SISTEMAS LINEARES (RESUMO)

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Bigg\} S$$

(*) SISTEMA COM m equações e n incógnitas

DEF: Dizemos que um sistema linear é homogêneo se $b_1 = \cdots = b_m = 0$

DEF: Uma n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma SOLUÇÃO do sistema (*) se ela é solução de todas as equações do sistema, isto é

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

OBSERVAÇÃO

Um sistema homogêneo tem sempre a solução trivial que é a n-upla $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ pois

$$a_{i1}0 + a_{i2}\cdot 0 + \cdots + a_{in}0 = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

DEF: Dois sistemas lineares S e S' são EQUIVALENTES se eles têm exatamente as mesmas soluções.

O Método de Eliminação de Gauss

OPERAÇÕES ELEMENTARES NAS EQUAÇÕES DO SISTEMA:

(1) Trocar a equação (i) pela equação (j);

(2) Multiplicar uma equação por um número real $\neq 0$;

(3) Substituir a equação (i) por ela mesma + (ou menos) um múltiplo de uma equação (j).

DEF: Uma matriz está na forma escalonada reduzida se todos os pivôs são iguais a 1 e todos elementos da coluna que contém o pivô (diferentes do pivô, é claro) são iguais a 0.

Observação: A forma escalonada reduzida de uma matriz é única, mas a forma escalonada NÃO é única.

FORMA ESCALONADA REDUZIDA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FORMA ESCALONADA

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear:
É classificar o sistema como incompatível, compatível e indeterminado ou compatível e determinado.

Resolver um sistema linear:
É encontrar o conjunto de das soluções do sistema.

(1) Se no processo de escalonamento obtivermos uma equação $0x_1 + \dots + 0x_n = b$, $b \neq 0$ então o sistema é inconsistente.

(2) Se a matriz escalonada do sistema for

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{array}\right]$$

pivô pivô pivô

(nº de incógnitas = nº de pivôs), então o sistema é consistente e determinado (Tem uma única solução)

Se temos o sistema S, o conjunto

$\mathcal{S} = \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $(s_1, \dots, s_n)$ é sol. de $S\}$

↳ conjunto de todas as soluções do sistema S

EXERCÍCIO Mostrar que as operações (1), (2) e (3) não alteram o conjunto solução do sistema S (E portanto, transformam o sistema S em um sistema S', equivalente a S.)

O objetivo do Método de Eliminação de Gauss é transformar o sistema S em um sistema equivalente a ele e que será mais fácil de resolver.
(*) usando as operações elementares

Vamos trabalhar só com a "matriz" do sistema
(para escrever menos)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matriz aumentada do sistema S

DEF: Uma matriz está na forma escalonada se

(1) As eventuais linhas nulas estão abaixo das linhas não nulas.

(2) O primeiro elemento não nulo de uma linha é chamado pivô e aparece mais à direita do que os pivôs das linhas acima dela.

(3) Se uma linha contém um pivô, então todos os elementos da coluna em que está o pivô e abaixo dele são iguais a zero.

(3) Se a matriz escalonada ficar do tipo

$$\begin{array}{l} a_{11} \ldots a_{1r_1} \ldots a_{1r_2} \;-\; -\; -\; -\; a_{1n} = b_1 \\ \quad a_{2r_1} \;-\;-\;-\;-\;-\;-\; a_{2n} = b_2 \\ \quad - \;-\; -\; -\; -\; -\; - \\ \quad\quad -\;-\;-\;-\; a_{pr_p} \ldots a_{pn} = b_p \end{array}$$

pivô, pivô, pivô

com $p < n$ então o sistema é consistente e indeterminado.

(nº de pivôs < nº de variáveis)

nº de variáveis livres = nº de variáveis - nº de pivôs

Note que um sistema consistente é determinado $\Longleftrightarrow$ não tem variáveis livres, isto é, o número de incógnitas = nº de pivôs.

SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Todo sistema homogêneo é compatível.

OBSERVAR QUE:

Se um sistema homogêneo tem mais incógnitas do que equações $(n > m)$ então ele terá infinitas soluções.

(Teria no máximo 1 pivô em cada linha, mas o nº de linhas < nº de variáveis e assim vão sobrar variáveis livres ...)

Esse resultado é super importante em Álgebra Linear, como vocês vão ver!

TEOREMA: Todo sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações admite soluções não triviais.

Exercício 7 (a) da Lista 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & (1-a) & -2 & 2-2a \\ 2 & 3 & -(2+a) & 1 \end{array}\right]$$

MATRIZ DO SISTEMA

Escalonando a matriz

$$\begin{array}{l} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \\ L4-2L1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \\ 0 & -a & -2+a & 2-2a \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L3+aL2 \\ L4-L2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -2+a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Na terceira linha haverá 1 pivô se

$a^2-a-2 \neq 0$. ($a^2-a-2=0 \iff a=2$ ou $a=-1$.)

(1) Assim, se $a \neq 2$ e $a \neq -1$ teremos um pivô na terceira linha e o sistema é compatível e determinado

(2) Se $a=-1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

incompatível

(3) Se $a=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

compatível e indeterminado

solução:

$y = 1$

$x + y - 2z = 0$

$x = -1 + 2z$

$\mathcal{S} = \{(-1+2z, 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

(é uma reta em $\mathbb{R}^3$)