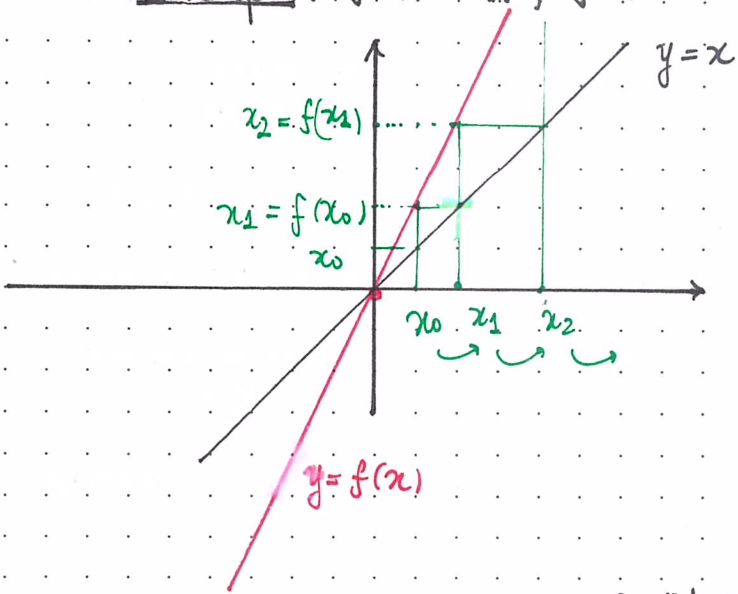
MAP5925 · Intro aos Sistemas Dinâmicos

Aula 1

- **Obj** familiarizar todos com conceitos básicos da área
- **Sistema dinâmico**. $\begin{cases} \text{Espaço } X \\ \text{Regra de transformação de } X \end{cases}$

$\Rightarrow$ estudar o comportamento dos ptos. pela repetida aplicação da transformação

- $\{f^n : X \to X : n \geq 0\}$ como exemplo de semi grupo
- **Exemplo**. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

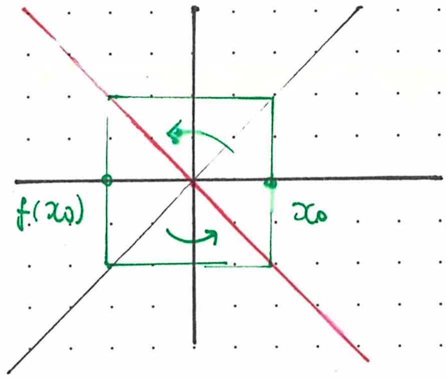


- **Def** $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde $\begin{cases} \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \\ x_0 = x_0 \\ x_{i+1} = f(x_i) \end{cases}$

(trajetória de $x_0 \in X$) (ordenado)

Exercício: $x_{i+1} = f^i(x_0)$ Órbita futura: $O(x_0) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{x_i\}$

- **Exemplo** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ não tem ptos. fixos
- **Exemplo** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$

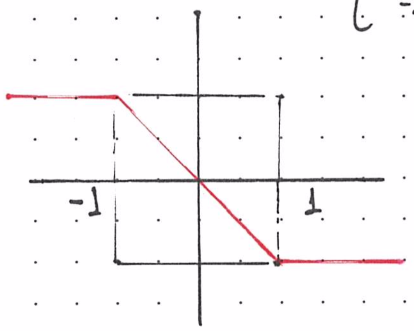


$x_0 \neq 0$ é pto. periódico de período (mínimo) 2

Def $\begin{cases} \text{Pto. periódico de período } k, \\ \text{período mínimo} \\ \text{pto. eventualmente periódico} \end{cases}$

- **Exemplo**

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x < -1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$



todo pto. é eventualmente periódico.

(É um sistema não-inversível)

Exercício f inversível $\Rightarrow \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$

$f^m \circ f^n = f^{m+n}$ $\left(\begin{array}{l} \text{homomorfismo} \\ \text{c/ } (\mathbb{Z}, +) \end{array}\right)$

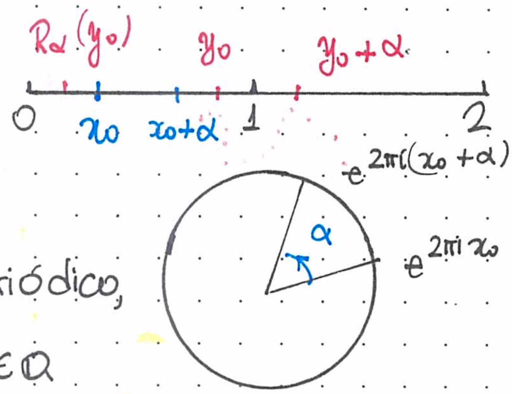
- **Exemplo** $f(x) = 2x \Rightarrow$ qdo. andamos p/ o passado os ptos. convergem
- **Problema** $f: X \circlearrowleft$ inversível
  x_0 eventualmente periódico $\Rightarrow x_0$ é periódico

ps

- **Proposição** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe um pto. periódico de período 2 $\Rightarrow$ existe um pto. fixo.

- **Exercício** $f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{cont.}} \mathbb{R}$ tem pto. periódico $\Rightarrow$ tem pto. fixo

  - $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $d(x,y) = \min\{|x-y|, 1-|x-y|\}$ p/ $x,y \in [0,1]$
  - $R_\alpha : S^1 \to S^1$
    $R_\alpha(x) = x + \alpha - \lfloor x+\alpha \rfloor$
    (Rotação de α)



  - Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, todo pto. é periódico,
    se tem pto. periódico $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$

Aula 2

- "**Exercício**": $f: \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$ homeo$^+$ com pto. periódico de período 2 $\Rightarrow$ pto. fixo.
  Contra exemplos p/ $\begin{cases} f \text{ ñ homeo} \\ f \text{ ñ preserva orientação} \end{cases}$

- **Quem é S^1**: $[0,1]$ com a métrica
  $d(x,y) = \{|x-y|, 1-|x-y|\}$

- **Exercício** (S^1, d) é um espaço métrico

- Outra maneira de "ver" S^1: $x \in S^1 \mapsto z(x) = e^{2\pi i x}$

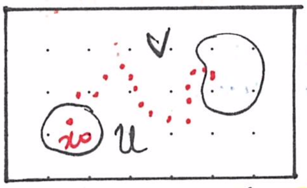
- **Operação de soma**: $\underset{\text{em } S^1}{x+y} = x + y - \underset{\text{em } \mathbb{R}}{\lfloor x+y \rfloor}$

- **Exercício**: R_α é uma isometria de S^1
  (em particular, contínua)

- **Lema** R_α tem pto. periódico de período $q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
- **Proposição** Se $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall x \in S^1$, $\mathcal{O}_{R_\alpha}(x)$ é densa.
- **Def.** $f:(X,d) \circlearrowleft$ contínua é:

  i) minimal se $\forall x_0 \in X$, $\mathcal{O}(x_0)$ é densa

  ii) transitiva se $\forall\ U, V$ abertos $\exists\ n > 0$ t.q. $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$



- **Exercício** f transitiva $\Leftarrow f$ minimal
- **Def** $f: X \circlearrowleft$, $A \subset X$ é:
  - invariante p/ frente: $f^n(A) \subset A$ ← **Exercício** Basta pedir $f(A) \subset A$.
  - invariante p/ trás: $f^{-1}(A) \subset A$
  - A é totalmente invariante se é ambos.
- **Exercício** $\begin{cases} A \text{ invariante p/ frente} \Rightarrow A^c \text{ é invariante p/ trás} \\ f \text{ inversível e } A \text{ totalmente invariante} \Rightarrow f(A) = A \end{cases}$
- **Proposição** $f:(X,d) \circlearrowleft$ é minimal $\Leftrightarrow \forall\ F \subset X$ fechado e invariante à frente, ou $F = X$ ou $F = \emptyset$
- **Exemplo** R_α $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{toda órbita é um fechado invariante} \\ \alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \text{os fechados invariantes são } F = S^1 \text{ ou } F = \emptyset \end{cases}$
- **Exercício** Dada uma sequência inicial $a_0 \dots a_k$ de dígitos em base 10, existe uma potência de 2 cuja expansão decimal começa com esta sequência?

ps

Aula 3

- R_α preserva a medida de Lebesgue λ em S^1
- **Def.** $m \geq 2 \Rightarrow E_m : S^1 \to S^1$, $E_m(x) = mx$
- Exemplo principal: E_2 $\begin{cases} \text{não é inversível} \\ E_2 \text{ é contínua} \\ E_2 \text{ não é minimal} \\ 1/2 \text{ é eventualmente periódico} \end{cases}$

- **Lema**: E_2 é transitivo

- $\frac{p}{2^k-1}$, p inteiro, é periódico de período k, $|\mathrm{Fix}\, E_2^k| = 2^k - 1$, e os ptos periódicos são densos.

- Expansão de x em base 2, $x = 0.x_1x_2\ldots$, $x_i \in \{0,1\}$:

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

$\Rightarrow E_2(x) = 0.x_2x_3x_4\ldots$

- $\bar{x} = 0, 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 110\ 101\ 111 \ldots$

- **Exercício** Mostre que $\overline{O^+_{E_2}(\bar{x})} = S^1$ $\bar{x}$ (tem órbita densa)

- O conjunto de ptos com órbita densa tb. é denso.

- **Exercício**. Se I é um intervalo, $\lambda(E_2^{-1}(I)) = \lambda(I)$.

ps

Aula 4

- O conjunto das seqs. de 0s e 1s é não enumerável (diagonal de Cantor)

- $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ seq. de 0's e 1's $\Rightarrow$

$x_u = 0.0\, u_0\, 1\, u_1\, 00\, u_2\, 01\, u_3\, 10\, u_4\, 11\, u_5\, 000\, u_6 \ldots$

$\Rightarrow$ o conjunto de ptos. c/ órbita densa é ñ-enumerável!

(+ p/ frente podemos ver que: $\begin{cases} \text{têm medida total} \\ \text{contém um } G_\delta \text{ denso} \end{cases}$)

- Def $\Sigma_n^+ =$ sequências em $\{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}_0}$

$\Sigma_n =$ sequências em $\{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{Z}}$

com as métricas:

$d_+ : \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ \to [0,1]$

$$d_+(\underline{u}, \underline{w}) = \begin{cases} 2^{-i} & \text{se } i = \min\limits_j (u_j \neq w_j) \\ 0 & \text{se } \underline{u} = \underline{w} \end{cases}$$

Exercício: d_+ é métrica

$d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to [0,1]$

$$d(\underline{u}, \underline{w}) = \begin{cases} 2^{-|i|} & \text{se } u_i \neq w_i \text{ e } u_j = w_j \ \forall j \text{ com } |j| < |i| \\ 0 & \text{se } \underline{u} = \underline{w} \end{cases}$$

Exercício: d é métrica

- Obs Σ_2^+ é homeomorfo ao conjunto de Cantor
- Σ_2^+ ñ é conexo ($B_{\frac{1}{2}}(0\overline{00})$ é "clopen")

ps

- Σ_2^+ é um espaço métrico cpto.

- **Exemplo** (Shift)
  - $T : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ (unilateral)
    $T(w_0 w_1 w_2 \cdots) = (w_1 w_2 \cdots)$
  - $T : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ (bilateral)
    $T(\cdots w_{-2}\ w_{-1} | w_0 | w_1\ w_2 \cdots) = (\cdots w_{-2}\ w_{-1}\ w_0 | w_1 | w_2\ w_3 \cdots)$

- $\begin{cases} T \text{ ñ é inversível em } \Sigma_2^+ \text{, e é contínua} \\ T \text{ é inversível em } \Sigma_2 \text{, e é homeomorfismo} \end{cases}$

- O shift unilateral: tem 2^k ptos. de período k,
  tem ptos. eventualmente periódicos,
  os ptos. periódicos são densos,
  tem pto. com órbita densa,

  [**Exercício.** $\overline{u} = (0\ 1\ \ 00\ \ 01\ \ 10\ \ 11 \cdots)$
  $\Rightarrow \overline{\mathcal{O}_T^+(\overline{u})} = \Sigma_2^+$]

- **Def** $\pi : \Sigma_2^+ \to S^1$
  $$\pi(\underline{w}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{w_i}{2^{i+1}}$$

- $$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{T} & \Sigma_2^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{E_2} & S^1 \end{array}$$
  comuta: $\boxed{\pi \circ T = E_2 \circ \pi}$

  (Exercício)

ps

Def. Dados dois sistemas dinâmicos contínuos $f_i:(X_i, d_i) \to (X_i, d_i)$ dizemos que f_1 é semi-conjugado a f_2 se $\exists\ \pi: X_1 \to X_2$ contínua e sobrejetora tq. o diagrama comuta.

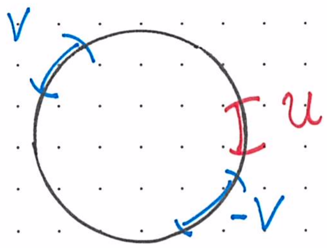
Chamamos: $\begin{cases} \cdot\ (f_1, X_1) \text{ de extensão de } (f_2, X_2) \\ \cdot\ (f_2, X_2) \text{ é um fator de } (f_2, X_1). \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X_2 & \xrightarrow[f_2]{} & X_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \to \text{extensão} \\ \\ \to \text{fator} \end{array}$$

Aula 5

- Notação p/ o shift (à esquerda): $\begin{cases} \sigma: \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+ \text{ (contínua)} \\ \sigma: \Sigma_m \to \Sigma_m \text{ (homeomorfismo)} \end{cases}$

- **Def.** $f:(X,d) \to (X,d)$ é topologicamente mixing se dados abertos $U, V \neq \emptyset$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\ n > n_0$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.



- Uma rotação irracional ñ pode ser mixing, pois se diam U, V for suficientell pequeno:

$$R_\alpha(U) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow R_\alpha(U) \cap (-V) = \emptyset$$

- Mixing $\Rightarrow$ Transitivo (mas ñ é equivalente)
- Minimal $\Rightarrow$ Transitivo

- Exercício: Verifique que E_2 é mixing

ps

- **Conclusão**: minimalidade e mixing são conceitos "transversais".

sem conexão

Minimalidade $\Downarrow$ Transitividade, Mixing $\Downarrow$ Transitividade

- **Def.** O cilindro

$$C^{n_1,\dots,n_k}_{i_1,\dots,i_k} = \{ \underline{w} \in \Sigma_m : w_{n_j} = i_j, 1 \leq j \leq k \}$$

(e analogamente em Σ_m^+)

- **Exemplo**: $C^{0,1,3}_{1,1,0}$ em Σ_2^+:

sequências da forma $(1\ 1\ \underbrace{w_2}\ 0\ \underbrace{w_4\ \ w_5 \cdots})$

"livres"

- **Exercício**: 1) Mostre que todo cilindro é aberto

2) Mostre que o complementar de um cilindro é uma união finita de cilindros. Em particular, é aberto. Ou seja, os cilindros são "clopen".

- **Lema**: Os cilindros são uma base de abertos de Σ_m (resp. Σ_m^+)

- **Lema**. $C = C^{n_1,\dots,n_k}_{i_1,\dots,i_k} \Rightarrow \sigma^{n_k+1}(C) = \Sigma_2^+$

- **Exercício**. Mostre com detalhes que $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ é mixing.

- **Def** A medida equilibrada de um cilindro é

$$\mu(C^{n_1,\dots,n_k}_{i_1,\dots,i_k}) = 1/2^k$$

ps

- σ preserva esta medida:

$$\sigma^{-1}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{i_1,\dots,i_k}\right) = C^{n_1+1,\dots,n_k+1}_{i_1,\dots,i_k}$$

- **Lema** Se (X_1, f_1) é semi-conjugado a (X_2, f_2), então (X_1, f_1^n) é semi-conjugada a (X_2, f_2^n):

$$\pi \circ f_1^n = f_2^n \circ \pi$$

- Propriedades:
  1) $x_0 \in X_1$ periódico $\Rightarrow \pi(x_0) \in X_2$ é periódico
  2) $x_0 \in X_1$ tem órbita densa $\Rightarrow \pi(x_0) \in X_2$ tem órbita densa

- **Exercício:** Se (X_1, f_1) é topologicamente mixing $\Rightarrow$ o mesmo ocorre com o fator.

- O sistema $T: \{0\} \circlearrowleft$ é $\begin{cases} \text{mixing} \\ \text{minimal} \\ \text{tem pto fixo} \end{cases}$

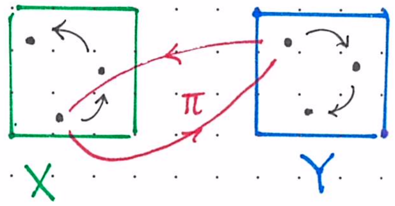
  e é fator de qqer. outro sistema dinâmico!

- **Def.** Uma conjugação topológica é uma semi conjugação p/ a qual π é inversível e π^{-1} é contínua.

ps

Aula 6

- Conjugação é a noção de que dois sistemas dinâmicos são "iguais".



- Se $f_1 : X_1 \to X_1$ é homeomorfismo, f_2 tb. é, e f_1^{-1}, f_2^{-1} são ~~semi~~ conjugados

- Não vale no caso de semi-conjugação: a projeção $\pi : \Sigma_2 \to \Sigma_2^+$ dada por $\pi(\underline{w}) = (w_0\, w_1 \cdots)$ é uma semi-conjugação entre o homeo e o shift unilateral.

- Se (X, f_X) é topologicamente conjugado a (Y, f_Y), então (Y, f_Y) é topologicamente conjugado a (X, f_X)

- (X, f_X) é conjugado a si mesmo

- $\left.\begin{array}{l} (X, f_X) \text{ conjugado a } (Y, f_Y) \\ (Y, f_Y) \text{ conjugado a } (Z, f_Z) \end{array}\right\} \Rightarrow (X, f_X)$ é conjugado a (Z, f_Z).

- Exercício: Mostre que se $\pi_X : X \to Y$ e $\pi_Y : Y \to Z$ é homeo, então $\tilde{\pi} = \pi_Y \circ \pi_X$ é um homeo e $\tilde{\pi} \circ f_X = f_Z \circ \tilde{\pi}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "\pi_X"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f_Y"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "f_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

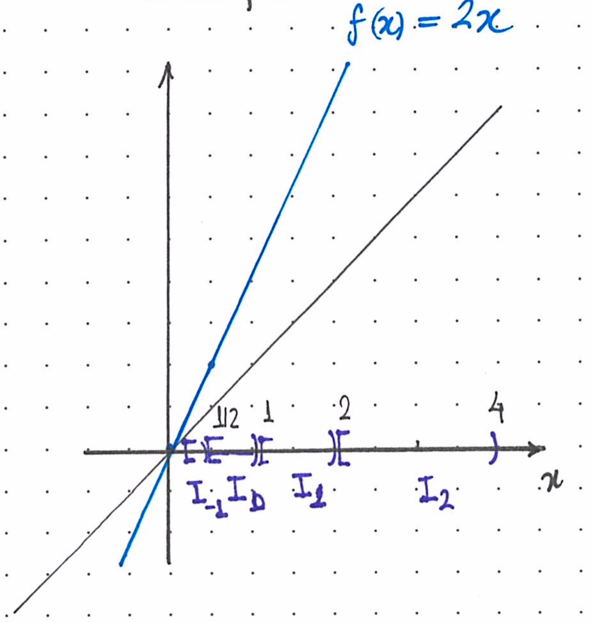
- Conjugação topológica é uma relação de equivalência.

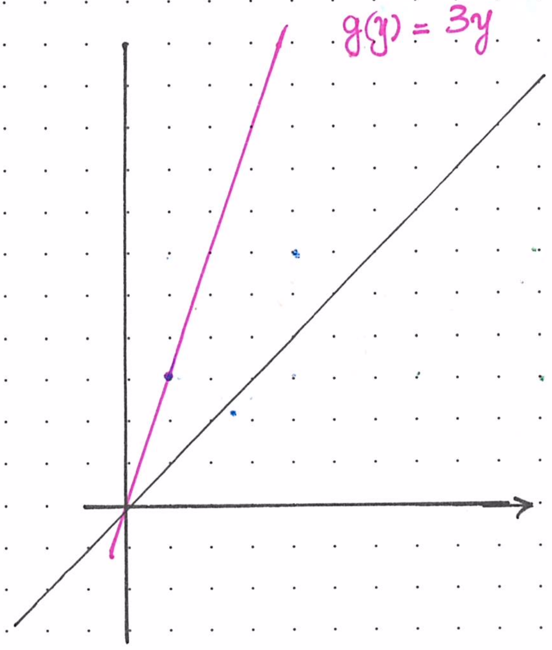
- (Σ_2^+, σ) e (S^1, E_2) são semi-conjugados mas não são conjugados (conexidade).

- Σ_2^+ e Σ_3^+ são homeomorfos, mas os respectivos σ não são topologicamente conjugados ($|\text{Fix}|$).

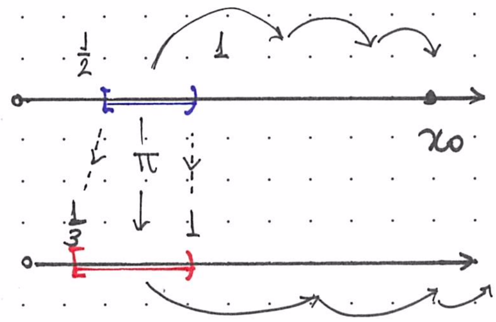
ps

- **Exemplo.**





$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{f} & 2 & \xrightarrow{f} & 4 & \xrightarrow{f} & 8 \\ \pi\downarrow & & & & & & \\ \pi(1) & \xrightarrow[g]{} & 3\pi(1) & \xrightarrow[g]{} & 9\pi(1) & \xrightarrow[g]{} & 27\pi(1) \end{array}$$



$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3^{-N(x)-1}\, 2^{N(x)+1} x, & \text{onde } N(x) \text{ é t.q. } 2^{N(x)} x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Exercício. Mostre que π conjuga f e g em $\mathbb{R}^+$.

- I_0 é um exemplo de domínio fundamental.

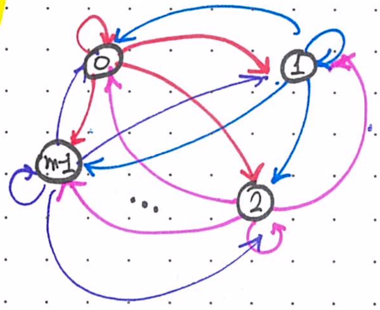
ps

- **Exercício.** Mostre que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ e $g: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $g(y) = 2y$ são conjugadas.

- $x+1$ e $y+\alpha$ são topologicamente conjugadas

- **Exercício**: Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $R_{2\alpha}$ é um fator de R_α, mas não são conjugadas.

- Σ_m^+ descreve um caminho infinito em um grafo direcionado:



- Podemos olhar p/ conjuntos + restritos:

- Podemos descrever este sistema por uma matriz de transição:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A entrada ij de A^k o nº de caminhos de tamanho k permitidos no grafo começando em i e terminando em j.

- **Def.** $A_{m\times m}$ matriz de permissividade ($a_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i,j$)

$$\Sigma_A = \{ \underline{w} \in \Sigma_m : \forall j \in \mathbb{Z},\ a_{w_j+1\ w_{j+1}+1} = 1 \}$$
$$\Sigma_A^+ = \{ \underline{w} \in \Sigma_m^+ : \text{vale o mesmo} \}$$

- Σ_A^+ é um fechado σ-invariante de Σ_m^+

ps

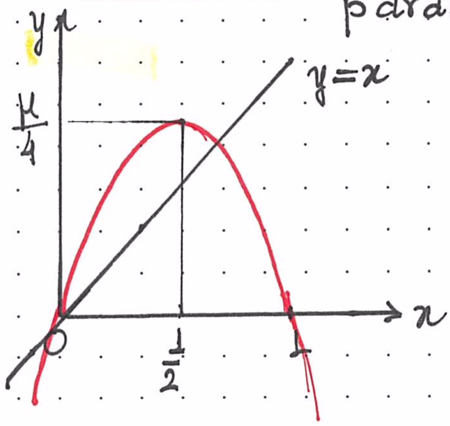
• O sistema dinâmico (Σ_A^+, σ) é o subshift de A.

Aula 7

• Vamos analisar uma família a um parâmetro de sistemas dinâmicos:

$$f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f_\mu(x) = \mu x (1 - x)$$

(Família quadrática)

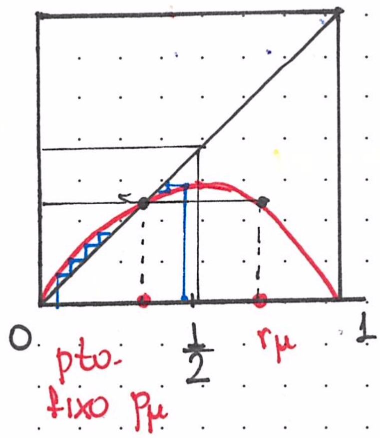


• $x_0 < 0 \Rightarrow \lim_{i \to \infty} x_i = -\infty$

• $x_0 > 1 \Rightarrow$ o mesmo acontece

• A dinâmica "interessante" está nos ptos. que ficam "p/ sempre" em $[0,1]$.

• $1 < \mu < 2$



• $x_0 \in (0, p_\mu) \Rightarrow \begin{cases} x_{i+1} > x_i \\ x_i < p_\mu \quad \forall i, \\ \lim_{i \to \infty} x_i = p_\mu \end{cases}$

• $x_0 \in (p_\mu, 1/2) \Rightarrow$ tb. vale que $\lim_{i \to \infty} x_i = p_\mu$

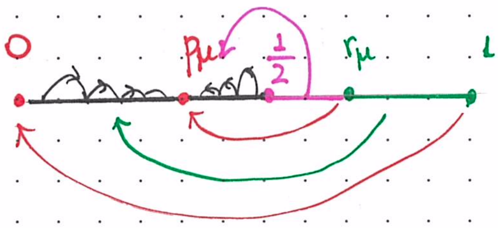
• $\exists\, r_\mu > \frac{1}{2}$ t.q. $f_\mu(r_\mu) = p_\mu$, e: $\frac{1}{2} \leq x < r_\mu \Rightarrow p_\mu < x < \frac{1}{2}$

• $r_\mu \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq f_\mu(x) \leq p_\mu$

$0 < x_0 < 1 \Rightarrow$

$\lim_{i \to \infty} f_\mu^i(x_0) = p_\mu$

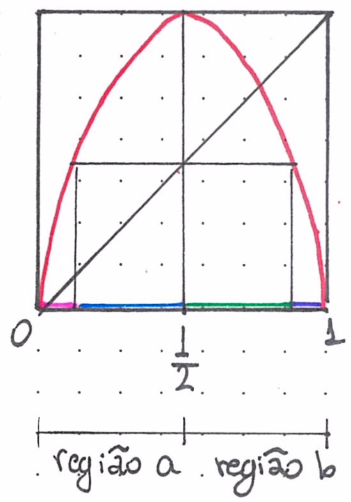
• Dinâmica simples:

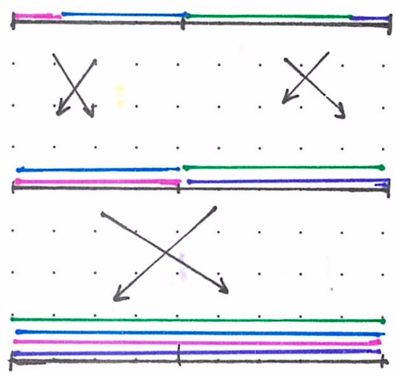


ps

- **Exercício** $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$

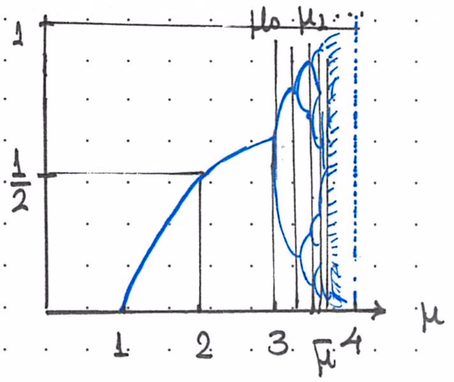
- $\mu = 4$





Dinâmica "parecida" com a d (Σ_2^+, σ)

Como saímos de um sistema dinâmico simples para um "caótico"?



- Numericamente:
$\mu_i < \mu < \mu_{i+1} \Rightarrow$ quase todo pto. converge a uma órbita de período 2^i

(Cascata de bifurcação de período)

-

Pto. fixo	derivada
0	μ
$p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$	$2-\mu$

- **Def.** (X, f) sistema dinâmico topológico. Um pto. fixo $\bar{x}$ é dito atrator se $\exists$ vizinhança U de $\bar{x}$ t.q. $f(\bar{U}) \subset U$ e $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \{\bar{x}\}$.

ps

• **Lema** Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $\bar{x}$ é um pto. fixo com $|g'(\bar{x})| < 1$, então $\bar{x}$ é um atrator p/ g.

• **Def** (X, f) sistema dinâmico topológico. Um pto. fixo $\bar{x}$ é dito repulsor se $\exists$ vizinhança $\mathcal{U}$ de $\bar{x}$ t.q. $\bar{\mathcal{U}} \subset f(\mathcal{U})$ e $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{U}) = \{\bar{x}\}$.

• **Exercício** Se g é homeomorfismo, então $\bar{x}$ é pto. fixo repulsor $\iff$ é pto. fixo atrator de g^{-1}.

• **Lema** Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $\bar{x}$ é um pto fixo com $|g'(\bar{x})| > 1$, então $\bar{x}$ é um pto. fixo repulsor.

• **Exercício**: Provar o lema.

Dica. Mostre que $\exists\ \varepsilon > 0$, $a > 1$ t.q. $|y - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow |g(y) - \bar{x}| \geq a|y - \bar{x}|$ e, em particular, $|g^n(y) - \bar{x}| > \varepsilon$ p/ algum $n > 0$ e todo $y \neq \bar{x}$.

• $1 < \mu < 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ é repulsor p/ } f_\mu \\ p_\mu \text{ é atrator p/ } f_\mu \end{cases}$

• $\mu > 3 \Rightarrow p_\mu$ é repulsor p/ f_μ

Aula 8

• **Prop.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se a trajetória $x_i = f^i(x_0)$ satisfaz $x_i \to \bar{x}_0$, então $\bar{x}$ é pto. fixo.

• **Exercício**. O mesmo vale p/ um sistema dinâmico topológico num espaço métrico.

ps

• **Def** $\begin{cases} \omega\text{-limite } \omega_f(x) \\ \alpha\text{-limite como } \alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x) \text{ qdo. } f \text{ é inversível} \end{cases}$

• **Lema** $\omega_f(x)$ é fechado e totalmente invariante, num espaço métrico compacto.

• **Exercício** $\omega_f(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{n=i}^{+\infty} \{f^n(x)\}} \right)$

• **Def** Um conjunto $K \subset X$ é um atrator se existe aberto $\mathcal{U}$ contendo K t.q. $f(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}$ e $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{\mathcal{U}}) = K$.

• **Lema**: Se K é atrator ou repulsor, então K é fechado.

• **Exemplo** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r,\theta) = (r^2, \theta + \alpha)$, $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ (em coordenadas polares)

$K: r = 1$ é um repulsor.

• **Exercício** Mostrar cuidadosamente que, no exemplo, vale:

a) $\{0\}$ é um atrator

b) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ é um repulsor

c) $\{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| \leq 1\}$ é um repulsor.

d) $\|x\| = 1 \Rightarrow \alpha(x) = \omega(x) = C$

e) $\|x\| < 1 \Rightarrow \alpha(x) = \varepsilon$, $\omega(x) = \{0\}$

f) $\|x\| > 1 \Rightarrow \alpha(x) = C$ e $\omega(x) = \phi$.

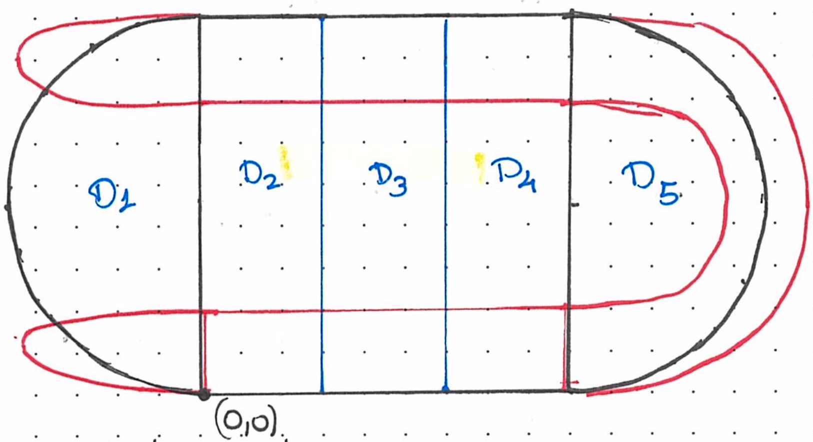
• Um pto. com $|f'(\bar{x})| = 1$ pode ser tanto atrator qto. repulsor (p.ex. $f(x) = x \pm x^3$ em $\bar{x} = 0$) qto. nem um nem outro (p.ex. $f(x) = x + x^2$ em $\bar{x} = 0$).

ps

Aula 9

- x_0 pto fixo atrator de $(X, f) \Rightarrow W^s(x_0) = \{ y : \lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0 \}$ é aberto.

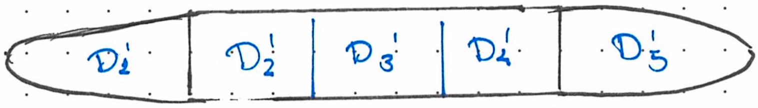
- Ferradura de Smale



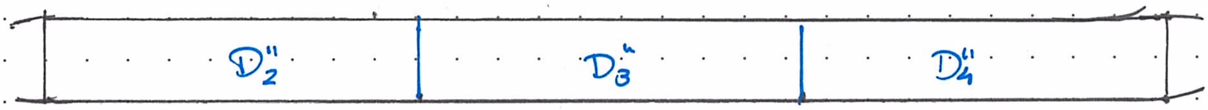
- $D = D_1 \cup \dots \cup D_5$
$R = D_2 \cup D_3 \cup D_4$
$f : R \to D$

achatar verticalmente de 1/3

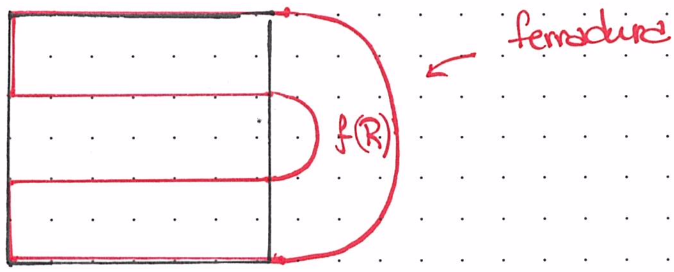
dobrar e "colocar de volta"



esticar R' horizontalmente de 3



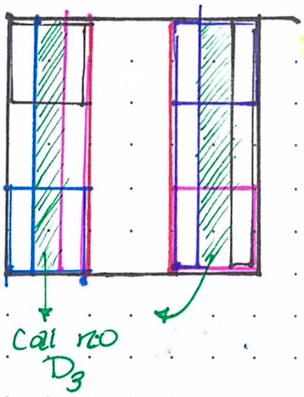
- $f(R)$

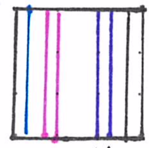


ps

- Os ptos que não têm dinâmica trivial: os ptos que ficam em $D_2 \cup D_4$.

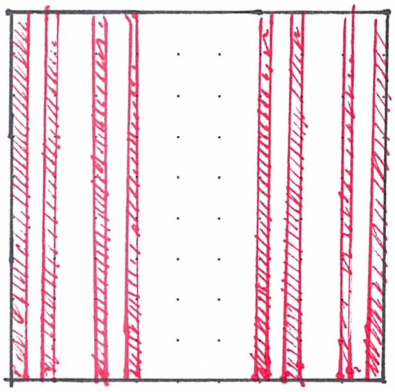
- Conjunto de interesse: $\bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(R) = H^-$ (ptos com órbita futura em R)



- $(D_2 \cup D_4) \cap f^{-1}(D_2 \cup D_4) =$ 

- Associamos os símbolos 0 a D_2 e 1 a D_4.

- $(D_2 \cup D_4) \cap f^{-1}(D_2 \cup D_4) \cap f^{-2}(D_2 \cup D_4)$



- No fim:

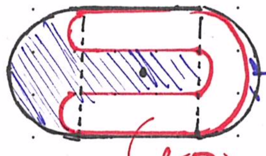
$H^- = C \times [0,1]$, onde

C é o conjunto ternário de Cantor

- Itinerário futuro:

$x \in H^- \mapsto \underline{w}^-(x)$, onde $\begin{cases} (\underline{w}^-(x))_j = 0 & \text{se } f^j(x) \in D_2 \\ (\underline{w}^-(x))_j = 1 & \text{se } f^j(x) \in D_4 \end{cases}$

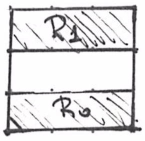
- Exercício: Mostre que $\underline{w}^-: H^- \xrightarrow{\text{cont.}} \Sigma_2^+$ e, além disso, $\underline{w}^-(f(x)) = \sigma(\underline{w}^-(x))$, ou seja, é uma semi-conjugação entre f e σ.

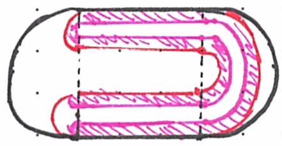


$\to$ ñ têm pré-imagem em R (nem em D)

$f(D)$

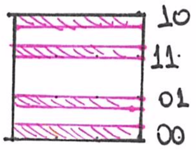
- $\forall z \in f(D)\ \exists!\ y \in D : z = f(y)$
- Ptos. que têm "órbita passada": $H^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(R)$
- $\begin{cases} R_0 = f(D_2) \\ R_1 = f(D_4) \end{cases}$





$f^2(R)$

- $R \cap f(R) \cap f^2(R)$:



$\Rightarrow H^+ = [0,1] \times C$

- $g : H^+ \to H^+$, $g = \left(f|_{H^+}\right)^{-1}$
- $x \in H^+ \not\Rightarrow f(x) \in H^+$
- Lema $x \in H^+$ e $f(x) \in R \Rightarrow f(x) \in H^+$
- $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(H^+) \Rightarrow f : \Lambda \to \Lambda$ é uma bijeção
- $\Lambda = H^+ \cap H^- = C \times C$
- $w^+(x)$ = itinerário passado de todo pto. de H^+:

$$(w^+(x))_j = \begin{cases} 0 & g^j(x) \in D_2 \\ 1 & g^j(x) \in D_4 \end{cases}$$

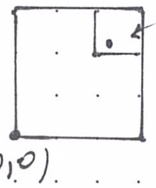
ps

- <u>Def.</u> $\pi : \Lambda \longrightarrow \Sigma_2$

$$\pi(x) = (\cdots u_3^+(x)\, u_2^+(x)\, u_1^+\, u_0^-(x)\, u_1^-(x) \ldots)$$

- <u>Exercício.</u> π conjuga f e σ.

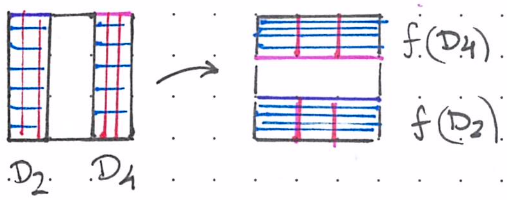
- Λ tem 2 ptos. fixos:



em algum lugar por aqui

- Se $x, y \in \Lambda$ estão na mesma vertical $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$
- Se $x, y \in \Lambda$ estão na mesma horizontal $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0$

Aula 10 **Prova: dia 17/09**

- 

- $f : D \to D$ é injetora, mas ñ sobrejetora.
- $\{x : \forall n > 0\ \exists z_n \in D$ t.q. $x = f^n(z_n)\} = H^+$

$\Rightarrow H^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(R)$ (ptos. com "órbita negativa")

- V_x = vertical sobre x $\begin{cases} V_x \subset D_2 \Rightarrow f(V_x) \subset V_{3x} \\ V_x \subset D_4 \Rightarrow f(V_x) \subset V_{3-3x} \end{cases}$

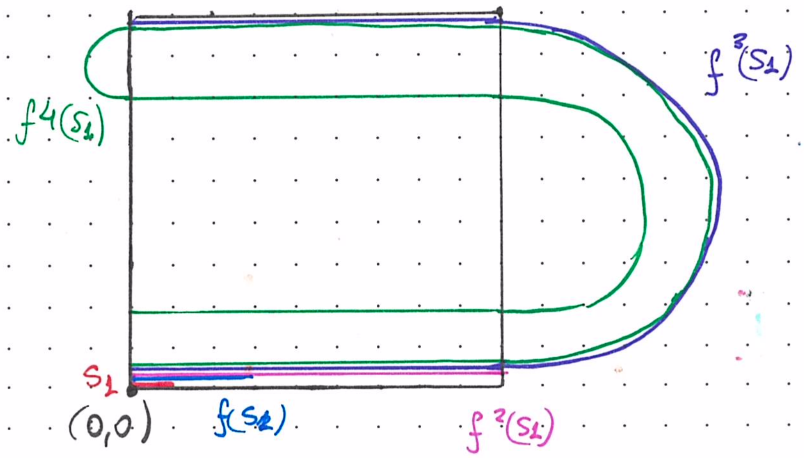
$\Rightarrow \underbrace{H^-}$ é a extensão de uma dinâmica em C, ps
(ptos. d'órbita futura em R)

Exercício $h: C \to C$

$$h(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 1/3 \\ -3x+3 & x \geq 2/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (C, h) é conjugada a (Σ_2^+, σ). Em particular, existe um homeomorfismo de C em Σ_2^+.

- É delicado falar literalmente em "expansão":



- P/ frente, um segmento horizontal pode virar "vários",
  P/ trás, temos vários segmentos horizontais cujas pré imagens convergem p/ $(0,0)$.

Aula 12

- O **2-toro**: $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

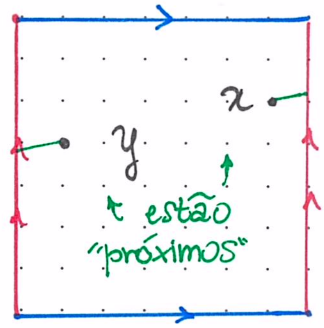
relação de equivalência: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}^2$ t.q $x - y = m$

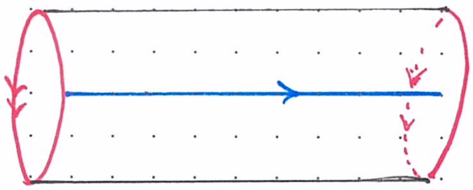
- Exercício A relação acima de fato é de equivalência

- $[x] = \{\text{classe de } x\}$

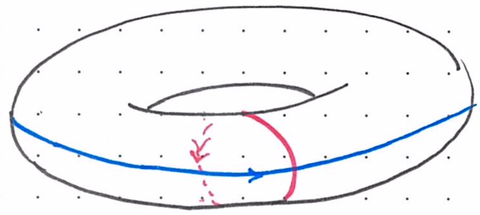
- Métrica no 2-toro: $d([x],[y]) = \inf\limits_{\substack{u\in[x]\\ v\in[y]}} |u-v|$

- Outra construção:





"tela do PacMan"



- **Def.** $A\in GL(2,\mathbb{Z}) \Rightarrow T_A[(x_1,x_2)] = \left[A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ T^2 \arrow[r, "T_A"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

- **Exercício** Seja π a projeção: $\pi(x) = [x] = (x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, x_2 - \lfloor x_2 \rfloor)$

$\Rightarrow \pi \circ A = T_A \circ \pi.$

- A é um levantamento e $\mathbb{R}^2$ é um recobrimento

- $\det A = \pm 1 \Rightarrow A^{-1}$ induz $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$

- **Exercício** $A \in GL(2,\mathbb{Z}) \Rightarrow T_A$ é contínua

(Usar que π é homeo local e transformações lineares são contínuas)

ps

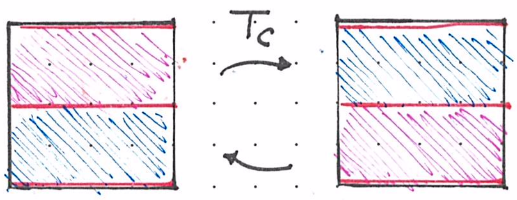
Exercício Mostre que T_A é homeomorfismo qdo. $\det A = \pm 1$

- **Def.** T_A é um automorfismo linear do toro
- Alguns automorfismos do toro:

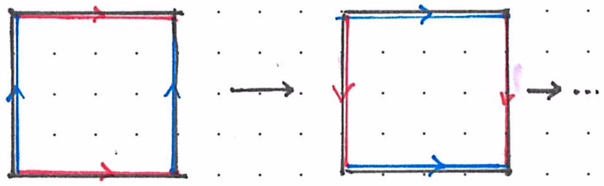
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = Id \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

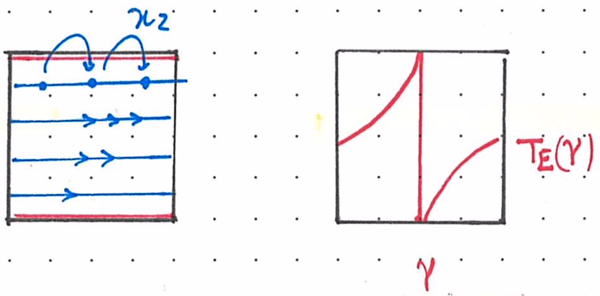
- 

$T_C^2 = Id$

- 

$D =$ rot. horária de $90°$

$\Rightarrow T_D^4 = Id$

- 

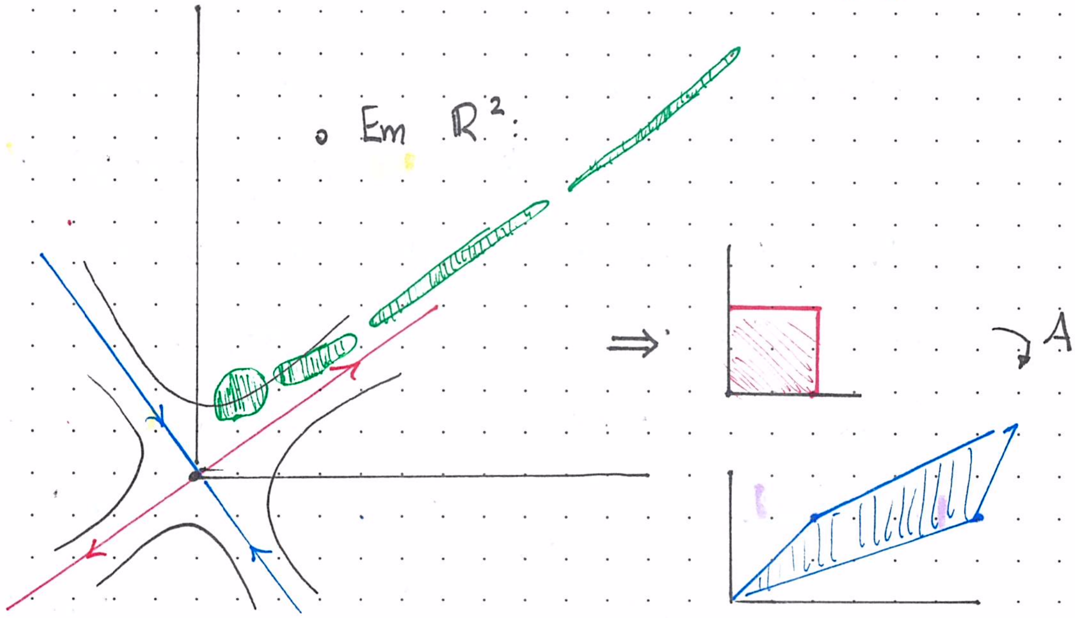
$E(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

- T_A é o gato de Arnold, c/ autovalores $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

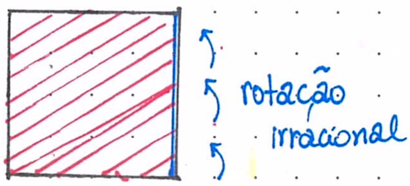
ps

• **Exercício:** Encontrar os autovetores de A, $\underline{v}^+$ e $\underline{v}^-$.

• Em $\mathbb{R}^2$:



• No toro:



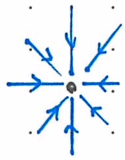
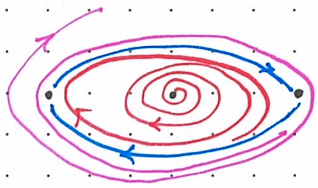
• Esta dinâmica $\begin{cases} \text{não é minimal} \\ \text{é transitiva} \\ \text{é topologicamente mixing} \end{cases}$

• **Exercício** $x \in \mathbb{T}^2$ é periódico p/ T_A $\Leftrightarrow$

$$x \in [0,1)^2 \cap \mathbb{Q}^2 .$$

Aula 13

- Contexto: (X, d) e.m., $f : X \circlearrowleft$ contínua ou homeo $\Rightarrow$ dinâmica topológica
- $\omega(x)$ é uma $\cap$ de fechados encaixantes
- X cpto. $\Rightarrow \omega(x)$ é um cpto. $\neq \emptyset$.
- Def. f homeo $\Rightarrow \alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$. ($\alpha$: limite)
- Exercício: $\alpha(x)$ é fechado e, se X é cpto., $\alpha(x) \neq \emptyset$.
- Lema $y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ e $z \in \overline{\mathcal{O}^+(y)} \Rightarrow z \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$
  - Corolário: $y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{O}^+(y) \subset \omega(x) \\ \omega(y) \subset \omega(x) \end{cases}$

  e $\omega(x)$ é positivamente invariante.
- Def x é (positivamente) recorrente se $x \in \omega(x)$,
  $R(f) = \{\text{ptos. recorrentes}\}$
- Exemplos
  -  $\Rightarrow$ só o pto. fixo é recorrente
  - $f : S^1 \circlearrowleft$, $f(x) = x + \alpha$ $\Rightarrow$ todo pto. é recorrente, $\bar{n}$ importa α
  -  $\Rightarrow$ só os ptos. fixos são recorrentes

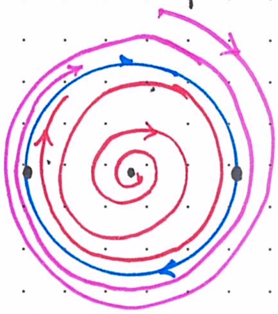
ps

- **Def** x é **não-errante** se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n > 0$ t.q.

$$f^n(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

- $\Omega(f) = \{$ptos. não-errantes$\}$
- **Exercício**: $R(f) \subset \Omega(f)$
- **Lema** $\Omega(f)$ é fechado. Em particular, $\overline{R(f)} \subset \Omega(f)$

- No exemplo:



$\Rightarrow \Omega(f) = \bigcirc \Rightarrow$ $\overline{R(f)}$ e $\Omega(f)$ nem sempre são iguais

- $R(f)$ nem sempre é fechado
- **Exercício** f transitivo $\Rightarrow \Omega(f) = X$
- **Exemplo**: $\overline{R(E_2)} = \Omega(E_2) = S^1$, mas $\frac{1}{2} \notin R(E_2)$.

fixo $\Rightarrow$ periódico $\Rightarrow$ recorrente $\Rightarrow$ não errante

$$\mathrm{Fix}(f) \subsetneq \mathrm{Per}(f) \subsetneq R(f) \subsetneq \Omega(f)$$

- **Exercício** $\forall x \in X$, $\omega_f(x) \subset \Omega(f)$

- **Def** $\emptyset \neq K \subset X$ cpto e positivamente invariante é **minimal** se $\nexists\, K' \subset K$ c/ essas mesmas propriedades.

ps

- **Lema** X cpto. $\Rightarrow \exists\ K \subset X$ minimal

  (Lema de Zorn no conjunto dos cptos. ñ vazios positivamente invariantes com a ordem da inclusão)

- K minimal $\Rightarrow \forall\ y \in K,\ \omega(y) = K$.

- Ptos. fixos e órbitas periódicas são conjuntos minimais

- S^1 é minimal p/ rotação irracional

- Ideia: $\boxed{\text{conjuntos minimais são indecomponíveis pela dinâmica}}$

- **Lema** Seja K cpto. $\neq \emptyset$ t.q. $\omega(y) = K\ \forall\ y \in K$ $\Rightarrow K$ é minimal.

- Em (Σ_2, σ): $\begin{cases} \Omega(\sigma) = \Sigma_2 & \text{(pois é transitiva)} \\ (\ldots \bar{0}\ 1\ \bar{0} \ldots) \notin R(\sigma) \end{cases}$

Aula 14

- **Teorema de Baire**: X e.m. completo, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abertos densos $\Rightarrow G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$

- **Exemplo** $U_n = \mathbb{R} \setminus \{p_n\}$, onde $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração dos racionais.

- **Def** Um conjunto é residual se contém a intersecção enumerável de abertos densos.

- **Lema**. A, B residuais $\Rightarrow A \cap B$ residual

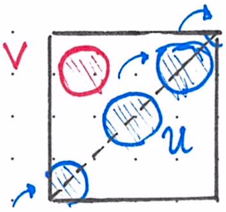
ps

• **Exercício** Mostre que, se X é um espaço métrico completo e $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ são residuais $\Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ é denso (de fato, residual).

• **Proposição:** Seja X e.m. completo c/ base enumerável. Se f é transitiva $\Rightarrow$ o conjunto dos ptos. c/ órbita densa é residual.

• $f: X \circlearrowleft$ transitivo $\Rightarrow (f\times f): X\times X \circlearrowleft$ é transitivo?

R_α rotação irracional $\Rightarrow R_\alpha \times R_\alpha$ não é transitivo em $\mathbb{T}^2$.



• **Conclusão** fator transitivo $\not\Rightarrow$ extensão transitiva!

Exercício: (Y, g) fator de (X, f) e $x \in X$, $y \in Y$ tais que $y = \pi(x)$. Decidir se é V ou F:

a) x fixo $\Rightarrow y$ fixo
b) y fixo $\Rightarrow x$ fixo
c) x periódico $\Rightarrow y$ periódico
d) y periódico $\Rightarrow x$ periódico
e) x recorrente $\Rightarrow y$ recorrente
f) y recorrente $\Rightarrow x$ recorrente
g) x ñ-errante $\Rightarrow y$ ñ-errante
h) y ñ-errante $\Rightarrow x$ ñ-errante
i) (X, f) minimal $\Rightarrow (Y, g)$ minimal
j) (Y, g) minimal $\Rightarrow (X, f)$ minimal
k) mixing
l) transitivo
m) $\Omega(f) = X \Rightarrow \Omega(g) = Y$ e vice versa
n) $G \subset X$ residual $\Rightarrow \pi(G)$ residual
o) $G \subset Y$ residual $\Rightarrow \pi^{-1}(G)$ residual

Fim do conteúdo da 1ª prova

ps

interrogação

obs: ler de trás para frente

PANNI

OLAR ÚLIZOKA
SAÚDADES DO INTENSIVAO?
VAMOS ASSISTIR O FILME INDIANO?
PARABENS POR LER ATE AKI.
KOM AMOR
PANNI

ps