $A = B = 3kg \cdot m^2, C = 6kg \cdot m^2$ ; 3º.  $A = 3kg \cdot m^2, B = 2kg \cdot m^2, C = 1kg \cdot m^2$ . Simule, para cada um desses casos, o movimento do corpo adotando uma condição inicial genérica, como, por exemplo:  $\psi_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 2\pi \text{ rad/s}, \theta_0 = \pi/4, \dot{\theta}_0 = 4\pi \text{ rad/s}, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 20\pi \text{ rad/s}$ . Construa os seguintes gráficos:  $\psi = \psi(t), \dot{\psi} = \dot{\psi}(t), \theta = \theta(t), \dot{\theta} = \dot{\theta}(t), \varphi = \varphi(t), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t), p = p(t), q = q(t), r = r(t)$ , lembrando que  $p, q, r$  são as componentes do vetor rotação instantânea do corpo, dado pela equação (6-2).
- (c) Para as condições do item (b), determine  $\vec{H}_G = Ap(t)\vec{i} + Bq(t)\vec{j} + Cr(t)\vec{k}$ . Em seguida, utilizando a equação (6-1) na sua forma inversa, expresse  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  em termos de  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ . Mostre, então, que no referencial inercial  $\vec{H}_G$  é um vetor constante.
- (d) Utilizando a equação (6-2) e as condições **iniciais** do item (b), calcule o vetor rotação instantânea **inicial**  $\vec{\omega}(0)$  do corpo.
- (e) Em seguida, simule o movimento do corpo utilizando as equações diferenciais (3-3) (equações de Euler) e adotando como condição inicial o vetor rotação instantâneo  $\vec{\omega}(0)$  determinado no item c. Compare a evolução de  $\vec{\omega}(t)$  obtida mediante a simulação das equações de Euler com a que se obteve no item b, mediante a simulação do modelo lagrangeano. Evidentemente, os resultados devem coincidir identicamente, a menos de erros numéricos desprezíveis.

**8. Referências bibliográficas**

1. Appell, P., Traité de Mécanique Rationnelle, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
2. Armitage, J.V., Eberlein, W.F., Elliptic Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
3. Bouligand, G., Mécanique Rationnelle. Librairie Vuibert, Paris, 1954.
4. Pars, L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. London: Heinemann, 1965.
5. Pèrès, J., Mécanique Général. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1962.