Física IV (IF 2023)
Aula 2

- Objetivos de aprendizagem:
  - Obter as soluções mais simples possíveis para as equações de Maxwell na ausência de cargas e correntes (as que dependem somente de uma coordenada e do tempo).
  - Obter a relação entre a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas e as constantes do eletromagnetismo.
  - Determinar a transversalidade da solução na forma de ondas progressivas.
  - Descrever uma onda eletromagnética plana
  - Descrever uma onda eletromagnética plana monocromática

Eqs. Maxwell no “espaço livre”

- No vácuo (sem condutor, semicondutor, ou dielétrico) e sem cargas e correntes

$$\rho = 0\,, \vec{J} = 0$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

Onda E.M. “longe” de cargas e correntes

$$\rho=0\,,\vec{J}=0$$

Dependência em uma só dimensão espacial e no tempo

$$\vec{E}=E_x(z,t)\,\hat{i}\ \ [\mathrm{e}\ \vec{B}=B_y(z,t)\,\hat{j}\,]$$

Existiriam soluções das 4 eqs. Maxwell com essas características?
→ Substituir nelas.

Obs.: campos E e B são transversais e perpendiculares entre si.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Outras obs.:
→ E_x exige um B_y não trivial (cte.)
→ B_y exige um E_x não trivial (só)
→ Equação de onda

Equação de onda/onda E.M.

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Sendo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Equação de onda em 1D

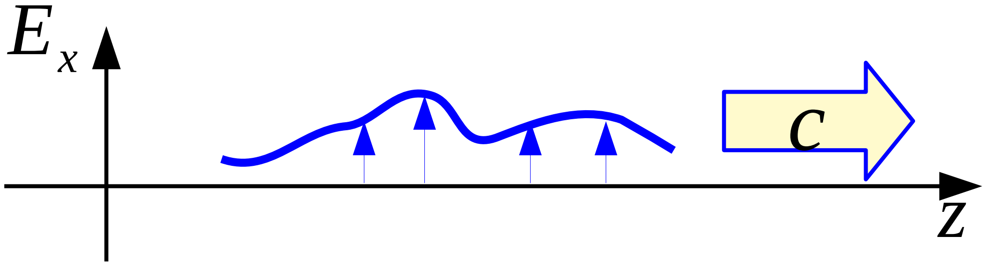
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854188\ldots \times 10^{-12}}} = 2.99792\ldots \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

Soluções da eq. de onda

- Geral: $u(z,t)=F(z-ct)+G(z+ct)$
- Ondas progressivas $E_x(z,t)=E_x(z-ct)$



→ Mostrar relações entre as derivadas parciais no espaço e no tempo, e entre os campos elétrico e magnético.

Relações (para a solução proposta)

Eqs. Maxwell → $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$ $\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t}$

Ondas progressivas: $E_x(z,t) = E_x(z-ct)$ $\zeta = z - ct$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

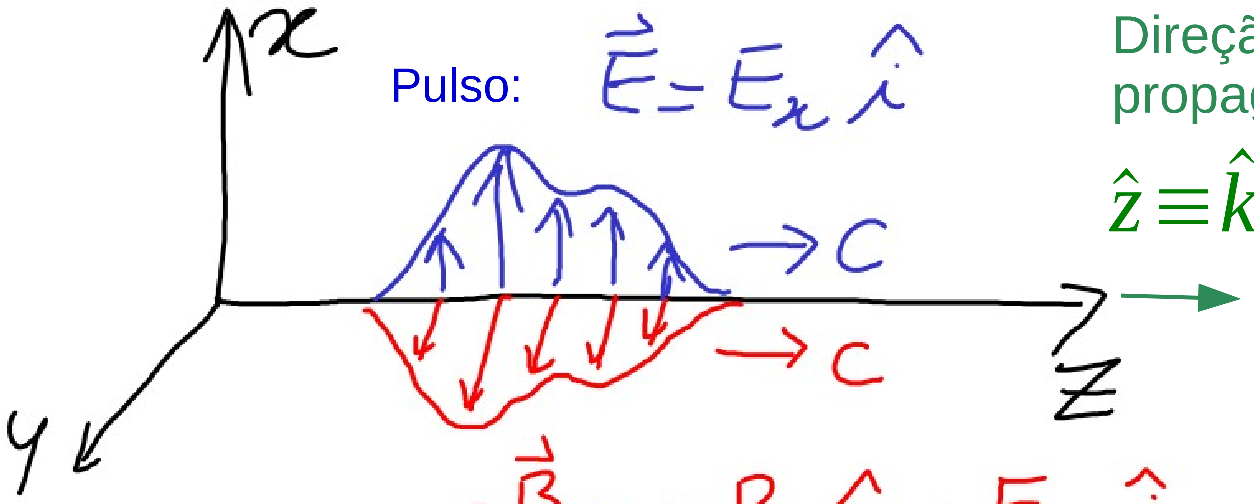
$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B_y(z,t) = \frac{1}{c} E_x(z,t)$$

~~(+cte)~~

Geometria dessa solução

$$c\,B_y(z-ct)=E_x(z-ct)$$

Pulso: $\vec{E}=E_x\,\hat{\imath}$



$$c\vec{B}=c\,B_y\,\hat{\jmath}=E_x\,\hat{\jmath}$$

Direção de propagação:

$$\hat{z}\equiv\hat{k}$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{z}}{c}\times\vec{E}$$

(mais geral do que parece aqui)

Generalizando para uma direção qualquer

- Rotação em torno do eixo z (já que a orientação dos eixos é arbitrária). O campo elétrico pode ser orientado na direção y, por exemplo. Nesse caso o campo magnético (correspondente) estaria na direção -x.
- Podemos superpor soluções, de modo que o campo elétrico pode ter as duas componentes (x e y). O magnético resultante continuaria sendo perpendicular.
- A direção da propagação (z) é arbitrária (poderia ser x, y, ou em uma direção qualquer, intermediária)

Direção de propagação: $\hat{u}$

$$\vec{B} = \frac{\hat{u}}{c} \times \vec{E}$$

Obs.: trata-se de uma onda progressiva (não é totalmente geral). Podem haver outras soluções, como ondas estacionárias, por exemplo.

Exemplo de dependência espacial/temporal da solução

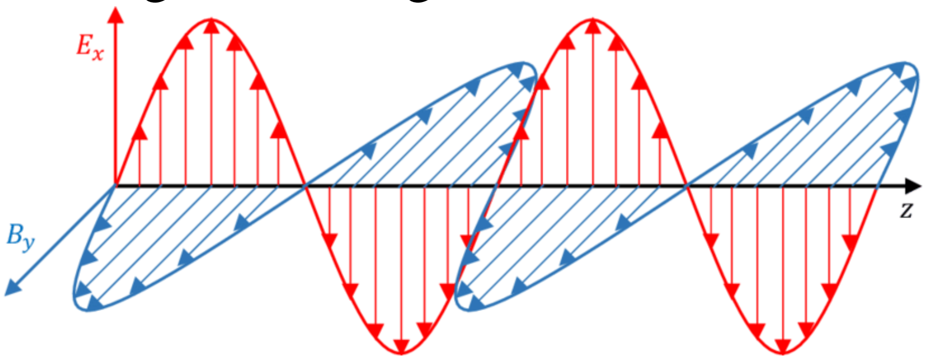
- Onda harmônica (monocromática) progressiva se propagando na direção z.

$$\vec{E}(z-ct)=E_0\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{x}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{z}}{c}\times\vec{E}=\frac{1}{c}E_0\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{y}$$

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$



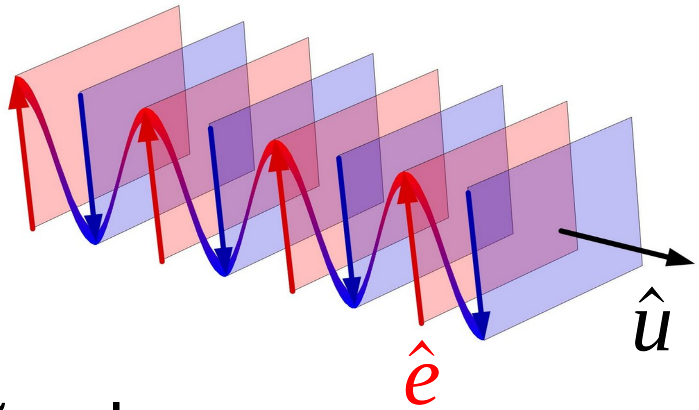
https://external-preview.redd.it/ghERjlthmB32BREAg_-GgDQghTj_Fv6fWyQgIDw1JpE.gif?format=mp4&s=e03f90b6915b3c6d3d0c7d4cdbf518b568d410fd

Generalizando para qualquer direção de propagação

- Onda plana monocromática na direção $\boldsymbol{\hat{u}}$.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=E_0\hat{e}\cos(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\delta)$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{u}}{c}\times\vec{E} \qquad \vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{u} \qquad \hat{e}\perp\hat{u}$$



- As frentes de onda (fase constante) são planos perpendiculares à direção de propagação