SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 6 - Função de Transferência Discreta e Mapeamento *s*-*z*

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Índice

- Função de Transferência Discreta
- Diagrama de Blocos
- Estabilidade
- Mapeamento $s - z$

Função de Transferência Discreta

- Equação a Diferenças

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) =$$
$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)$$

- Transformada Z

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) =$$
$$b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-m} U(z)$$

- Função de Transferência Discreta

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- Se $n \geq m$

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Função de Transferência Discreta

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)}$$

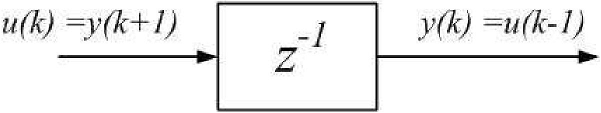
- Raízes de $b(z) = 0 \Rightarrow$ zeros $\Rightarrow z_i$
- Raízes de $a(z) = 0 \Rightarrow$ polos $\Rightarrow p_i$

- Significado físico de z

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-1} \Rightarrow Y(z) = z^{-1}U(z)$$

- Atraso de um período

$$y(k) = u(k-1)$$



- Relação entre a resposta ao pulso unitário e a Função de Transferência
- Entrada

$$u(k) = 1, \quad k = 0$$
$$u(k) = 0, \quad k \neq 0$$

- Transformada z

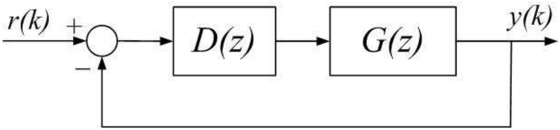
$$U(z) = 1$$

- Sendo $U(z) = 1$

$$Y(z) = G(z)$$

- A Função de Transferência Discreta de um sistema é a Transformada z da resposta deste sistema ao pulso unitário

Diagrama de Blocos



- Malha Fechada

$$MF(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

Estabilidade

- Seja o sistema

$$G(z) = \frac{z}{z - p_1} = \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}}$$

- Equação a diferenças

$$y(k) - p_1 y(k-1) = u(k)$$

Estabilidade

- Considerando $y(0) \neq 0$ e $u(k) = 0$

$$
\begin{aligned}
y(1) &= p_1 y(0) \\
y(2) &= p_1 y(1) = p_1^2 y(0) \\
&\vdots \\
y(k) &= p_1^k y(0)
\end{aligned}
$$

- Considerando $y(0) \neq 0$ e $u(k) = 0$

$$
\begin{aligned}
y(1) &= p_1 y(0) \\
y(2) &= p_1 y(1) = p_1^2 y(0) \\
&\vdots \\
y(k) &= p_1^k y(0)
\end{aligned}
$$

- $y(k)$ converge para zero se $|p_1| < 1$

ESTABILIDADE

- Função contínua: $y(t)=e^{-at}$

$$Y(s)=\frac{1}{s+a}$$

- Pólo de $Y(s)$: $p_s=-a$
- Função discreta: $y(kT_0)=e^{-akT_0}$

$$Y(z)=\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$$

- Pólo de $Y(z)$: $p_z=e^{-aT_0}$

Mapeamento $s - z$

- Relação entre os pólos

$$p_z = e^{p_s T_0}$$

- Forma geral do mapeamento

$$z = e^{sT_0}$$

- Plano z

Mapeamento $s - z$

- Seja $s = \sigma \pm j\omega$

$$
\begin{aligned}
z =& e^{(\sigma T_0 \pm i\omega T_0)} \\
=& e^{\sigma T_0}[cos(\omega T_0) \pm jsen(\omega T_0)]
\end{aligned}
$$

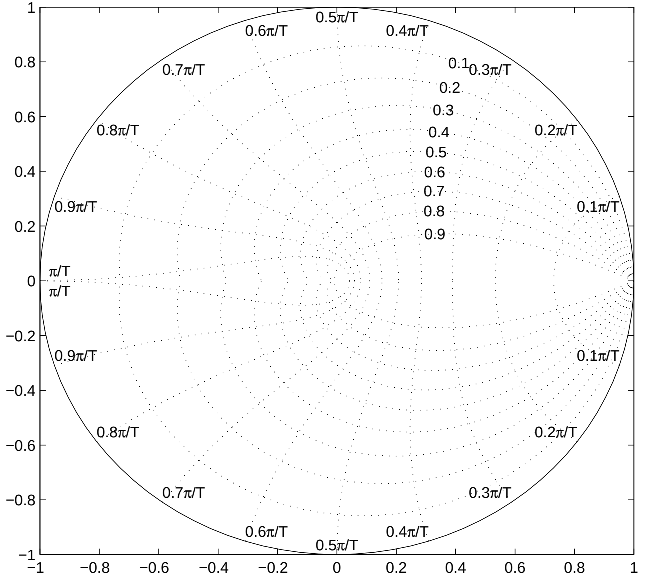
- Relações importantes

$$
|z| = e^{\sigma T_0} \qquad \angle z = \pm \omega T_0
$$

Mapeamento $s - z$

Plano s	Plano z
Eixo real negativo: $\infty < \sigma \leq 0$, $\omega = 0$	Eixo real: $0 \leq z \leq 1$
Eixo real positivo: $0 \leq \sigma < \infty$, $\omega = 0$	Eixo real: $1 \leq z < \infty$
Eixo imaginário: $-\pi/T_0 \leq \omega \leq \pi/T_0$, $\sigma = 0$	Círculo de raio 1: $\|z\| = 1$
ω constante: $\omega = c$	Reta radial: $0 \leq \|z\| \leq 1$, $\angle z = cT_0$
σ constante: $\sigma = c$	Círculo raio $0 \leq r \leq 1$: $\|z\| = e^{cT_0}$

Mapeamento $s - z$



Exercício

- A resposta de um sistema à entrada pulso unitário é dada por

$$y(k) = (\sqrt{2})^k cos(\frac{\pi}{4}k),$$

  com $T_0 = 1$ s.
- Encontre a função de transferência de malha aberta do sistema. Quais são os pólos? O sistema é estável?

Exercício

- A partir da função de transferência, encontre a equação a diferenças que descreve o sistema e a sequência de valores de $y(k)$ para a entrada pulso unitário.
- Considere o sistema em malha fechada com realimentação negativa e ganho proporcional K. Encontre K tal que o sistema é estável, com amortecimento $\zeta = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 0,6$ rad/s.