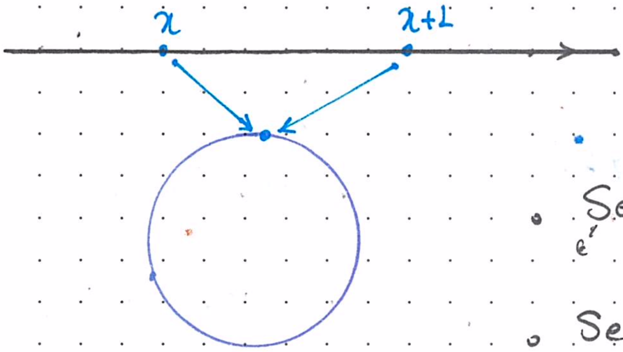
MAP5925 - Intro aos Sistemas Dinâmicos

Aula 15

- $\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$
  $\pi(x) = x - \lfloor x \rfloor$

como são os homeomorfismos de S^1? (que preservam orientação)



- Sentido "positivo" no círculo é definido em termos da reta

- Se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua satisfaz

$$\pi \circ G = g \circ \pi \quad (\text{levantamento})$$

$$\Rightarrow G(\tilde{x}+1) = G(\tilde{x}) + k, \quad k \in \mathbb{Z}, \ \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}$$

- Este $k \in \mathbb{Z}$ é o grau de g (Obs. k não depende de G, só de g)
  - Exercício Se o grau de g é diferente de ± 1, então g não é homeomorfismo, e, se g é homeomorfismo e tem grau -1, então g reverte orientação.

- g homeomorfismo que preserva orientação
  $\Rightarrow G(1 + \cdot) = G(\cdot) + 1$ $\forall$ levantamento G

- Lema. Se $g : S^1 \circlearrowleft$ homeo que preserva orientação e G_1, G_2 são levantamentos $\Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z}$ t.q. $G_2 = G_1 + p$.

ps

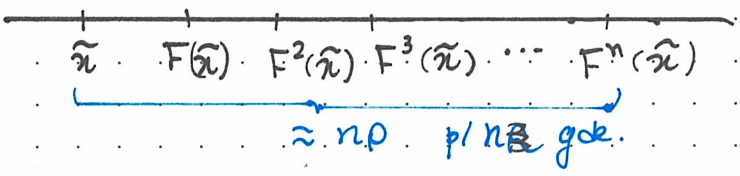
- **Prop.** Seja $f: S^1 \circlearrowleft$ homeo que preserva orientação, F levantamento de $f \Rightarrow \exists\ \rho \in \mathbb{R}$ (dependendo só de F) t.q.:

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n} = \rho(F),$$

o número de rotação de F.

- **Exercício** Suponha que f não possui pto. periódico. Dado $q \in \mathbb{Z}$, seja $p \in \mathbb{Z}$ t.q.:

$$p < F^q(0) < p+1.$$



Mostre que $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. $\limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n} < \frac{p+1-\varepsilon}{q}$

- **Teorema.** $\rho \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f$ possui pto. periódico

- **Exercício** F_1, F_2 levantamentos de $f \Rightarrow \rho(F_1) - \rho(F_2) \in \mathbb{Z}$

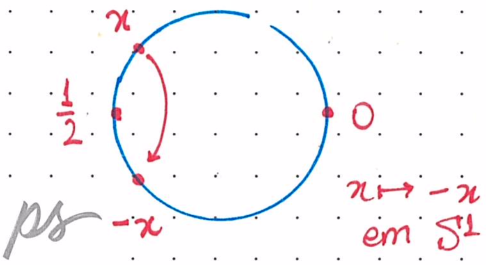
- **Def** Nº de rotação de Poincaré: $\rho = \pi(\rho(F))$

- **Lema.** Nº de rotação é invariante por conjugação topológica.

Aula 16

- **Exercício** $\text{grau}(E_m) = m$

- **Exemplo** h reverte orientação, onde $h: S^1 \to S^1$
$h(x) = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$



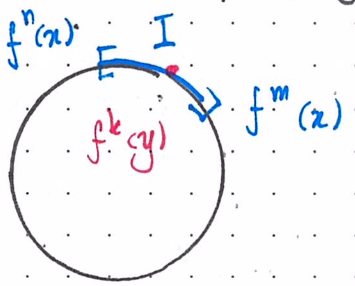
O $\tilde{x}$ é fixo p/ h.

- **Exercício resolvido** $f: S^1 \circlearrowleft$ homeo de grau $-1 \Rightarrow f$ tem ao menos um pto. fixo

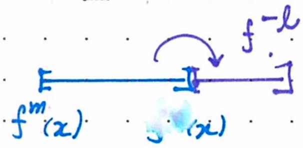
• **Exercício** Se f tem grau d_1 e g tem grau d_2
$\Rightarrow f \circ g$ tem grau $d_1 d_2$.

Em particular: f homeo que reverte orientação $\Rightarrow f^2$ homeo que preserva orientação, com pto. fixo

• **Lema** $\rho(f) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall\, x, y \in S^1\ \forall\, m > n$ em $\mathbb{Z}$ $\exists\, k > 0$ t.q. $f^k(y) \in [\, f^m(x), f^n(x)\,]$.



$\bigcup_j f^{-j}(I) = S^1$ ou $\bigcup_j f^{-jL}(I) \neq S^1$,
$L = m - n$



$\Rightarrow f^{n-kL}(x) \to \underbrace{\bar{x}}_{}$
L-periódico

$\Rightarrow \rho(f) \in \mathbb{Q}$, contradição!

• **Corolário 1** $\rho(f) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall\, x, y \in S^1$, $\omega_f(x) = \omega_f(y)$.

• **Corolário 2** $\rho(f) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou } \omega(x) = S^1 \\ \text{ou } \omega(x) \text{ é um conjunto de Cantor} \end{cases}$

(e $\rho(f)$ sempre é perfeito)

• **Roteiro:** ① $z \in \omega(x) \Rightarrow z \in \omega(z) \Rightarrow z = \lim_k \underbrace{f^{n_k}(z)}_{\text{distintos de } z \text{, em } \omega(x)}$

$\Rightarrow$ **perfeito**

② $\partial\omega(x)$ invariante e fechado
$\Rightarrow$ **$\omega(z) = \partial\omega(x)$ se $\partial\omega(x) \neq \emptyset$** //

. **Corolário 3** $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ e f transitivo $\Rightarrow$ f minimal

∘ **Lema** $r = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Se F é um levantamento de f, então, $\forall\, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$:

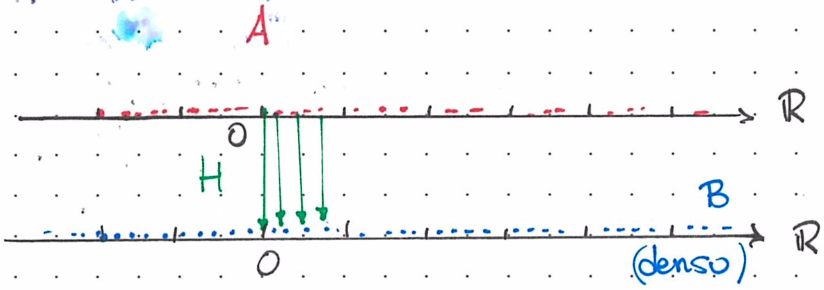
$$r m_1 + n_1 \leq r m_2 + n_2 \iff F^{m_1}(x) + n_1 \leq F^{m_2}(x) + n_2$$

(prova por contradição)

∘ **Teorema** Se $\rho(f) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f$ é semi-conjugada a $R_{\rho(f)}$. Além disso, é conjugada $\iff f$ é transitiva

Roteiro: $\begin{cases} A = \{ F^n(0) + m : m, n \in \mathbb{Z} \} & \text{em } \mathbb{R} \\ B = \{ mr + n : m, n \in \mathbb{Z} \} \end{cases}$

$= \pi^{-1}[O_f(0)]$



$H : A \to B$ bijeção crescente

$$H(y) = \sup_{\substack{z \in A \\ z < y}} H(z) = \inf_{\substack{z \in A \\ z > y}} H(z)$$

$\Rightarrow$ H é contínua

. **Exercício**: Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não decrescente e não contínua $\Rightarrow$ o complemento de sua imagem contém um intervalo de int. $\neq \emptyset$.

$\boxed{\text{Aula 17}}$

Prova: objetivos de aprendizagem -

1) Hodômetro (exemplo novo)

2) Expansividade

ps (tem uma resolução "mínima" que permite diferenciar ptos. distintos sorteados ao acaso)

- Sobre expansividade: • O shift bilateral (Σ_2, σ) é expansivo, mas ñ é positivamente expansivo.

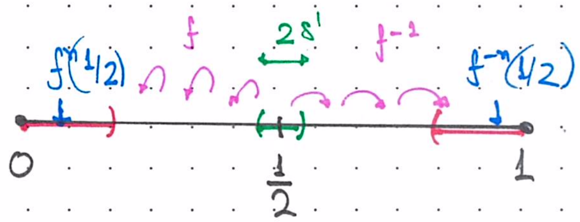
• Exemplo de que homeos conjugados podem ñ ser ambos expansivos qdo. o espaço ñ é cpto: $f(x) = 2x = g(x)$, $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(Y, \bar{d}) = (\mathbb{R}, \bar{d})$, onde:

$$\bar{d}(x,y) = \left| \int_x^y e^{-s^2} ds \right| \quad \text{(item c do exercício 2)}$$

$\Rightarrow$ o resultado de expansividade p/ a ferradura Λ segue da expansividade do shift.

• P/ o gato de Arnold é preciso tomar cuidado com $\frac{1}{4} < d(A^n z_0, A^n z_1) < \frac{1}{2}$

• P/ a função quadrática $f(x) = x^2$, dado $x_0 = 1/2$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\begin{cases} f^n(1/2) < \delta/2 \\ f^{-n}(1/2) < 1 - \frac{\delta}{2} \end{cases}$, se $n > n_0$



continuidade + nº finito de iterados $\Rightarrow \exists\, \delta' > 0$ t.q.:

$$|x - 1/2| < \delta' \Rightarrow |f^j(x) - f^j(x_0)| < \frac{\delta}{2}, \quad |j| < n_0$$

$\Rightarrow$ ñ é expansivo!

- Exercício: $f: [0,1] \circlearrowleft$ homeo fixando 0 e 1 $\Rightarrow$ f não é expansiva.

- Fator expansivo $\not\Rightarrow$ extensão expansiva:

$f: \Sigma_2 \times [0,1] \circlearrowleft$, $f = \sigma \times Id$ é extensão do fator expansivo σ, mas não é expansiva.

- Extensão expansiva $\overset{?}{\Rightarrow}$ fator expansivo ?/ Talvez não pois podemos ter algo fortemente expansivo, mas apenas sobre as fibras

- Hodômetro: - Ñ tem ptos periódicos, pq os primeiros n dígitos ñ se repetem antes de 2^n iterações.
  - Nesse intervalo, todas as 2^n strings de 0's e 1's são varridas ⇒ o hodômetro é transitivo (todo pto. tem órbita densa) e minimal.

Aula 18

- Ideia (errada) da extensão expansiva $\not\Rightarrow$ fator expansivo:

$$\Sigma_+^2 \times \left(\{\tfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}\right), \quad \left(u, \tfrac{1}{n}\right) \mapsto \left(\phi_n(u), \tfrac{1}{n}\right),$$

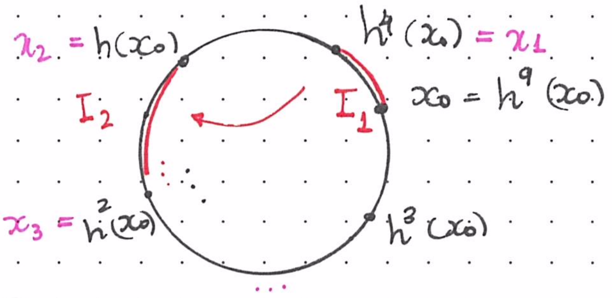
onde $\begin{cases} \phi_n(u_0\, u_1\, u_2 \dots) = (u_1 \dots \tilde{u}_n \dots) \\ \tilde{u}_n \neq u_n \end{cases}$ (shift + troca do n-ésimo símbolo)

como extensão de Id em $\{\tfrac{1}{n}\} \cup \{0\}$.

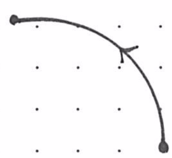
- Hodômetro é um sistema transitivo, mas não mixing, que não é extensão de R_α. (de fato, minimal)

(ou seja, são "fundamentalmente" diferentes - o hodômetro é um exemplo "novo")

- $\rho(h) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ dinâmica de intercâmbio de intervalos $I_1 \to I_2 \to \dots \to I_{q-1} \to I_1$



- Dinâmica de h^q: monótona entre ptos. periódicos



ps

Exercício $A = \{ H^n(0) + m : n, m \in \mathbb{Z} \}$ e $B = \{ n\alpha + m : m, n \in \mathbb{Z} \}$, onde $\alpha = \rho(h) \notin \mathbb{Q}$ e H é um levantamento de h.
Definimos:

$$\pi : A \to B$$
$$\pi(H^m(0) + n) = m\alpha + n$$

Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}$, sejam: $\begin{cases} A^-_{\bar{x}} = \{ y \in A : y < \bar{x} \} \\ A^+_{\bar{x}} = \{ y \in A : y > \bar{x} \} \end{cases}$

$\Rightarrow$ a extensão $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

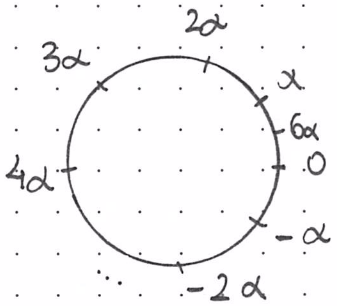
$$\pi(\bar{x}) = \sup_{y \in A^-_{\bar{x}}} \pi(y) = \inf_{y \in A^+_{\bar{x}}} \pi(y)$$

é uma função não decrescente e $\pi(\mathbb{R})$ tem imagem densa. Portanto, contínua e sobrejetiva.

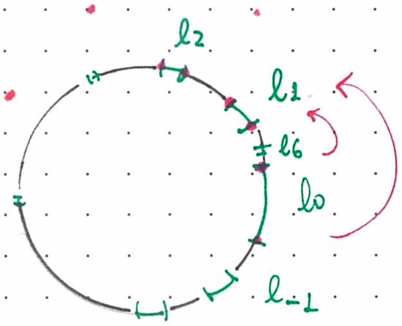
- **Exercício** $\pi(x+1) = \pi(x) + 1$ e $\pi \circ H = R_\alpha \circ \pi$.

- **Exercício** Quando π é estritamente crescente, é um homeomorfismo.

- Exemplo de Denjoy C^0



$\sum_{k \in \mathbb{Z}} l_k = 1$



- l_k chega perto de si mesmo, mas nunca dentro $\Rightarrow$ essa dinâmica não é minimal, e possui intervalos errantes, e nº de rotação α.

- **Exercício** Ler a demonstração de que esta construção pode ser feita C^1.

- Teorema de Denjoy. Se $h: S^1 \to S^1$ é um difeomorfismo C^2 que preserva orientação e $\rho(h) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow h$ é minimal.

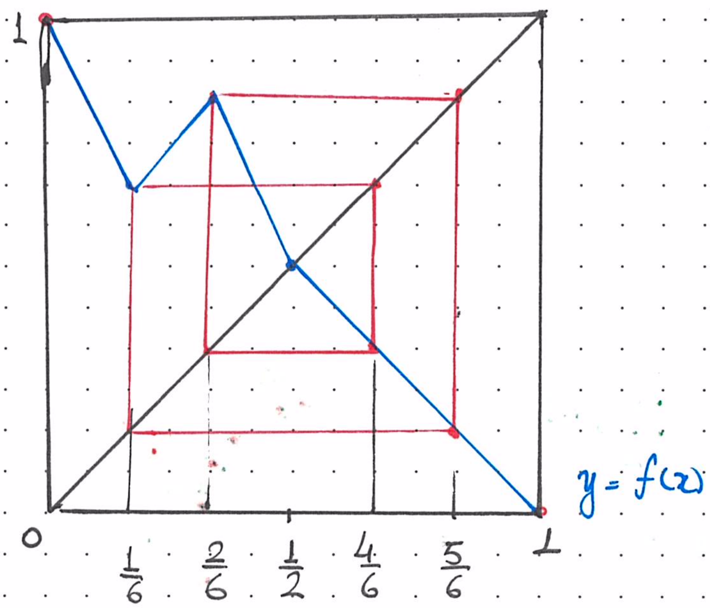
(num mundo "puramente suave" ∄ outros fenômenos além da rotação irracional)

Aula 19

- "(X,f), (Y,g) homeos de E.Ms. cptos, (X,f) expansivo e (Y,g) fator de $(X,f) \Rightarrow (Y,g)$ é expansivo?" Segue em aberto.

- Já sabemos: pto periódico $\Rightarrow$ pto fixo (p/ funções reais)

- Exemplo $f: [0,1] \to [0,1]$



$f(0) = 1$, $f(1) = 0 \Rightarrow 0$ é pto periódico de período 2

$1/2$ é pto fixo.

$1/6$ é pto periódico de período 4.

Veja que todo pto periódico por $f \Rightarrow$ tem que ter período par: $f([0, 1/2)) \subset (1/2, 1]$.

- Teorema de Li Yorke: $f: I \to I$ tem pto periódico de período mínimo 3 $\Rightarrow$ f tem pto periódico de período mínimo de qqer período ("3 implica caos")

- Caso particular de um teorema + geral.

ps

- **Ordem de Sharkovskii**

$1 \prec 2 \prec 4 \prec 8 \prec 16 \prec \cdots \prec 2^n \prec 2^{n+1} \prec \cdots$

$\cdots \prec \cdots$

$\cdots \prec 2^{n+1}9 \prec 2^{n+1}7 \prec 2^{n+1}5 \prec 2^{n+1}3 \prec \cdots$

$\cdots \prec 2^n 9 \prec 2^n 7 \prec 2^n 5 \prec 2^n 3 \prec \cdots$

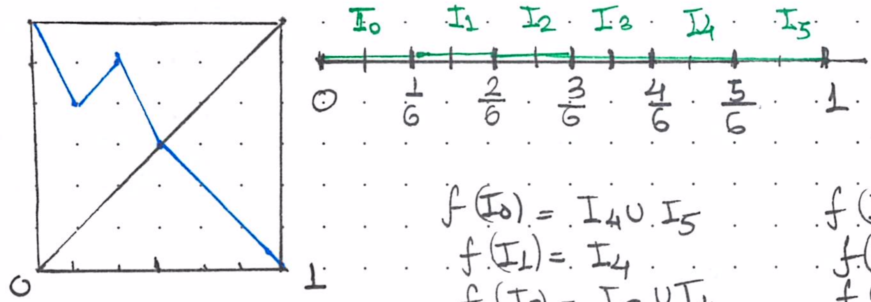
$\cdots \prec 18 \prec 14 \prec 10 \prec 3 \prec \cdots$

$\cdots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3.$

- **Teorema de Sharkovskii** Se $f: I \to I$ tem um pto de período mínimo k e $q \prec k \Rightarrow f$ tem um pto. periódico de período mínimo q.

- $\forall\ q_1 \prec q_2\ \exists\ g: [0,1]$ tendo pto. com período mínimo q_1, mas não q_2.

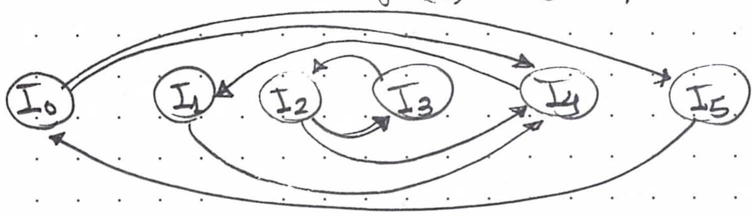
- **No exemplo**



$f(I_0) = I_4 \cup I_5$ $\qquad f(I_3) = I_2$

$f(I_1) = I_4$ $\qquad f(I_4) = I_1$

$f(I_2) = I_3 \cup I_4$ $\qquad f(I_5) = I_0$



$\Rightarrow$ pelo grafo vemos que todos os pontos periódicos têm que cumprir um itinerário do tipo  (por isso períodos 2^k).

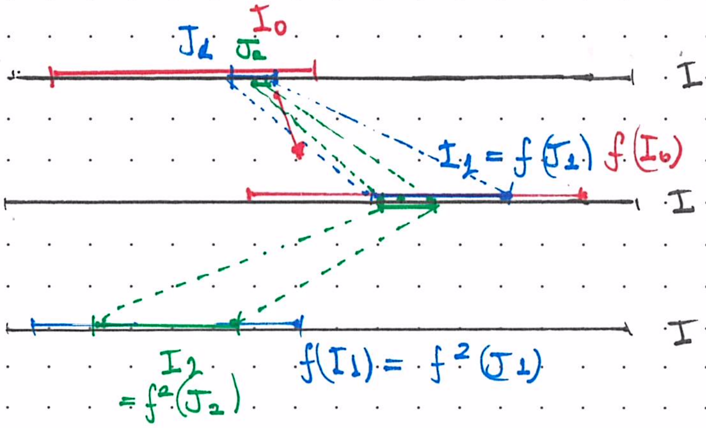
ps

Fixada $f: I \to I$ contínua, I compacto, intervalo

- I_1 cobre I_2 se $f(I_1) \supset I_2$

- **Lema** $(I_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ seq. de intervalos cptos em I, t.q. I_j cobre I_{j+1} $\Rightarrow \exists\, x \in I$ t.q. $f^j(x) \in I_j$.

Além disso se p/ algum $n>0$, $I_n = 0 \Rightarrow \exists\, y$ t.q. $f^n(y) = y$ e $f^j(y) \in I_j$, $0 \leq j < n$.



$x \in \cap J_k \Rightarrow f^k(x) \in I_k$

e cada J_k é construído por indução:

Assumimos que $\exists$ $J_k \subset I_0$ intervalo cpto t.q. $f^\ell(J_\ell) = I_\ell$ p/ $0 \leq \ell \leq k$.

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \Rightarrow \exists \begin{cases} c'_{k+1} \\ d'_{k+1} \end{cases} \text{em } J_k \text{ t.q. } \begin{cases} f^{k+1}(c'_{k+1}) = a_{k+1} \\ f^{k+1}(d'_{k+1}) = b_{k+1} \end{cases}$$

1º suponho $c'_{k+1} < d'_{k+1}$.

Exercício $d_{k+1} = \min \{ y \in J_k : f^{k+1}(y) = b_{k+1} \text{ e } y > c'_{k+1} \}$

$c_{k+1} = \sup \{ y \in J_k : y < d_k \text{ e } f^{k+1}(y) = a_{k+1} \}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{k+1}([c_{k+1}, d_{k+1}]) = I_{k+1} \\ [c_{k+1}, d_{k+1}] \subset J_k \end{cases}$$

(isso termina a indução). ▨

ps

∘ Ideia da prova do Li-Yorke: $\{x_0 < x_1 < x_2\}$ a órbita

Sempre se pode supor: $\begin{cases} x_0 < f(x_0) \\ \text{e} \\ x_0 < f^2(x_0) \end{cases}$

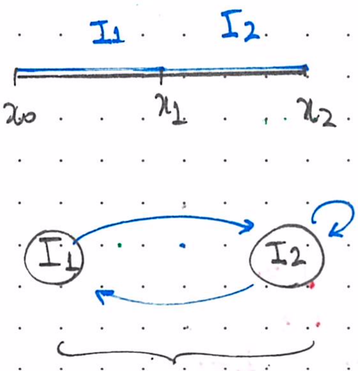
(ou seja, chamamos de x_0 o menor pto. da órbita)

$\Rightarrow$ 2 casos

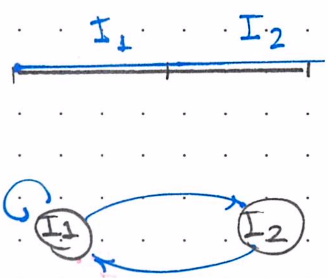
1º $f(x_0) = x_1$
$f^2(x_0) = x_2$

ou

2º $f(x_0) = x_2$
$f(x_2) = x_1$



usando o lema sobre coberturas



período mínimo $q > 3 \Leftrightarrow$ itinerário $I_1, (q-1) \times I_2, I_1$ de novo.

(+ precisa observar que o único pto. em $I_1 \cap I_2$ está na órbita de período 3) ☒

∘ Em geral, a ordenação de uma órbita implica uma grande quantidade de info (o grafo tem + informação do que só o enunciado do teorema).

Aula 20

Até aqui: dinâmica contínua
Agora: teoria ergódica

∘ Revisão de espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$

∘ Ideia de σ-álgebra gerada

ps

• $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos borelianos de um espaço métrico X

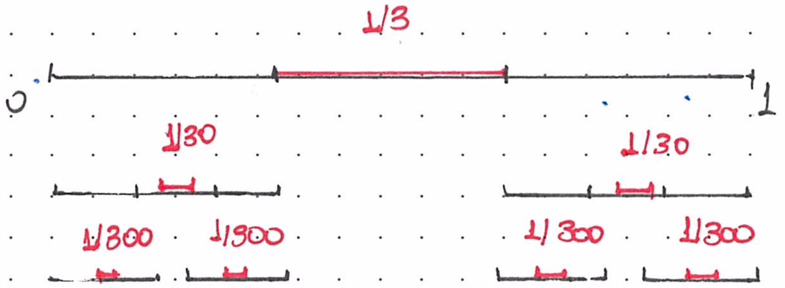
• **Exemplos:** • medida de contagem em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

• medida de Lebesgue λ em $\mathbb{R}$ ou $[0,1]$, definida na σ-álgebra dos borelianos:

$$A \in \mathcal{B} \Rightarrow \lambda(A) = \inf_{\substack{A \subset \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \text{ aberto}}} \lambda(\mathcal{O}) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ cpto.}}} \lambda(K)$$

Exercício. C conjunto de Cantor ternário $\Rightarrow \lambda(C) = 0$

C' o conjunto construído assim:



⋮

$\Rightarrow \mu(C') > 0$.

• $A \subset X$ é de medida total se $\mu(A^c) = 0$.

• **Exemplo** Os números de Liouville formam um conjunto genérico, de medida nula:

$$L = \{ x \in \mathbb{R} : \forall\, n > 0 \;\exists\; p_n, q_n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n} \}$$

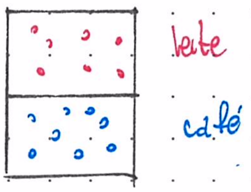
• Def. de $T: X \to Y$ mensurável, p/ $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$

ps

- Def. de transformação que preserva medida e de sistema dinâmico mensurável $(T, (X, \mathcal{A}, \mu))$.

Exercício $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida com $\mu(X) = a < \infty$ $\Rightarrow$ $\bar{\mu} : \mathcal{A} \to [0,1]$ dada por $\bar{\mu}(A) = \mu(A)/a$ define um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \bar{\mu})$. Se T preserva $\mu \Rightarrow T$ preserva $\bar{\mu}$.

- Teorema de recorrência de Poincaré $T: X \to X$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de probabilidade. Se $\mu(A) > 0 \Rightarrow$ qtp de A retorna ∞'s vezes a A.



- Exemplo

esta situação se repete ∞s vezes segundo o teorema (mas temos que esperar a idade do universo!)

- Exemplo $f: [0,1] \to [0,1]$

$f(x) = \frac{x}{2}$

$A = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

$\Rightarrow$ A nunca retorna a si mesmo (mas f ñ preserva medida)

Exercício Sabendo que $\mu(A \setminus \{T^{-i}(A), i \geq 1\}) = 0$, terminar a prova do teorema da recorrência. (ou seja, quase todo pto de A retorna ao menos uma vez)

Aula 21

- Def. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é completo se

$D \subset B$, $B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = 0 \Rightarrow D \in \mathcal{A}$

Exercício $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pode ser extendido a um espaço de medida completo $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$

ps

- Isomorfismo entre espaços de medida, e noção de fator / extensão no sentido mensurável.

Exercício $E_2 : S^1 \to S^1$ preserva a medida boreliana δ_0 e δ_0 - qtp. de S^1 é fixo.

- Deff $(X, \mathcal{B}, \mu)$ medida boreliana em (X, d)

$$\text{supp } \mu = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0,\ \mu(B_\varepsilon(x)) > 0\}$$ (suporte de μ)

Exercício X cpto. $\Rightarrow \mu(\text{supp } \mu) = \mu(X)$.

- **Teorema** $T: X \to X$ cpto. contínua preserva $\mu \Rightarrow$ $\text{supp } \mu \subset \overline{R(T)}$ (recorrentes são densos em $\text{supp } \mu$)

(usa separabilidade)

- Em particular, $\text{supp } \mu \subset \Omega(f)$

- **Teorema de Krylov - Bogolyubov** Se X é em cpto e $T: X \to X$ é contínua $\Rightarrow \exists$ prob. boreliana μ que preserva T.

Aula 22

- $t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ é medida T-invariante quando μ_i são $\Rightarrow$ {medidas T-invariantes} é convexo

- $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ tem como dual o espaço de medidas borelianas de probabilidade, com:

$$\mu \longleftrightarrow \text{funcional } S_\mu : C(X) \to \mathbb{R};$$
$$S_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

- $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \, \mu(X)$.

ps

- Exercício $\int_X (af + bg)\, d\mu = a\int_X f + b\int_X g\, d\mu$

- Teorema de representação de Riesz: $\forall$ funcional linear de $C(X)$ pode ser escrito como $f \mapsto \int_X f\, d\mu$, onde μ é uma medida com sinal.

- No dual de $C(X)$ temos a seguinte topologia fraca$\star$:

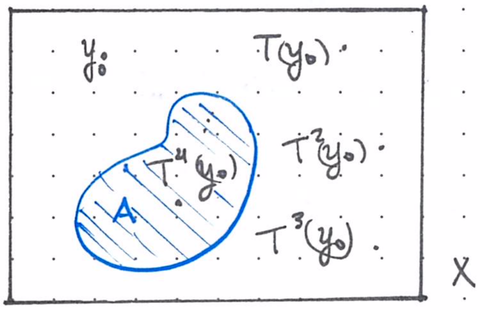
$$\mu_n \longrightarrow \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in C(X),\ \int_X f\, d\mu_n \to \int_X f\, d\mu$$

- Teorema A bola unitária da topologia fraca$\star$ é cpta.

- Recordação do teorema de Krylov-Bogulyubov

(demonstração depende de $|\mu_n(T^{-1}(A)) - \mu_n(A)| < \frac{1}{n}$, onde $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(y_0)}$)

- Ideia da demonstração:



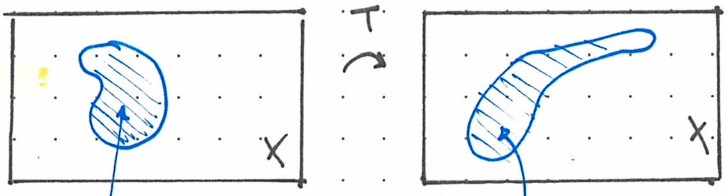
limite qdo. $n \to \infty$ da proporção de tempo que $\underbrace{\{y_0, \dots, T^{n-1}(y_0)\}\ \text{passou em } A}_{\text{associada a cada ponto}}$

- Teoria ergódica = relacionar comportamento assintótico de pontos c/ médias espaciais.

- Def. μ T-invariante $\Rightarrow$ definimos $U_T f = f \circ T$ $\forall f$ mensurável

- f, g e T contínuas, com T homeo $\Rightarrow \|U_T f - U_T g\|_\infty = \|f-g\|_\infty$
(U_T é isometria)

- $\int_X f \, d\mu = \int_X U_T f \, d\mu$; qdo. f é contínua e T homeo:



$\{0 < f < \frac{1}{n}\} \longleftrightarrow \{0 < U_T f < \frac{1}{n}\}$ mesma medida

- Obs. + geralmente, $\boxed{U_T \text{ é uma isometria de } L^p(X,\mu)}$

- Teorema ergódico de van Neumann. A sequência de funções
$$S_n f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_{T^i} f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i f$$
converge em L^2 a uma função $\bar{f}$ T-invariante.

- Teorema ergódico de Birkhoff. Se $f \in L^1$; $\exists\ \bar{f} \in L^1$ tq:

1) μ-qtp (x): $S_n f(x) \longrightarrow \bar{f}(x)$
2) $U_T \bar{f} = \bar{f}$
3) $\int_X \bar{f} \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

- Exemplo $(\mathbb{Z}_2^+, \sigma)$ (espaço cpto) σ-invariante

ps $\boxed{\mu(\text{Cilindro}) = \text{Prob.}\left[\begin{array}{l}\text{tirar os resultados presentos} \\ \text{pelo cilindro numa moeda}\end{array}\right]}$

$f: \Sigma_2^+ \to \mathbb{R}$

$f(u) = u_0$ é contínua

Qdo. existe, $\bar{f}(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$

$\Rightarrow$ p/ μ- qtp (u) a "média" das entradas da palavra existe. Porém,

$u = (0 \quad \underbrace{11}_{2!} \quad \underbrace{00\,0000}_{3!} \quad \underbrace{11 \cdots 11}_{4!} \quad \underbrace{000 \cdots 000}_{5!} \quad \dots)$

é t.q $\bar{f}(u)$ não existe.

$\boxed{\text{Aula 23}}$

- Exercício $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, ñ admite prob. invariante.

- Def Uma medida μ T-invariante é ergódica se:

$$\mu(T^{-1}(A) \Delta A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 0.$$

- λ é ergódica p/ R_α (rot. irracional) e E_2

- μ é ergódica sse toda função essencialmente invariante é essencialmente constante.

- Prova de que, se $U_T f = f$, então $f(x) = \bar{a}$ p/ μ- qtp (x), p/ algum $\bar{a}$, supondo μ ergódica.

- Prova da recíproca, usando funções características.

- Corolário do teorema ergódico de Birkhoff

1) μ ergódica $\Rightarrow$ p/ μ- qtp. x, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_X f \, d\mu$ ps

2) p/ toda $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{i \in [0, n-1] : T^i(x) \in A\}\right|$

∘ **Exemplo** $f \in L^2(S^1) \Rightarrow$ podemos escrever sua série de Fourier:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{2\pi}{n-1}} \quad (\text{em } L^2)$$

f essencialmente invariante $\Rightarrow$

$$f(x+\alpha) = f(x) \Rightarrow f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(a_n e^{i\frac{2\pi\cdot\alpha}{n-1}}\right) e^{i\frac{2\pi}{n-1}}$$

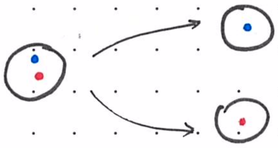
λ qtp. x

$\Rightarrow$ como os coefs. de Fourier são únicos, $f = a_0$ (em L^2)

$\Rightarrow$ λ é ergódica p/ R_α (irracional)

Aula 24

∘ Ideia: ñ temos resolução p/ distinguir ptos. com dist. $< \varepsilon$:



a dinâmica pode tornar dois pontos inicialmente indistinguíveis em separados.

∘ $d_n(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y))$ (ñ decrescente com n)

∘ $d_n(x,y) \geq \varepsilon \Rightarrow$ consigo distinguir x, y olhando p/ $n-1$ iterados ((n,ε) - separados)

∘ **Def** $\text{Sep}(n,\varepsilon) = \max\left\{|A| : \forall\, x,y \in A \text{ com } x \neq y,\ d_n(x,y) \geq \varepsilon\right\}$

$$\text{Span}(n,\varepsilon) = \min\left\{|A| : X = \bigcup_{a\in A} B_n(\varepsilon;a)\right\}$$

ps ∘ **Lema** $\text{Span}(n,\varepsilon) \leq \text{Sep}(n,\varepsilon)$

• **Def**. $Cov(n,\varepsilon) = \min \left\{ |\mathcal{A}| : \begin{array}{l} \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\} \subset \mathcal{P}(X),\ X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \\ \text{e } \operatorname{diam}_n A_i < \varepsilon \end{array} \right\}$

• **Lema**. $\begin{cases} Sep(n,\varepsilon) \leq Cov(n,\varepsilon) \\ Cov(n, 2\varepsilon) \leq Span(n,\varepsilon) \end{cases}$

• Resumindo:

$$Cov(n,2\varepsilon) \leq span(n,\varepsilon) \leq Sep(n,\varepsilon) \leq Cov(n,\varepsilon)$$

(não-decrescente com ε)

• **Def** $h_\varepsilon(f) = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log\left[Cov(n,\varepsilon)\right] \right\}$

• A ε. entropia mede a taxa de crescimento exponencial do nº de conjuntos de diam dinâmicos ε com o nº de iterações

(Qto. maior o n, menor a "resolução", pois d_n aumenta)

• **Def**. A entropia topológica de f é:

$$\boxed{h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(f)}$$

• **Exercício**. $h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[Sep(n,\varepsilon)\right] \right\}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[Span(n,\varepsilon)\right] \right\}$$

• **Exercício** ~~[illegible]~~

$\forall n \forall \varepsilon \ \exists \ \delta>0$ t.q.: $d_n(x,y) \geq \varepsilon \Rightarrow d_1(x,y) \geq \delta$

Em particular, (X, d_n) tb. é cpto.

ps

• **Exemplo.** P/ uma isometria, $d_n = d \ \forall n$, e podemos cobrir o espaço com $\sim \left\lfloor \frac{\text{diam } X}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Logo, $h(f) = 0$. Em particular:

$$h(R_\alpha) = 0$$

• **Exemplo** Os conjuntos:

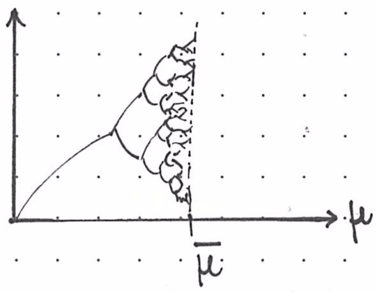
• $\{(0\,\bar{0}), (1\,\bar{1})\}$ é $(1, 1/2)$ separado

• $\{(0\,0 \cdots), (0\,1 \cdots), (1\,0 \cdots), (1\,1 \cdots)\}$ é $(2, 1/2)$ separado

• $\{(000 \cdots), (001 \cdots), (010 \cdots), (100 \cdots), (110 \cdots),$
$(101 \cdots), (011 \cdots), (111 \cdots)\}$ é $(3, 1/2)$ separado ...

$\Rightarrow \text{Sep}(n, 1/2) \geq 2^n \Rightarrow h(\sigma) \geq \log 2$

• **Exemplo.** No mapa quadrático, seja $\bar{\mu}$ t.q. f_μ tem pto. periódico de período que n é potência de 2 se $\mu > \bar{\mu}$



$$\Rightarrow h(f_\mu) \begin{cases} = 0 & \text{se } \mu < \bar{\mu} \\ > 0 & \text{se } \mu > \bar{\mu}. \end{cases}$$

• **Lema.** A sequência $a_n = \log \text{cov}(n, \varepsilon)$ é subaditiva, ou seja, $a_{m+n} \leq a_m + a_n$.

(ou seja, ela cresce menos do que alguma PG))

• **Lema.** Se $(a_n)_n$ é uma sequência sub aditiva de nºs reais positivos $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$

ps Prova detalhada: Exercício.

Aula 25

- Entropia é uma medida **quantitativa** de quão "rica" é a dinâmica de f.

  → **Entropia ε**: crescimento exponencial do nº de **órbitas ε-distinguíveis até** o tempo n da dinâmica.

  Entropia topológica: $\lim_{\varepsilon \to 0} (\text{Entropia } \varepsilon)$.

- **Exercício** Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$: $\begin{cases} \text{Span}(n, \varepsilon_1) \geqslant \text{span}(n, \varepsilon_2) \\ \text{Sep}(n, \varepsilon_1) \geqslant \text{sep}(n, \varepsilon_2) \\ \text{Cov}(n, \varepsilon_1) \geqslant \text{cov}(n, \varepsilon_2) \end{cases}$

- A entropia ε depende da métrica (coordenadas), enquanto a entropia não.

- **Exercício** $$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left[\text{Sep}(n; \varepsilon) \right] \right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left[\text{Span}(n; \varepsilon) \right] \right\}$$

- **Lema** Sejam d, d' duas distâncias em X com as mesmas sequências convergentes. Então, $h(f) = h'(f)$.

- **Corolário**. (X, f) e (Y, g) conjugados $\Rightarrow h(f) = h(g)$.

- **Exercício**. Se (X, f) é extensão de (Y, g) $\Rightarrow h(f) \geqslant h(g)$

- **Exercício** (X_i, f_i) sistemas dinâmicos. Se A, B são (n, ε)-separados p/ f_1 e f_2, resp. $\Rightarrow A \times B$ é um conjunto (n, ε)-separado p/ $f_1 \times f_2$.

ps

- Completando c/ um argumento de (n, ε) coberturas, vemos que $h(f \times g) = h(f) + h(g)$.

- **Lema** 1) $h(f^n) = n\, h(f)$
  2) $h(f^{-1}) = h(f)$ (se f é homeo)
  3) se f é expansiva, com cte de expansividade δ, então, $\forall\, \varepsilon < \delta$, $h(f) = h_\varepsilon(f)$.

- **Exercício** Calcule $h(\sigma)$ e $h(E_2)$.

ps