

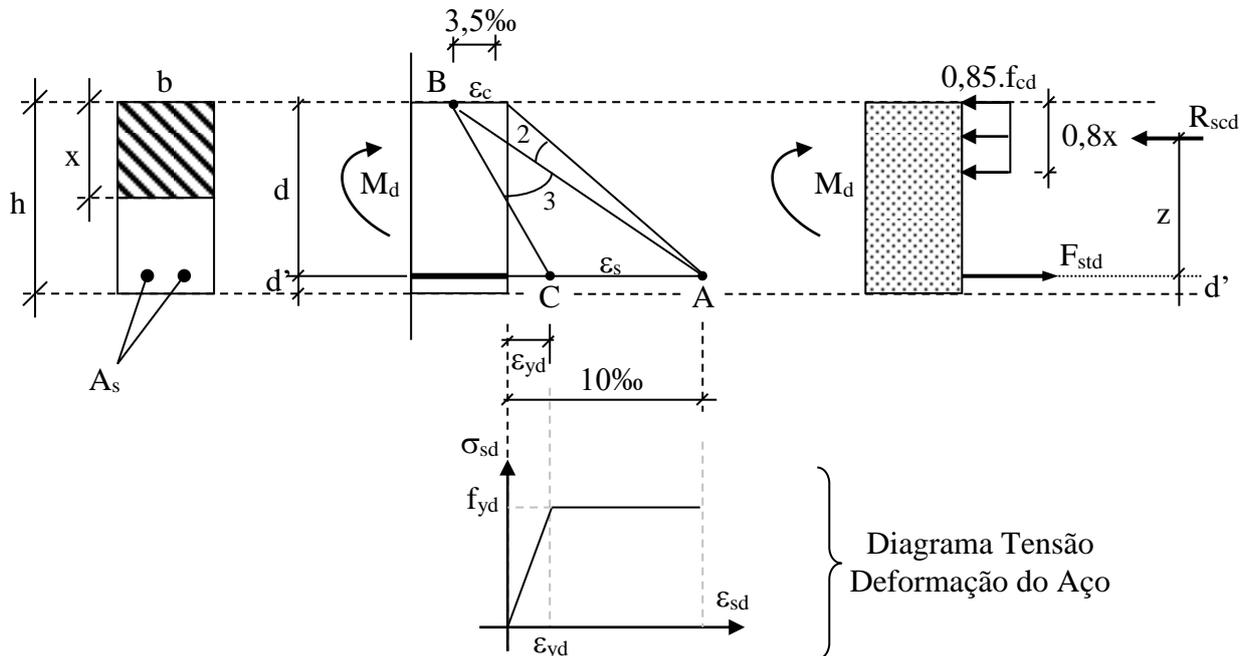


1

Reforço em Vigas CONCRETO ARMADO FLEXÃO

1. Determinação da capacidade resistente das seções:

a) Seção Retangular:



a.1) Hipóteses admitidas:

1) Aço escoado a tração → compatível com domínios 2 e 3

$$x_{34} \leq x \leq 0$$

2) Diagrama de tensões do Concreto: Diagrama retangular

$$\text{Com } f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$$

3) Diagrama tensão deformação do Aço: com $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad c / E_s = 210 \text{ GPa}$$

$$\therefore x_{34} = \frac{3,5\%}{3,5\% + \varepsilon_{yd}} d$$

a.2) Determinação de $x_{ln} = x$ (profundidade da linha neutra)

$$\text{Aço escoando: } F_{std} = A_s \cdot f_{yd}$$

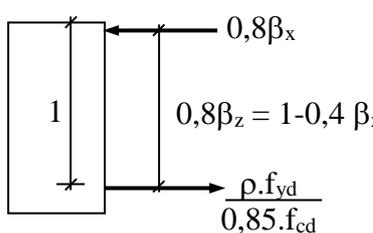
$$\begin{aligned} \text{Equilíbrio de normais: } R_{ccd} = F_{std} \quad c / R_{ccd} &= 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \\ &= 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{Donde: } x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot f_{cd} \cdot b} \leq x_{34} \text{ [Hipótese 1]}$$

a.3) Determinação de $M_{d \text{ res, I}}$: momento de calculo resistente de seção antes do reforço

$$z = d - 0,4 \cdot x$$

$$M_{d \text{ res, I}} = F_{std} \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

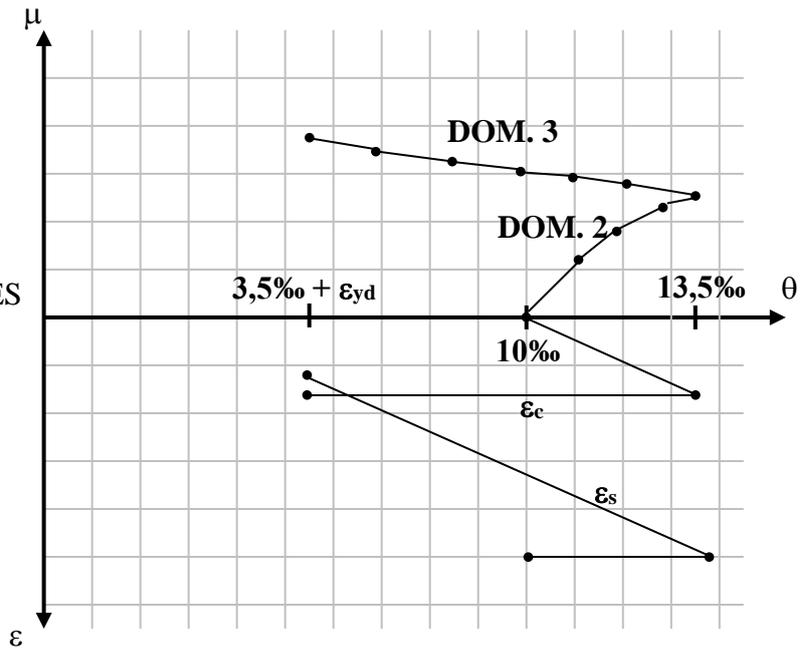
$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{M_d}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \quad ; \quad \beta_x = \frac{x}{d} \\ \mu &= 0,8 \cdot \beta_x (1 - 0,4 \cdot \beta_x) \end{aligned} \right\} \text{em forma reduzida}$$


* Caso esta condição não seja cumprida, o dimensionamento original da seção não é considerado adequado e este por si só indica a necessidade de reforço (provavelmente acréscimo da seção na zona comprimida).

LUGAR GEOMÉTRICO
DOS DIMENSIONAMENTOS
EM E.L.U A FLEXÃO SIMPLES

$$\theta = \frac{d}{r} \text{ curvatura reduzida}$$

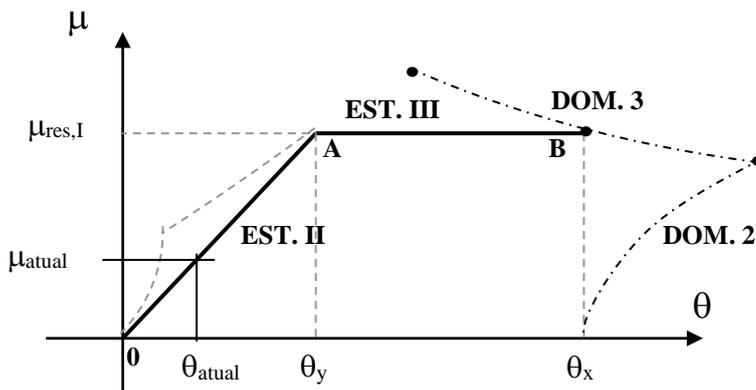
$$\theta = \varepsilon_c + \varepsilon_s$$



a.4) O Diagrama (momento-curvatura)_{reduzido} pode ser aproximadamente obtido com as seguintes posturas simplificadoras

Com θ_x obtido pelos procedimentos de análise em E.L.U respeitados os domínios de dimensionamento; θ_y corresponde à curvatura na qual $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$.

$$\mu_y = \mu_x = \mu_{RES,I}$$

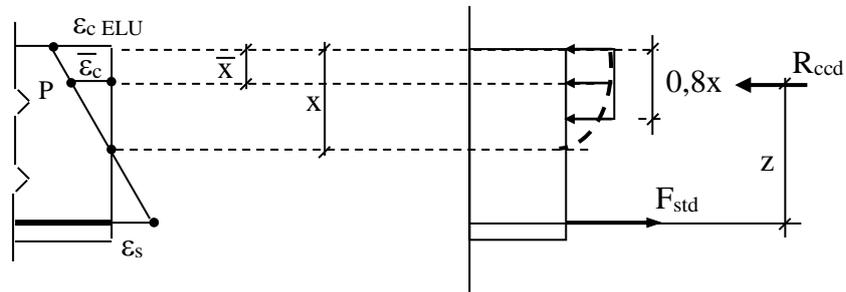


a.5) Deformações Específicas e Curvaturas

A transição entre o trecho AO e OB do diagrama onde a seção passa do estado elástico linear (por adoção simplificada) para o estágio plástico depende da determinação de ε_c .

Em E.L.U tanto ε_c quanto ε_s são conhecidos sendo a base para a simplificação adotada, ou seja:

Em B: (ELU)



$$R_{ccd} = f_{yd} \cdot A_s$$

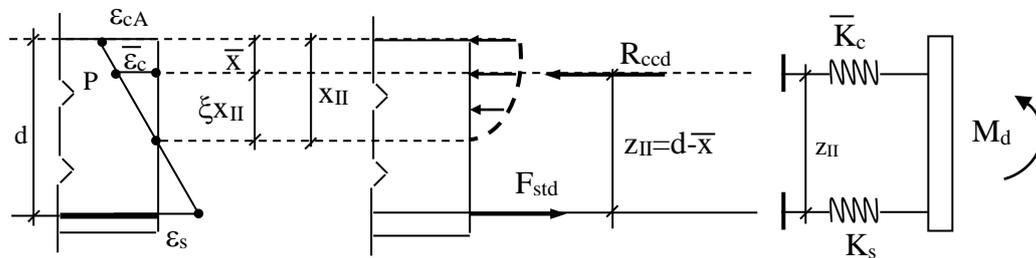
$$\bar{x} = 0,4 \cdot x_{ELU}$$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_c}{x_{ELU}} (x_{ELU} - \bar{x})$$

$$\bar{\varepsilon}_c = 0,6 \cdot \bar{\varepsilon}_{c,ELU}$$

Adota-se $z = d - 0,4 \cdot x$ constante em todo o trecho BA. Isto corresponde a que R_{ccd} e F_{std} também se mantenham constantes, pois $\mu_A = \mu_B = \mu_{RES,I}$ por hipótese.

Em A: (Limites entre EST. I e EST. II)



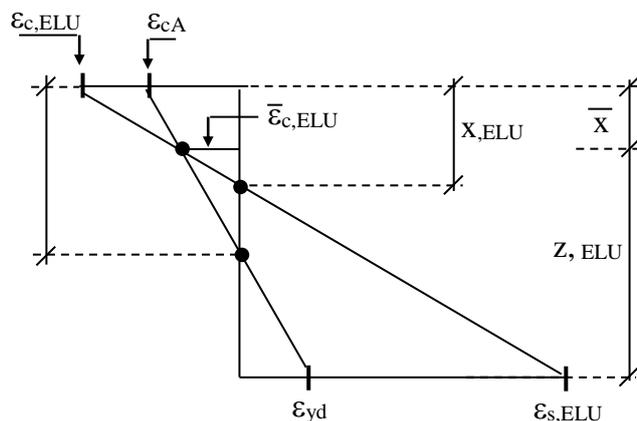
Admite-se $\bar{x}_{II} = \bar{x}_{III} = \bar{x}_{ELU} \therefore z_{II} = z_{III} = z_{ELU}$

SIMPLIFICAÇÃO

Em A:

$$\bar{k}_c = \frac{R_{ccd}}{\bar{\varepsilon}_{c,ELU}}$$

$$k_s = \frac{F_{std}}{\varepsilon_{yd}}$$



$$\text{com } \beta_{z_{ELU}} = \frac{z_{ELU}}{d} \text{ tem-se: } \theta_y = \frac{\bar{\varepsilon}_{c,ELU} + \varepsilon_{yd}}{\beta_{z_{ELU}}} \text{ e } \varepsilon_{cA} = \theta_y - \varepsilon_{yd}$$

Portando, no trecho AO (EST. II) do diagrama (μ, θ)

$$\theta_{atual} = \frac{M_{d,atual}}{M_{d,RES,I}} \cdot \theta_y$$

$$x_{II} = \frac{z_{ELU}}{1 + \frac{k_c}{k_s}} + \bar{x} \text{ como } F_{std} = R_{ccd} \rightarrow \frac{\bar{k}_c}{k_s} = cte$$

e portanto $x_{II} = \text{constante}$ e todo o trecho AO

$$x_{II} = \frac{z_{ELU}}{1 + \frac{\varepsilon_{yd}}{0,6 \cdot \varepsilon_{c,ELU}}} + \bar{x}$$

$$\text{ou } \frac{M_{d,atual}}{z} = F_{std} = R_{ccd}$$

$$\varepsilon_{s,atual} = \frac{F_{std}}{k_s} \quad \bar{\varepsilon}_{c,atual} = \frac{R_{ccd}}{\bar{k}_c}$$

$$x_{II} - \bar{x} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_c}{\bar{\varepsilon}_c + \varepsilon_s} \right)_{atual} \cdot z$$

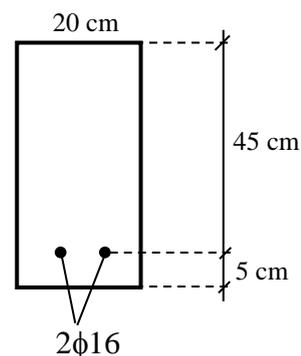
$$x_{II} = \bar{x} + \frac{z}{1 + \left(\frac{\varepsilon_s}{\bar{\varepsilon}_c} \right)_{atual}} \quad \varepsilon_c = \frac{\bar{\varepsilon}_c}{x_{II} - \bar{x}} \cdot x_{II}$$

Como por equilíbrio $F_{std} = R_{ccd}$

$$\frac{\varepsilon_s}{\bar{\varepsilon}_c} = \frac{\bar{k}_c}{k_s} = cte \rightarrow x_{II} = cte$$

1) EXEMPLO

$$fck = 20MPa$$



$$F_{std} = 174 \text{ kN} \quad ; \quad 0,8 \cdot x_{,ELU} = \frac{174}{0,85 \frac{20000}{1,4} 0,2} = 0,07165$$

$$x_{ELU} = 0,08956 \text{ cm} \quad ; \quad \beta_{x,ELU} = 0,199 < 0,259 \quad \therefore \text{DOM.2}$$

$$\varepsilon_{s,ELU} = 10\text{‰} \quad \text{portanto}; \quad \varepsilon_{c,ELU} = \frac{10\text{‰}}{1 - 0,199} \cdot 0,199 = 2,484\text{‰}$$

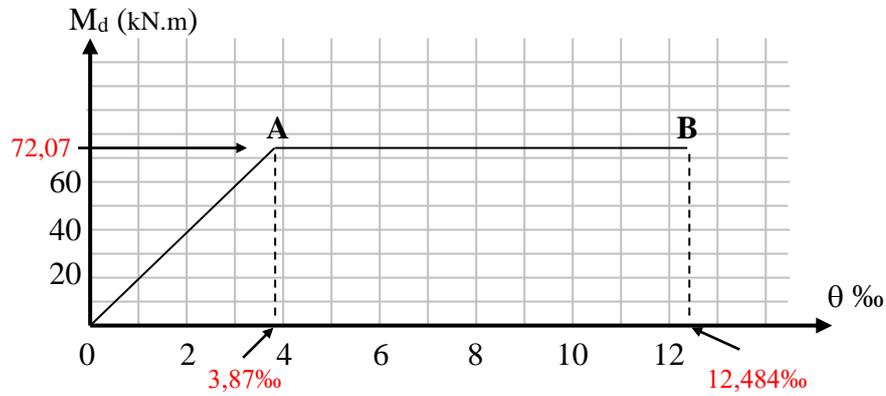
$$\bar{\varepsilon}_{c,ELU} = \bar{\varepsilon}_{c,A} = 0,6 \cdot 2,484\text{‰} = 1,490\text{‰} \quad ; \quad z_{,ELU} = 0,414 \text{ m}$$

$$k_s = \frac{F_{std}}{\varepsilon_{yd}} = \frac{174}{2,07} \cdot 10^3 = 84.058 \text{ kN} \quad \quad \bar{k}_c = \frac{F_{std}}{\varepsilon_{c,A}} = \frac{174}{1,49} \cdot 10^3 = 116.778 \text{ kN}$$

$$x_{II} = \frac{z_{ELU}}{1 + \frac{\bar{k}_c}{k_s}} + \bar{x} = \frac{0,414}{1 + \frac{116.778}{84.058}} + 0,03582 = 0,2092 \text{ m}$$

2) **EXEMPLO**

Para a viga do exemplo anterior desenhar o diagrama momento x curvatura-relativa aproximado.



$$z_{ELU} = d - 0,4x_{ELU} = 0,45 - \frac{0,07165}{2} = 0,414 \text{ m}$$

$$M_{d,ELU} = F_{std} \cdot z_{ELU} = 174 \cdot 0,414 \cong 72,07 \text{ kN.m}$$

$$\text{com } \theta_{x,ELU} = \varepsilon_{c,ELU} + \varepsilon_{s,ELU} = (2,484 + 10) \text{‰} = 12,484 \text{‰}$$

Como

$$\theta_y = \frac{\bar{\varepsilon}_{c,ELU} + \varepsilon_{yd}}{z_{ELU}} \cdot d$$

e

$$\bar{\varepsilon}_{c,ELU} = 0,6 \cdot \varepsilon_{c,ELU} = 0,6 \cdot 2,484 \text{‰} = 1,49 \text{‰}$$

$$\therefore \theta_y = \frac{1,49 + 2,07}{0,414} \cdot 0,45 = 3,87 \text{‰}$$

3) EXEMPLO

Reforçar a viga anterior para uma capacidade de $M_d = 110\text{kN.m}$, sabendo que atualmente a sua seção está solicitada em 36 kN.m , valor de cálculo.

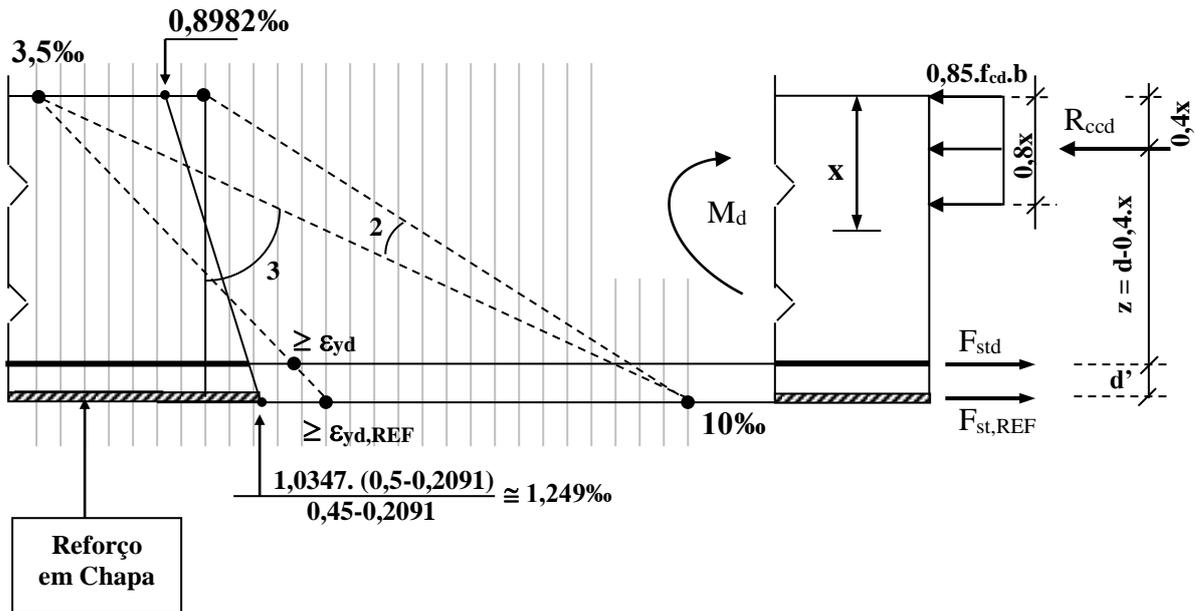
Tomando-se o diagrama momento curvatura anterior para o momento de 36 kN.m

$$\theta_{\text{atual}} = \frac{3,87\text{‰}}{72,07} \cdot 36 = 1,933\text{‰} \quad \text{por semelhança de triângulos}$$

$$x_{II} = \frac{0,414}{1 + \frac{2,07}{1,49}} + \frac{0,07165}{2} = 0,2091\text{m} \quad \text{recalculando pela 2ª expressão}$$

$$\varepsilon_{c,\text{atual}} = \theta_{\text{atual}} \cdot \frac{x_{II}}{d} = 1,933\text{‰} \cdot \frac{0,2091}{0,45} = 0,8982\text{‰}$$

$$\varepsilon_{s,\text{atual}} = \theta_{\text{atual}} \cdot \frac{(d - x_{II})}{d} = 1,933\text{‰} \cdot \frac{(0,45 - 0,2091)}{0,45} = 1,0347\text{‰}$$



Supondo que o aço existente e o aço de reforço estejam escoados para a situação de dimensionamento ao E.L.U:

$$F_{std} = A_s \cdot f_{yd} \quad (\text{conhecido})$$

$$F_{std,REF} = A_{s,REF} \cdot f_{yd,REF} \quad (\text{c/ } A_s \text{ a ser determinado})$$

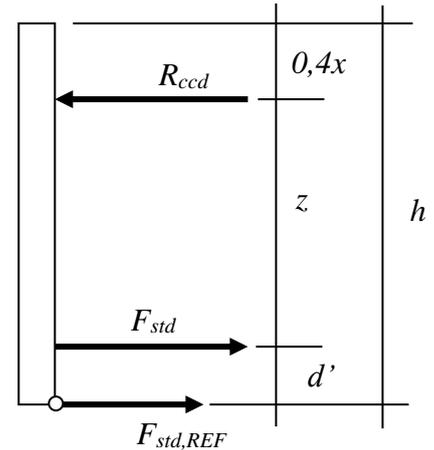
Portanto,

$$M_d = R_{ccd} \cdot (h - 0,4 \cdot x) - F_{std} \cdot d' \quad ; \quad \text{Donde :}$$

$$\mu' = \frac{M_d + F_{std} \cdot d'}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2} \quad e \quad 0,8 \cdot b \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (h - 0,4 \cdot x) - M_d'$$

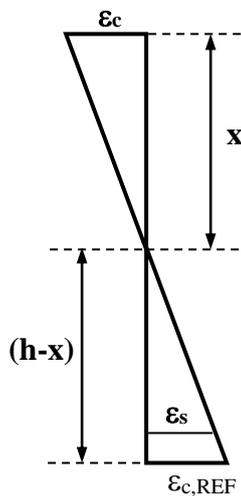
$$\mu' = \frac{M_d + M_d'}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2}$$

$$0,8 \cdot x = h \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu'}\right) \quad \text{ou} \quad 0,8 \cdot \frac{x}{h} = \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu'}\right)$$



Para que se cumpra a hipótese de que os aços estejam escoados:

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \quad e \quad \varepsilon_{s,REF} \geq \varepsilon_{yd,REF}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para DOMÍNIO 3 : } \varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰} \\ \text{Para DOMÍNIO 2 : } \varepsilon_{s,REF} = 10 \text{ ‰} \end{array} \right.$$

Assim:

Supondo DOMÍNIO 3:

$$\frac{\varepsilon_{c,REF}}{h-x} = \frac{3,5 \text{ ‰}}{x}$$

$$\varepsilon_{c,REF} = 3,5 \text{ ‰} \frac{h-x}{x}$$

Com $\varepsilon_{c,REF} \leq 10 \text{ ‰}$, do contrário DOMÍNIO 2

Aplicando o acima exposto ao exemplo

$$\mu' = \frac{110 + 174 \cdot 0,05}{0,85 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,20 \cdot 0,50^2} = 0,196$$

$$0,8 \cdot x = 0,50 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,196}\right) = 0,11 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad x = 0,138 \text{ m}$$

$$\varepsilon_{c,REF} = 3,5 \text{ ‰} \frac{0,50 - 0,138}{0,138} = 9,18 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$$

Portanto confirmado DOM. 3

$\varepsilon_{s,REF} = \varepsilon_{c,REF} - \varepsilon_{c,REF,atual} \leftarrow$ Deformação existente no concreto antes do reforço

No nosso exemplo:

$$\varepsilon_{s,REF} = 9,18\% - \frac{1,0347\%}{0,45 - 0,2091} \cdot (0,50 - 0,2091)$$

$$\varepsilon_{s,REF} = 9,18\% - 1,249\% = 7,93\%$$

Se o aço utilizado no reforço for de $f_{yk} = 250$ MPa

$$\varepsilon_{yd,REF} = \frac{250}{\underbrace{1,15}_{\gamma_s} \cdot \underbrace{210 \cdot 10^3}_{E_s}} = 1,035\% \quad \text{Caracterizando que o aço do reforço escoou}$$

Para o aço existente:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{c,REF}}{h - x} \cdot (d - x)$$

$$\varepsilon_s = \frac{9,18\%}{0,50 - 0,138} \cdot (0,45 - 0,138) \cong 7,92\% > \varepsilon_{yd}$$

Portanto o aço existente também escoou!

$$A_{s,REF} = \frac{(0,8 \cdot x \cdot d \cdot 0,85 f_{cd} - A_s \cdot f_{yd})}{f_{yd,REF}}$$

$$A_{s,REF} = \frac{\left(0,11 \cdot 0,20 \cdot 0,85 \cdot \frac{20000}{1,4} - 174\right)}{\frac{25}{1,15}} = 4,29 \text{ cm}^2$$

Para um reforço de chapa:

