ACH3553 - Estatística I

Aulas 10 e 11: Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

Alexandre Ribeiro Leichsenring
alexandre.leichsenring@usp.br

Organização

1. Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas
   - Distribuição Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Organização

1. Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas
   - Distribuição Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos.
- A construção de modelos probabilísticos para situações reais depende de um estudo pormenorizado dessas variáveis.
- Vamos estudar alguns modelos.

Organização

1. Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas
   - Distribuição Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Distribuição Bernoulli

Muitos experimentos são tais que a os resultados apresentam ou não uma determinada característica.

Exemplo

- Uma moeda é lançada: o resultado é cara, ou não;
- Um dado é lançado: ou ocorre 6 ou não;
- Uma peça é escolhida ao acaso de um lote com 500 peças: a peça é defeituosa ou não;
- Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma comunidade e verifica-se se ela é favorável ou não a um determinado projeto.

Em todos esses casos, estamos interessados na ocorrência de:

- *sucesso* (cara, face 6, etc.); ou
- *fracasso* (coroa, face diferente de 5, etc.).

Para cada experimento acima, podemos definir uma v.a. X, que assume apenas dois valores:

1, se ocorrer sucesso;
0, se ocorrer fracasso.

Distribuição Bernoulli

Suponha que um experimento pode resultar num *fracasso* ou num *sucesso*.

- $X = 1$ quando o resultado é um sucesso;
- $X = 0$ quando é fracasso.

Vamos supor que:

$$\begin{cases} X = 1, & \text{com probabilidade } p \\ X = 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

Dizemos que X tem distribuição *Bernoulli* com parâmetro p.

Representamos $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Exemplo

a) Lançamento de uma moeda: o lançamento resulta em

$$\begin{cases} \textit{cara}, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ \textit{coroa}, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) No lançamento de uma dado a probabilidade de que saia um 6 é $\frac{1}{6}$, enquanto a probabilidade de que saia qualquer outro resultado é $\frac{5}{6}$.

c) Selecionamos uma pessoa ao acaso e verificamos se ela é favorável a um determinado projeto:

$$\begin{cases} \textit{favorável}, & \text{com probabilidade } p \\ \textit{contra}, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

Distribuição da Bernoulli

Definição

Uma variável aleatória X tem distribuição Bernoulli se sua função de distribuição de probabilidades é dada por

X	1	0
$\mathbf{P}(X = x)$	p	$1 - p$

Além disso, valem as seguintes propriedades:

- $\mathbf{E}(X) = p$
- $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$

Organização

1. Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas
   - Distribuição Bernoulli
   - Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

Suponha n ensaios de Bernoulli independentes, ou seja:

- Cada ensaio resulta em sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade $1 - p$
- Ensaios independentes

Seja X o número de sucessos nos n ensaios. Dizemos que X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p. Representamos

$$X \sim Bin(n, p)$$

Exemplo

- Número de caras em 3 lançamentos de moeda;
- Número de homens entre duas pessoas selecionadas aleatoriamente;
- O número de 6's obtidos em 3 lançamentos de dado.

Distribuição Binomial

Se uma v.a. X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p, então sua distribuição é dada por:

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$\Rightarrow$ X corresponde ao número de *sucessos* em n ensaios independentes com probabilidade de sucesso p.

Obs.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo

Jogamos um dado 4 vezes. Vamos calcular a distribuição do número de 6's obtidos nos 4 lançamentos.

Solução Seja X o número de 6's obtidos. Então $X \sim Bin\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
\mathbf{P}(X=0) &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-0} = 0,4822 \\
\mathbf{P}(X=1) &= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-1} = 0,3858 \\
\mathbf{P}(X=2) &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-2} = 0,1157 \\
\mathbf{P}(X=3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3} = 0,0154 \\
\mathbf{P}(X=4) &= \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-4} = 0,0008
\end{aligned}$$

Exemplo

Jogamos um dado 4 vezes. Vamos calcular a distribuição do número de 6's obtidos nos 4 lançamentos.

Solução Seja X o número de 6's obtidos. Então $X \sim Bin\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
\mathbf{P}(X=0) &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-0} = 0,4822 \\
\mathbf{P}(X=1) &= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-1} = 0,3858 \\
\mathbf{P}(X=2) &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-2} = 0,1157 \\
\mathbf{P}(X=3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3} = 0,0154 \\
\mathbf{P}(X=4) &= \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-4} = 0,0008
\end{aligned}
$$

Exemplo

Uma companhia produz comprimidos vendidos em caixas de 10. Se cada comprimido está fora da especificação com probabilidade 0,01 independentemente dos demais, calcule a probabilidade de que haja pelo menos 1 comprimido fora da especificação numa caixa com 10.

Solução Se X é o número de comprimidos fora da especificação numa caixa , então $X \sim Bin\,(10\ ;\ 0,01)$. Queremos $\mathbf{P}(X \geq 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbf{P}(X < 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) \\
\mathbf{P}(X = 0) &= \binom{10}{0} (0,01)^0\,(0,99)^{10} = 0,9044 \\
\mathbf{P}(X \geq 1) &= 1 - 0,9044 = 0,0956
\end{aligned}$$

Exemplo

Uma companhia produz comprimidos vendidos em caixas de 10. Se cada comprimido está fora da especificação com probabilidade 0,01 independentemente dos demais, calcule a probabilidade de que haja pelo menos 1 comprimido fora da especificação numa caixa com 10.

Solução Se X é o número de comprimidos fora da especificação

numa caixa , então $X \sim Bin\,(10\;;\;0,01)$. Queremos $\mathbf{P}(X \geq 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbf{P}(X < 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) \\
\mathbf{P}(X = 0) &= \binom{10}{0}(0,01)^0\,(0,99)^{10} = 0,9044 \\
\mathbf{P}(X \geq 1) &= 1 - 0,9044 = 0,0956
\end{aligned}$$

Exemplo do apostador

O apostador escolhe um número entre 1 e 6. Um dado é jogado 3 vezes, e se o número escolhido por ele sair i vezes, ele ganha i reais. Por outro lado, se não sair nenhuma vez ele perde 1 real. O jogo é justo?

Solução Pra saber se o jogo é justo ou não, devemos calcular a esperança do ganho.

Seja X o número de vezes que sai o número escolhido pelo apostador. Então $X \sim Bin\left(3, \frac{1}{6}\right)$. Seja Y o ganho do apostador em cada aposta, então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=-1) &= \mathbf{P}(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\\
\mathbf{P}(Y=1) &= \mathbf{P}(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}\\
\mathbf{P}(Y=2) &= \mathbf{P}(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}\\
\mathbf{P}(Y=3) &= \mathbf{P}(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}
\end{aligned}$$

A esperança do ganho é:

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_i y_i \times \mathbf{P}(Y=y_i) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$$

Exemplo do apostador

O apostador escolhe um número entre 1 e 6. Um dado é jogado 3 vezes, e se o número escolhido por ele sair i vezes, ele ganha i reais. Por outro lado, se não sair nenhuma vez ele perde 1 real. O jogo é justo?

Solução Pra saber se o jogo é justo ou não, devemos calcular a esperança do ganho.

Seja X o número de vezes que sai o número escolhido pelo apostador. Então $X \sim Bin\left(3, \frac{1}{6}\right)$. Seja Y o ganho do apostador em cada aposta, então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=-1) &= \mathbf{P}(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\\
\mathbf{P}(Y=1) &= \mathbf{P}(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}\\
\mathbf{P}(Y=2) &= \mathbf{P}(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}\\
\mathbf{P}(Y=3) &= \mathbf{P}(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}
\end{aligned}$$

A esperança do ganho é:

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_i y_i \times \mathbf{P}(Y=y_i) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$$

Propriedades da Binomial

Esperança e Variância

- $\mathbf{E}(X) = np$
- $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

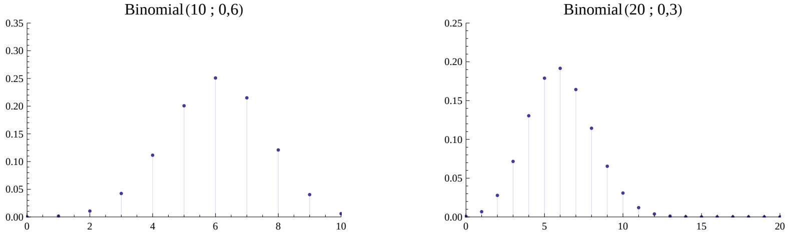

Gráfico da distribuição binomial.

Exercícios

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

a) zero peças defeituosas;

b) uma peça defeituosa;

c) pelo menos 2 peças defeituosas.

d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônius desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido.

a) O que você acha que é maior, $\mathbf{E}(X)$ ou $\mathbf{E}(Y)$?

b) Calcule $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{E}(Y)$.

Resolução

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Solução O sistema funciona se funcionam pelo menos 3 componentes. Seja X o número de componentes que funcionam. O que queremos é $\mathbf{P}(X \geq 3)$:

$$\mathbf{P}(X \geq 3) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5)$$

Mas $X \sim Bin(5, \frac{5}{6})$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = 3) &= \binom{5}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 0,1607 \\
\mathbf{P}(X = 4) &= \binom{5}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-4} \approx 0,4019 \\
\mathbf{P}(X = 5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-5} \approx 0,4019
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{P}(X \geq 3) = 0,1607 + 0,4019 + 0,4019 \approx 0,9645.$

Resolução

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Solução O sistema funciona se funcionam pelo menos 3 componentes. Seja X o número de componentes que funcionam. O que queremos é $\mathbf{P}(X \geq 3)$:

$$\mathbf{P}(X \geq 3) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5)$$

Mas $X \sim Bin(5, \frac{5}{6})$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = 3) &= \binom{5}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 0,1607 \\
\mathbf{P}(X = 4) &= \binom{5}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-4} \approx 0,4019 \\
\mathbf{P}(X = 5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-5} \approx 0,4019
\end{aligned}$$

Logo, $\quad \mathbf{P}(X \geq 3) = 0,1607 + 0,4019 + 0,4019 \approx 0,9645.$

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

a) zero peças defeituosas;

b) uma peça defeituosa;

c) pelo menos 2 peças defeituosas;

d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Solução Seja X o número de peças defeituosas num lote. Então $X \sim Bin(10; 0,1)$.

a) $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} \approx 0,3487$

b) $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{10}{1}(0,1)^1(0,9)^9 \approx 0,3874$

c) $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X < 2) = 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] = 1 - [0,3487 + 0,3874] \approx 0,2639$

d) Defina Y = número de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Então $Y \sim Bin(100; 0,1)$. Logo,

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10$$

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

a) zero peças defeituosas;
b) uma peça defeituosa;
c) pelo menos 2 peças defeituosas;
d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Solução Seja X o número de peças defeituosas num lote. Então $X \sim Bin(10; 0,1)$.

a) $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} \approx 0,3487$
b) $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{10}{1} (0,1)^1 (0,9)^9 \approx 0,3874$
c) $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X < 2) = 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] =$
$1 - [0,3487 + 0,3874] \approx 0,2639$
d) Defina $Y =$ número de peças defeituosas num lote de 100 peças.

   Então $Y \sim Bin(100; 0,1)$. Logo,

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10$$

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônius desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido. Calcule $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{E}(Y)$.

Solução Para calcular $\mathbf{E}(X)$ precisamos da distribuição de X.

$X \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$\mathbf{P}(X = 40) = \frac{40}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 33) = \frac{33}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 25) = \frac{25}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 50) = \frac{50}{148}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_x x\, \mathbf{P}(X = x) \\
&= 25 \cdot \mathbf{P}(X = 25) + 33 \cdot \mathbf{P}(X = 33) + 40 \cdot \mathbf{P}(X = 40) + 50 \cdot \mathbf{P}(X = 50) \\
&= 25 \cdot \frac{25}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 40 \cdot \frac{40}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \\
&\approx 39,28
\end{aligned}$$

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônius desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido. Calcule $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{E}(Y)$.

Solução Para calcular $\mathbf{E}(X)$ precisamos da distribuição de X.

$X \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$\mathbf{P}(X = 40) = \frac{40}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 33) = \frac{33}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 25) = \frac{25}{148}; \quad \mathbf{P}(X = 50) = \frac{50}{148}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_x x\, \mathbf{P}(X = x) \\
&= 25 \cdot \mathbf{P}(X = 25) + 33 \cdot \mathbf{P}(X = 33) + 40 \cdot \mathbf{P}(X = 40) + 50 \cdot \mathbf{P}(X = 50) \\
&= 25 \cdot \frac{25}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 40 \cdot \frac{40}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \\
&\approx 39,28
\end{aligned}$$

Continuação...

Para calcular $\mathbf{E}(Y)$ precisamos da distribuição de Y.
$Y \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$\mathbf{P}(X = 40) = \mathbf{P}(X = 33) = \mathbf{P}(X = 25) = \mathbf{P}(X = 50) = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{y} y\, \mathbf{P}(Y = y) \\
&= 25 \cdot \mathbf{P}(Y = 25) + 33 \cdot \mathbf{P}(Y = 33) + 40 \cdot \mathbf{P}(Y = 40) + 50 \cdot \mathbf{P}(Y = 50) \\
&= 25 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 37
\end{aligned}$$