MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 1

1. Integrais Impróprias

1. Determine se cada integral imprópria abaixo é convergente e, em caso afirmativo, calcule-a.

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\cos x+1}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\cos x\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\,dx$ i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

j) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec x-\tan x)\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int_{1/e}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$ n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ q) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ r) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ t) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\ln x)\,dx$ u) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

v) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ w) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$ x) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

2. Estude a convergência das seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^5+3x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^3(\cos^2 x+1)}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{xe^x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{e^x}\,dx$ i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{x^2}}\,dx$

3. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x-1)}$. Em seguida, use o Critério da Comparação para mostrar que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^2 \ln(\ln x)\,dx$ é convergente.

4. A função $\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ é chamada de *função gama.*

a) Mostre que Γ está bem definida, isto é, que a integral imprópria acima é convergente para todo $s > 0$. (*Sugestão:* analise separadamente os casos $0 < s < 1$ e $s \geq 1$. Lembre-se que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^s e^{-x} = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.)

b) Usando integração por partes, mostre que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ para todo $s > 0$.

c) Mostre, por indução, que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo número inteiro $n \geq 1$.