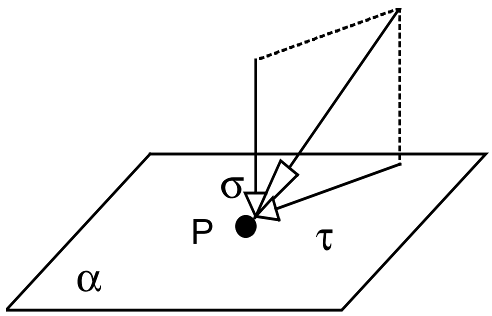
16ª AULA

ESTADO DE TENSÕES E CÍRCULO DE MOHR

1. Tensões num Plano Genérico

Seja P um ponto dentro da massa de solo e α um plano passando por P. A tensão atuante em P não é necessariamente normal ao plano α. Numa situação genérica, ela pode ser decomposta em duas componentes, uma normal e outra paralela ao plano, como se mostra na figura a seguir.



A componente normal é chamada de tensão normal, σ, e a componente tangencial é chamada de tensão de cisalhamento, τ.

Se outro for o plano considerado passando por P, outros serão os valores das componentes σ e τ. Demonstra-se que sempre existem três planos, ortogonais entre si, em que a tensão atuante é normal ao próprio plano, não havendo portanto a componente de cisalhamento. Estes planos recebem o nome de planos principais de tensão e as tensões neles atuantes são chamadas tensões principais. A maior delas é a tensão principal maior, σ_1, a menor é a tensão principal menor, σ_3, e a outra é chamada de tensão principal intermediária, σ_2. Tem-se portanto $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Em casos especiais, as três tensões principais podem ser iguais, ou seja $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Nesse caso, tem-se o chamado estado hidrostático de tensões. Também pode ocorrer que $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, condição esta conhecida como estado geostático de tensões.

Nos problemas envolvendo a resistência ao cisalhamento dos solos, interessam principalmente σ_1 e σ_3, pois as tensões de cisalhamento, como se verá, são fruto das diferenças entre as tensões principais e a maior diferença ocorre entre σ_1 e σ_3. De maneira geral, portanto, estuda-se o estado de tensões no plano principal intermediário (em que ocorrem σ_1 e σ_3), que é o caso da seção transversal de uma fundação corrida, de uma vala escavada, de um aterro rodoviário ou da seção transversal de uma barragem de terra. As tensões principais intermediárias só são consideradas em problemas especiais. Dessa forma, passa-se de um problema tridimensional para um problema bidimensional, de solução muito mais simples.

Conhecendo-se os planos e as tensões principais num ponto (figura a a seguir), pode-se determinar as tensões em qualquer plano passando por este ponto. Este cálculo pode ser feito pelas equações de equilíbrio das forças aplicadas a um prisma triangular definido pelos dois planos principais e o plano considerado, como indica a figura b.

Da figura c obtêm-se as forças na direção normal ao plano considerado :

$$\sigma_\alpha A = \sigma_1 A \cos^2\alpha + \sigma_3 A \mathrm{sen}^2\alpha \rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \mathrm{sen}^2\alpha$$

e também as forças na direção tangencial ao plano considerado:

$$\tau_\alpha A = \sigma_1 A \mathrm{sen}\alpha \cos\alpha - \sigma_3 A \mathrm{sen}\alpha \cos\alpha \rightarrow \tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_3)\mathrm{sen}\alpha \cos\alpha$$

Lembrando que:

$$\mathrm{sen}2\alpha = 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$$

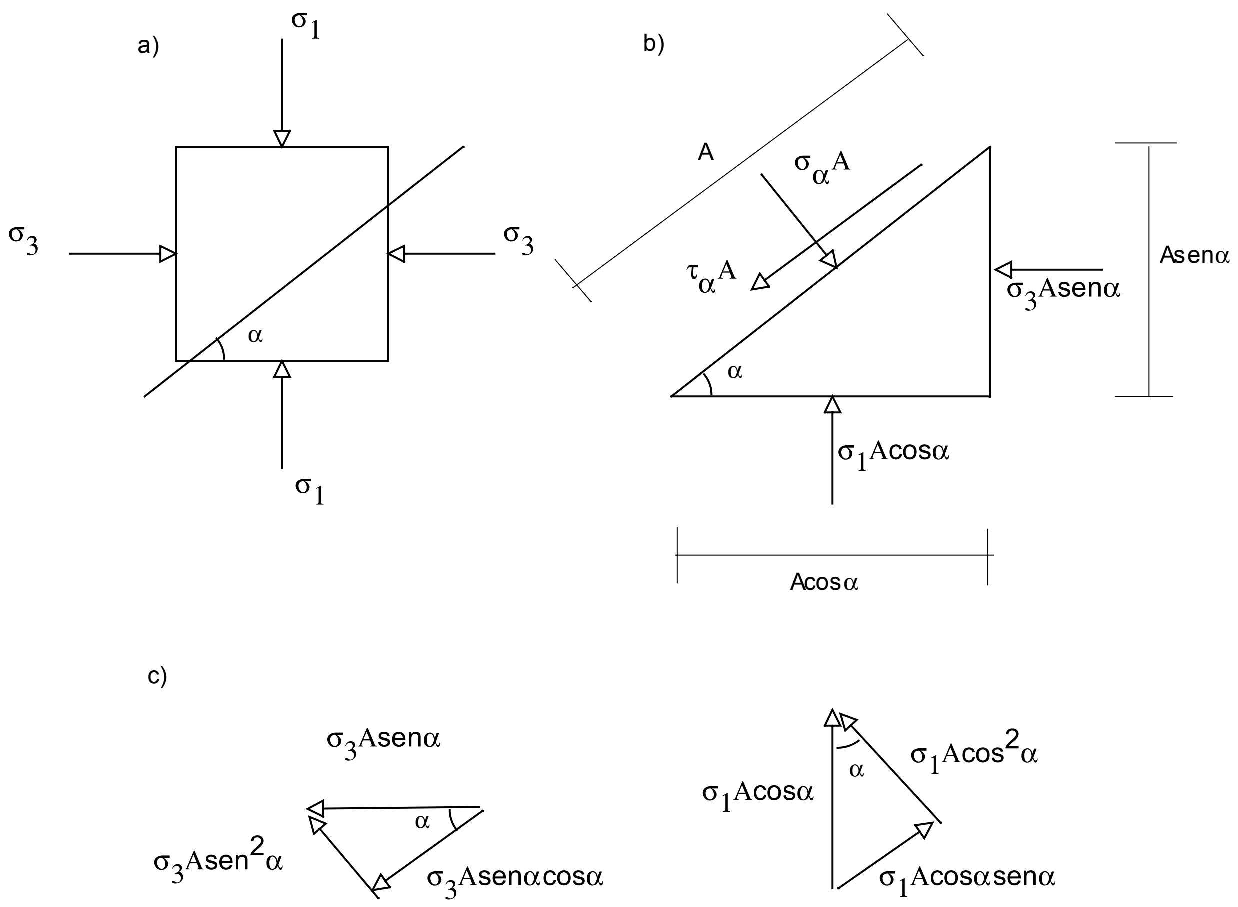
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

tem-se finalmente:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha \qquad (1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\mathrm{sen}2\alpha \qquad (2)$$



Para o correto uso das expressões (1) e (2), deve-se ter em mente a seguinte convenção de sinais:

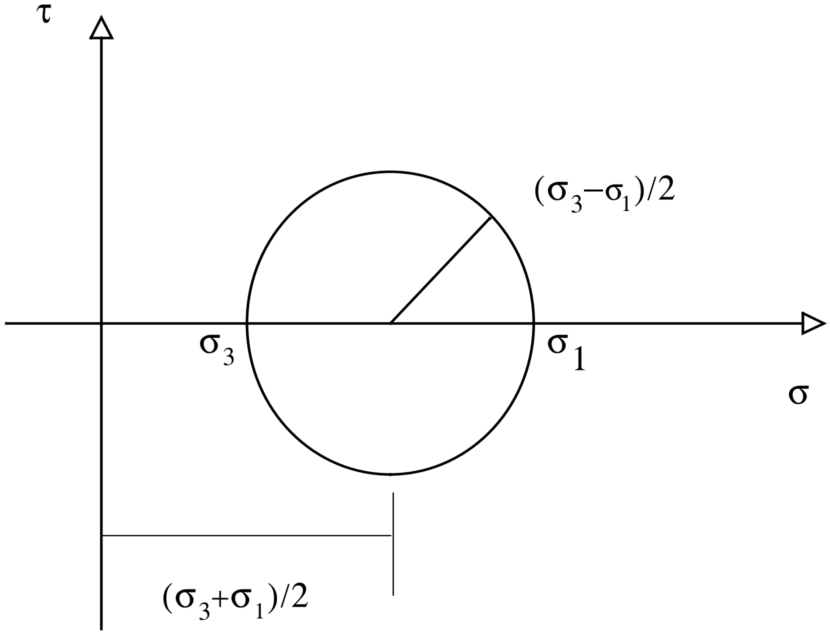
$\sigma > 0$, quando a tensão normal for de compressão;

$\tau > 0$, quando o sentido da tensão de cisalhamento tender a girar o elemento de solo no sentido anti-horário; e

$\alpha > 0$, quando o ângulo for marcado a partir do plano principal maior no sentido anti-horário.

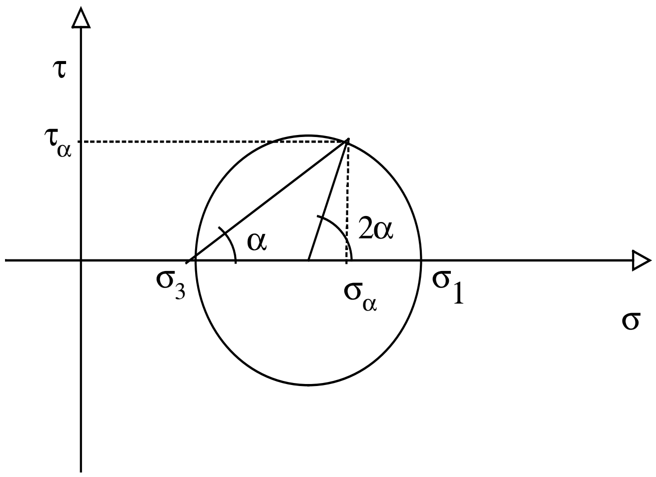
2. Círculo de Mohr

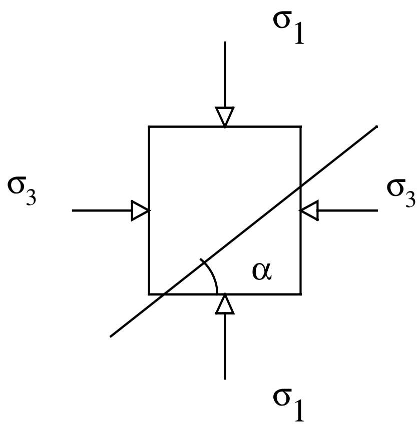
O estado de tensões atuantes em todos os planos passando por um ponto pode ser representado graficamente num sistema de coordenadas em que as abcissas são as tensões normais e as ordenadas são as tensões cisalhantes. Neste sistema, as equações 1 e 2 definem um círculo, como representado na figura. Este é o círculo de Mohr. Ele é facilmente construído quando são conhecidas as duas tensões principais (como as tensões vertical e horizontal num terreno com superfície horizontal). O raio do círculo é igual a $(\sigma_1-\sigma_3)/2$ e seu centro se posiciona no eixo das abcissas com coordenada $(\sigma_1+\sigma_3)/2$.



O círculo também pode ser construído quando se conhecem as tensões normais e de cisalhamento em dois planos quaisquer (desde que nestes dois planos as tensões normais não sejam iguais, o que tornaria o problema indefinido). Construído o círculo de Mohr, ficam facilmente determinadas as tensões em qualquer plano.

Identificado um plano pelo ângulo α que forma com o plano principal maior, as componentes da tensão atuante neste plano são determinadas pela intersecção da reta que passa pelo centro do círculo e forma um ângulo de 2α com o eixo das abcissas, com a própria circunferência, como se deduz das equações 1 e 2. O mesmo ponto pode ser obtido pela intersecção com a circunferência da reta que, partindo do ponto representativo da tensão principal menor, forma um ângulo α com o eixo das abcissas.





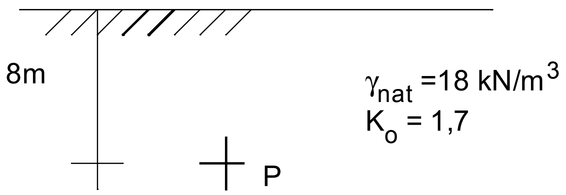
Da análise do círculo de Mohr, diversas conclusões podem ser obidas, como as seguintes:

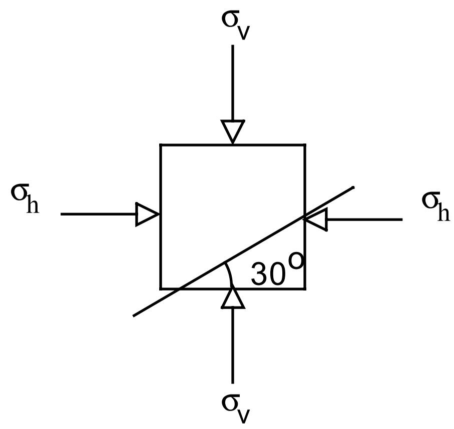
- A máxima tensão de cisalhamento em módulo ocorre em planos que formam 45º com os planos principais.
- A máxima tensão de cisalhamento é igual a semi-diferença das tensões principais $(\sigma_1\text{-}\sigma_3)/2$.

- As tensões de cisalhamento em planos ortogonais são numericamente iguais, mas de sinal contrário.
- Em dois planos formando o mesmo ângulo com o plano principal maior, com sentido contrário, ocorrem tensões normais iguais e tensões de cisalhamento numericamente iguais, mas de sentido contrário.

Exemplo

Para a camada de argila abaixo, calcular as tensões atuantes no ponto P num plano formando um ângulo de 30° com a horizontal conforme indicado na figura.





Elemento de solo no ponto P

Resolução

A superfície do terreno é horizontal, o que indica que os planos horizontal e vertical são planos principais. Como a argila é sobreadensada, apresentando um coeficiente de empuxo em repouso superior a um, tem-se $\sigma_h > \sigma_v$, e portanto $\sigma_h = \sigma_1$ e $\sigma_v = \sigma_3$.

$$\sigma_3 = 18x8 = 144kPa$$
$$\sigma_1 = 1{,}7x144 = 244{,}8kPa$$

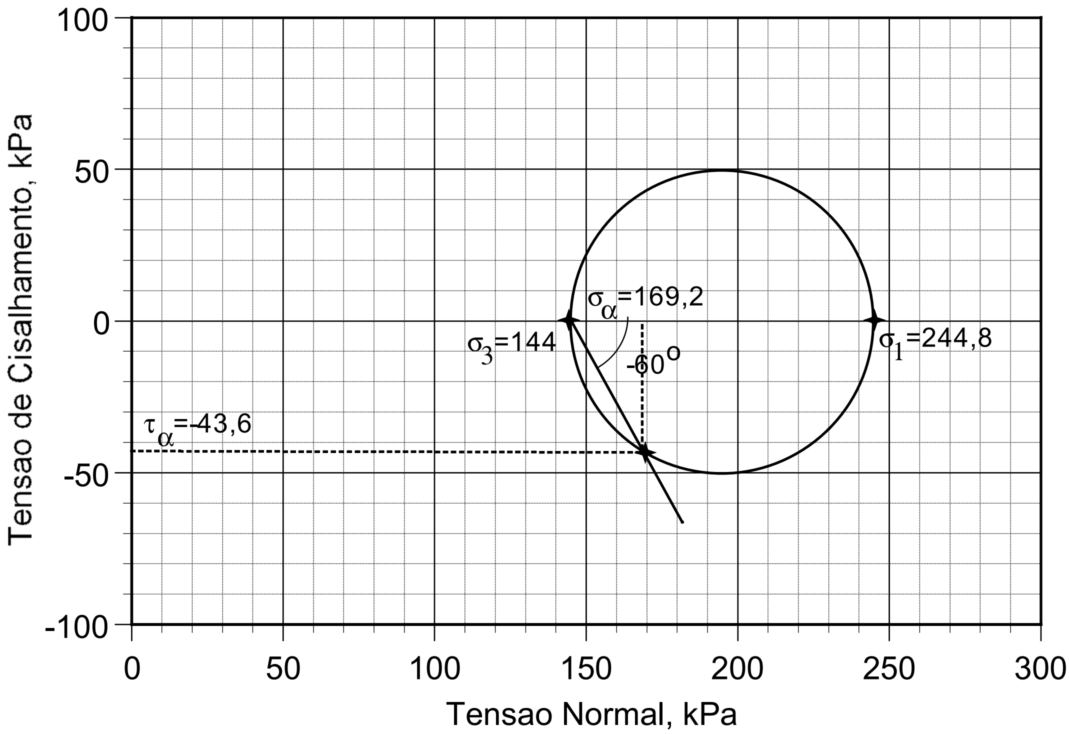
Deve-se observar também que o ângulo α que o plano considerado forma com o plano principal maior (plano vertical) é de 60°, e de sinal negativo, pois partindo-se do plano principal maior em direção ao plano considerado, o sentido é horário.

Pelas expressões 1 e 2:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha = \frac{244{,}8 + 144}{2} + \frac{244{,}8 - 144}{2}\cos(2x(-60^0)) = 169{,}2 \text{ kPa}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\operatorname{sen}2\alpha = \frac{244{,}8 - 144}{2}\operatorname{sen}(2x(-60^0)) = -43{,}6 \text{ kPa}$$

Pelo círculo de Mohr:

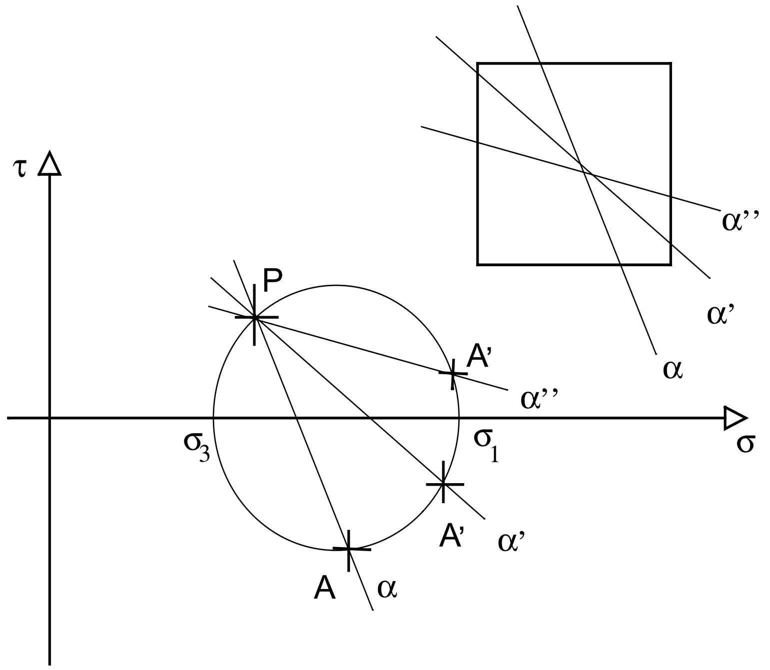


3. Determinação das tensões a partir do polo

Há um ponto particular do círculo de Mohr, chamado polo (P), que tem a seguinte propriedade: uma reta passando por P e por qualquer ponto A do círculo de Mohr será paralela ao plano no qual atuam as tensões σ e τ coordenadas do ponto A. De forma análoga, traçando-se por P uma reta paralela ao plano de que se quer conhecer as tensões atuantes, tal paralela interceptará o círculo de Mohr no ponto A cujas coordenadas serão justamente as tensões σ e τ procuradas.

Na figura a seguir, conhecido o polo P, em quais planos atuam as tensões dadas por A, A' e A''? Nos planos α, α' e α'', paralelos às direções PA, PA' e PA'', respectivamente.

Se inversamente, também conhecido o polo, desejasse se conhecer as tensões atuantes nos planos α, α' e α'', bastaria traçar paralelas aos planos pelo polo. Os pontos onde essas retas cortam o círculo de Mohr (A, A' e A'') fornecem as tensões σ e τ desejadas.

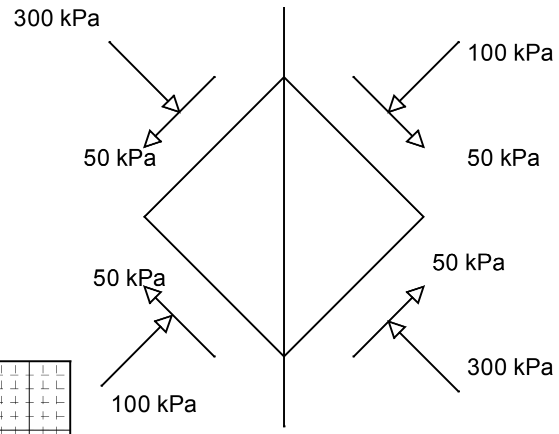


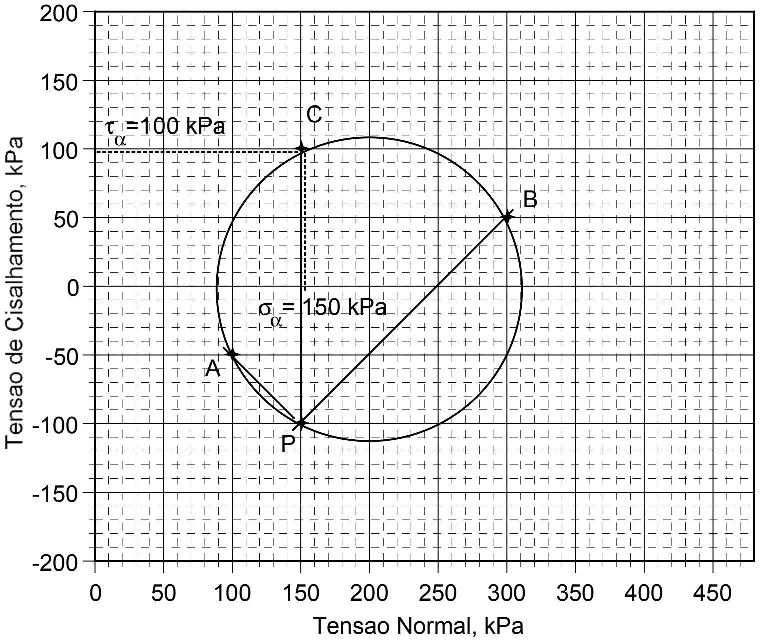
Para se localizar o polo P no círculo, devem ser conhecidas as tensões σ e τ atuantes em pelo menos um plano passando pelo elemento. Faz-se então a construção inversa: traça-se pelo ponto (σ, τ) do círculo de Mohr uma paralela ao plano do qual se conhecem as tensões. Onde essa reta cortar o círculo de Mohr estará o polo P.

O emprego do conceito de polo é bastante útil na resolução de problemas que de outra forma, seriam de difícil solução pelos métodos vistos anteriormente. O exemplo a seguir ilustra a utilização do polo.

Exemplo:

Determinar as tensões atuantes num plano vertical passando pelo elemento da figura.





Inicialmente deve-se traçar o círculo de Mohr. São conhecidos dois pontos do círculo: A, de coordenadas (100, -50) e B, de coordenadas (300, +50). O centro do círculo localiza-se na intersecção da reta unindo os dois pontos com o eixo das abcissas. Para se determinar o polo P, por A traça-se uma paralela ao plano no qual atuam as tensões dadas por A; ou da mesma forma, por B traça-se uma paralela ao plano no qual atuam as tensões dadas por B. Onde essas retas cortam o círculo, aí está o polo. Finalmente por P, traça-se uma paralela ao plano vertical em que se deseja determinar as tensões. Essa reta corta o círculo no ponto C, com coordenadas (150, 100). Portanto σ = 150 kPa e τ = 100 kPa no plano vertical.

4. Círculo de Mohr em termos de tensões efetivas

O círculo de Mohr pode ser traçado tanto em termos de tensões totais como em termos de tensões efetivas. Seja o estado de tensões num ponto dentro da massa de solo representado pelo círculo de Mohr posicionado a direita na figura abaixo. Seja também u o valor da pressão neutra no ponto. Como se sabe, esta age em todas as direções com a mesma magnitude. Portanto, pelo princípio das tensões efetivas, $\sigma' = \sigma - u$, ou seja, as tensões normais efetivas em todos os planos serão iguais as tensões normais totais correspondentes subtraídas de um valor fixo que é a pressão neutra. Por outro lado, como a água não transmite tensões de cisalhamento, as tensões de cisalhamento totais serão sempre efetivas ($\tau' = \tau$). Conclui-se que o estado de tensões num ponto, em termos de tensões efetivas, também resulta num círculo, de mesmo diâmetro do de tensões totais, só que deslocado para a esquerda do valor correspondente à pressão neutra. Obviamente, no caso de pressões neutras negativas, o deslocamento do círculo de tensões efetivas é para a direita.