SEM 538 - Sistemas de Controle II
Aula 5 - Transformada Z

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Índice

- Função discreta

$$x(kT_0), \quad k = 0, 1, \cdots, \infty$$

- Transformada Z

$$X(z) = Z\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) z^{-k}$$

Exemplos

- Exemplo 1: $x(kT_0) = 1$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

- Série geométrica

$$f(r) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \ldots$$

- converge para $$f(r) = \frac{a}{1 - r}$$

Exemplos

- Exemplo 1: $x(kT_0) = 1$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = z^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Exemplos

- Exemplo 2: $x(kT_0) = a^{kT_0}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT_0} z^{-k} = 1 + a^{T_0} z^{-1} + a^{2T_0} z^{-2} + \cdots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = a^{T_0} z^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{T_0} z^{-1}} = \frac{z}{z - a^{T_0}}$$

Exemplos

- Exemplo 3: $x(kT_0) = e^{-akT_0}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_0} z^{-k} = 1 + (e^{aT_0} z)^{-1} + (e^{aT_0} z)^{-2} + \cdots$$

- Fazendo $a = 1$ e $r = (e^{aT_0} z)^{-1}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - (e^{aT_0} z)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

Exemplos

- Exemplo 4: $x(kT_0) = cos(kT_0)$

$$cos(\theta kT_0) = \frac{e^{jkT_0} + e^{-jkT_0}}{2}$$

- Usando o Exemplo 3

$$\begin{aligned} X(z) =& \frac{z/2}{z - e^{jT_0}} + \frac{z/2}{z - e^{-jT_0}} \\ =& \frac{z(z - cos(T_0))}{z^2 - 2cos(T_0)z + 1} \end{aligned}$$

Exercícios

- Calcule a Transformada Z das seguintes funções discretas

  1. $x(kT_0) = kT_0$
  2. $x(kT_0) = sen(kT_0)$
  3. $x(kT_0) = e^{-akT_0} cos(kT_0)$
  4. $x(kT_0) = 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0, \cdots$

Propriedades

- Superposição (linearidade)

$$Z\{\alpha x_1(kT_0) + \beta x_2(kT_0)\} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- Deslocamento para a direita

$$Z\{x(k-d)\} = z^{-d}X(z)$$

Propriedades

- Deslocamento para a esquerda

$$Z\{x(k+d)\} = z^d \left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(q) z^{-q} \right]$$

- Exemplos:

$$\begin{aligned} Z\{x(k+1)\} =& z[X(z) - x(0)] \\ Z\{x(k+2)\} =& z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] \end{aligned}$$

Propriedades

- Amortecimento

$$Z\{x(kT_0)e^{-akT_0}\} = X(ze^{aT_0})$$

- Teorema do Valor Inicial

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Propriedades

- Teorema do Valor Final

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

- Exemplo: $X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)}$

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{2z}{(z-1)(z-0,5)} = 4$$

Transformada Z Inversa

- Método da Expansão em Frações Parciais

$$X(z) = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{z-a} + \frac{Dz}{z^2+cz+d} + \cdots$$

- Solução

$$x(k) = A + Bk + Ca^k + De^{-a_1 k} sen(\theta_1 k) + \cdots$$

- Exemplo: $X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)}$

$$X(z) = \frac{4z}{z-1} + \frac{-4z}{z-0,5}$$

- Solução

$$x(k) = 4 - 4.0,5^k = 4(1 - 0,5^k)$$

- Método da Divisão

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

- Divisão

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \left| \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \ldots} \right.$$

Transformada Z Inversa

- Como

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

$$\begin{aligned} x(0) &= c_0 \\ x(1) &= c_1 \\ x(2) &= c_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Exemplo: $X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{2z}{z^2-1,5z+0,5}$

$$2z \left| \frac{z^2 - 1,5z + 0,5}{0 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3,5z^{-3} \ldots} \right.$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 2 \\ x(2) &= 3 \\ x(3) &= 3,5 \end{aligned}$$

- Exemplo

$$y(k+1) + 2y(k) = u(k), \quad y(0) = 1$$

- Transformada Z

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = U(z)$$

- Sendo $u(k) = 1$ (degrau unitário) e $y(0) = 1$

$$zY(z) - z + 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

- Isolando $Y(z)$ e fatorando

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{2}{3}\frac{z}{z+2}$$

- Solução

$$y(k) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}.(-2)^k$$

Exercícios

- Encontre a solução das equações a diferenças usando a Transformada Z

1. $y(k+1) - y(k) = 2^k$

   com $y(0) = 1$

2. $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = u(k+1) + 2u(k)$

   com $y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ u(k) = -2^k$