

ESTRUTURA DE DADOS III

GRAFOS – Conceitos Básicos

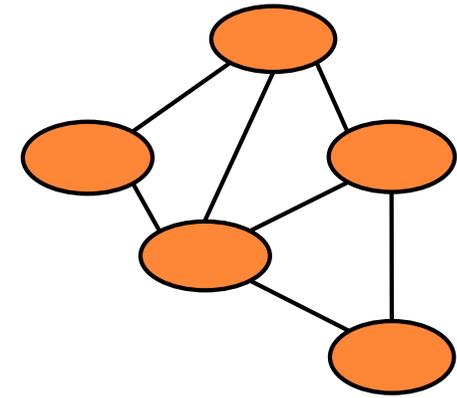
Profa. Elaine Parros Machado de Sousa
alterações: Cristina Dutra de Aguiar

Material baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr. e
Maria Cristina Oliveira.

Como modelar problemas que envolvam conjuntos de **objetos** e **relacionamentos** entre pares de objetos estabelecidos por conexões?



MOTIVAÇÃO...



○ Grafos

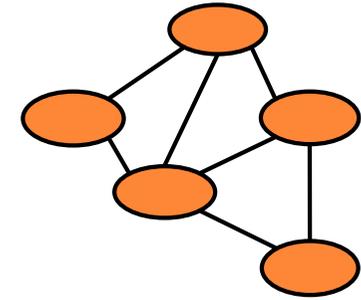
- estruturas abstratas que modelam objetos e a relação (conexão) entre eles

○ Teoria dos Grafos

- área de matemática combinatória voltada à resolução de problemas em computação



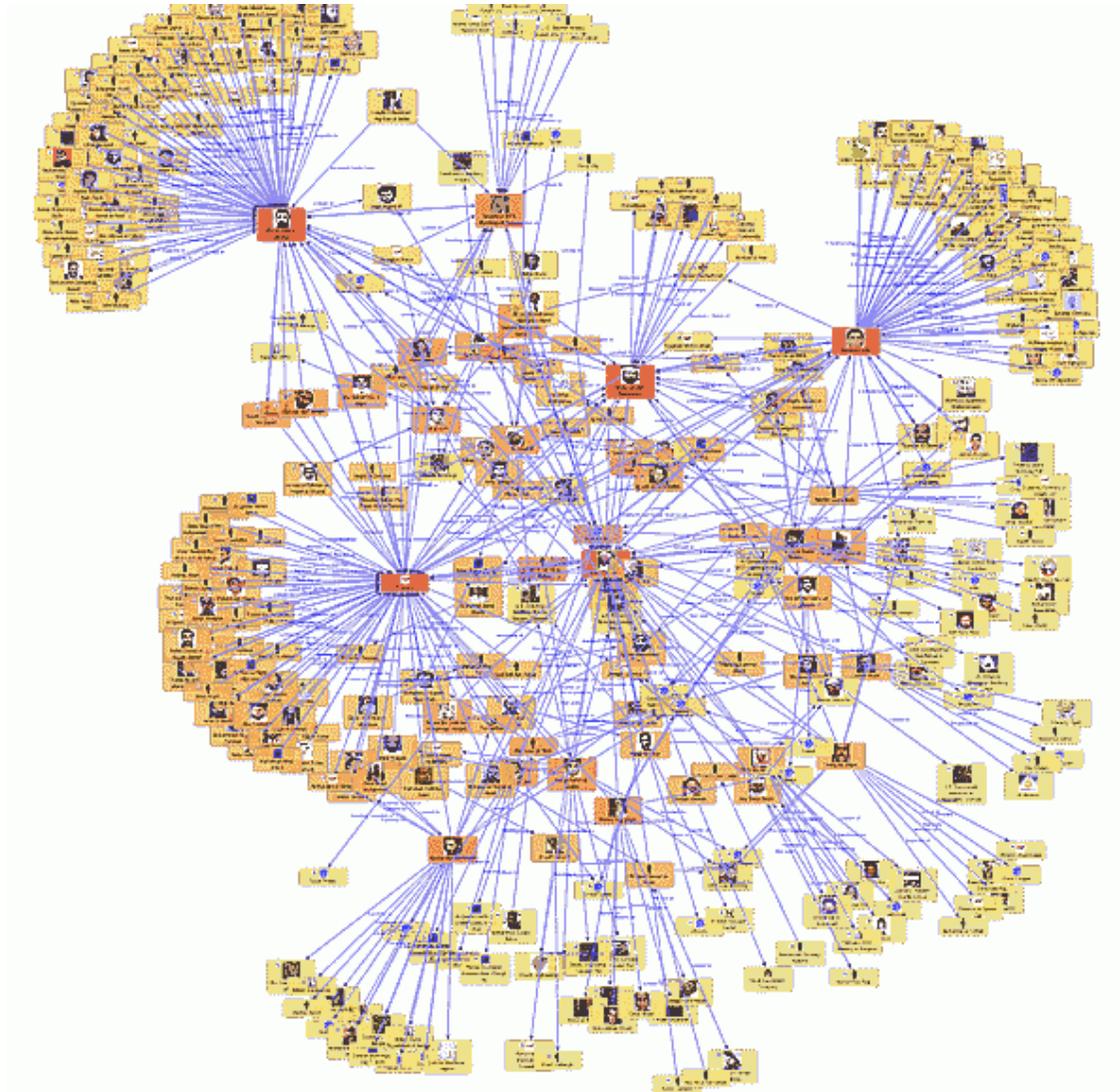
MOTIVAÇÃO...



- Exemplos de problemas práticos que podem ser modelados com grafos:
 - redes sociais
 - máquinas de busca na web
 - roteiros de viagens
 - modelagem de circuitos eletrônicos
 - redes de transporte
 - redes de energia
 - redes de computadores
 - árvores genealógicas
 - ...



EXEMPLO: REDE SOCIAL



EXEMPLO: ROTEIRO DE VIAGEM AÉREA



EXEMPLO: CONEXÕES DA RNP



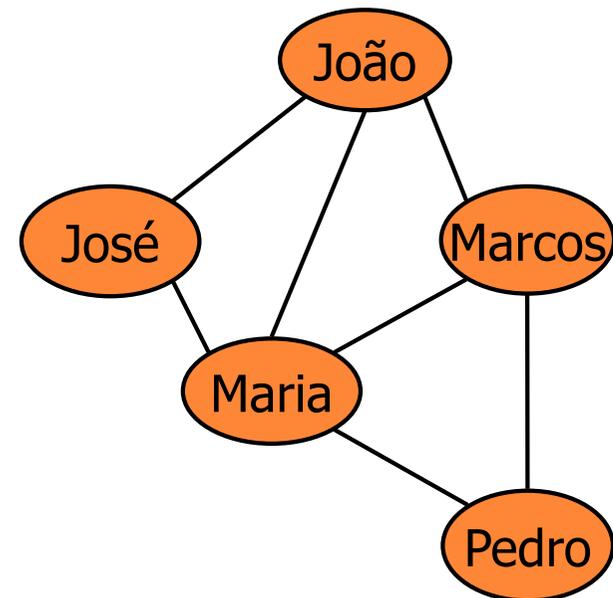
O QUE É UM GRAFO?

- **Grafo G** definido como um par (V, A) :

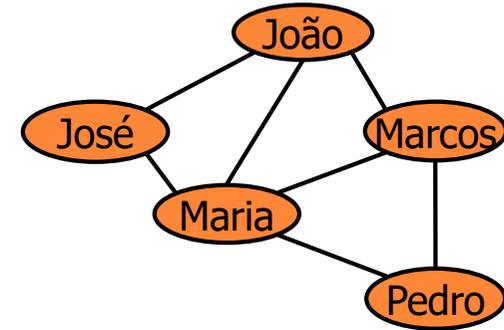
- V : conjunto de nós chamados **vértices** (ou nós).
- A : conjunto de pares de vértices chamados **arestas** (ou arcos).

- **Exemplo:**

- **Rede social de amizade**
 - cada **vértice** é uma pessoa.
 - existe uma **aresta** entre duas pessoas se e somente se essas pessoas são amigas.



GRAFO SOBRE AMIZADE

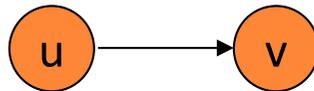


- Se eu sou seu amigo, isso significa que você é meu amigo?
 - Se aresta (x,y) sempre implica em (y,x) => grafo **não-direcionado**
 - Caso contrário => grafo **direcionado** (ou **dígrafo**).
- Eu sou amigo de mim mesmo?
 - Aresta (x,x) => **laço** ou **self-loop**.
- Eu posso ser seu amigo diversas vezes?
 - relação modelada com **arestas múltiplas** ou **paralelas**.



DEFINIÇÃO – GRAFO DIRECIONADO (Dígrafo)

- Um **grafo direcionado (grafo orientado ou dígrafo)** G é um par (V,A) , em que:
 - V é um conjunto finito de vértices
 - A é um conjunto de arestas
 - relação binária ordenada em V
- Uma aresta (u,v) sai do vértice u (origem) e chega no vértice v (destino)



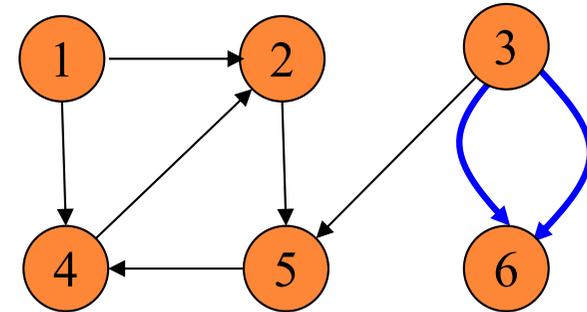
- Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo => **self-loops**.
- Podem existir arestas com mesma origem e mesmo destino => **arestas múltiplas**.



GRAFOS DIRECCIONADOS (DÍGRAFOS)

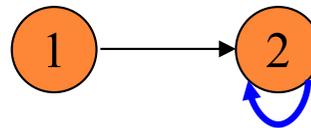
○ $G = (V, A)$

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e
- $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (4, 2), (5, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 6)\}$



○ $G = (V, A)$

- $V = (1, 2)$ e
- $A = \{(1, 2), (2, 2)\}$



GRAFOS DIRECIONADOS

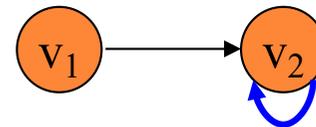
VÉRTICES ADJACENTES

- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta (u,v)
 - o vértice v é **adjacente** ao vértice u
 - a aresta **sai** do vértice u (origem)
 - a aresta **chega** no vértice v (destino)
 - a existência de (u,v) **não implica** na existência de (v,u) , ou seja o vértice u **não é adjacente** ao vértice v
 - os vértices u e v são **vizinhos**

v_1 é adjacente a v_2 ? **NÃO**

v_2 é adjacente a v_1 ? **SIM**

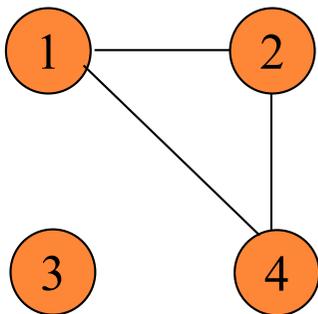
v_1 e v_2 são vizinhos ? **SIM**



DEFINIÇÃO – GRAFO NÃO DIRECIONADO

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V,A) , em que o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados
 - (u,v) e (v,u) são considerados como uma única aresta
 - a relação de **adjacência** é **simétrica**
 - self-loops** não são permitidos

grafo simples: não possui laços ou arestas múltiplas



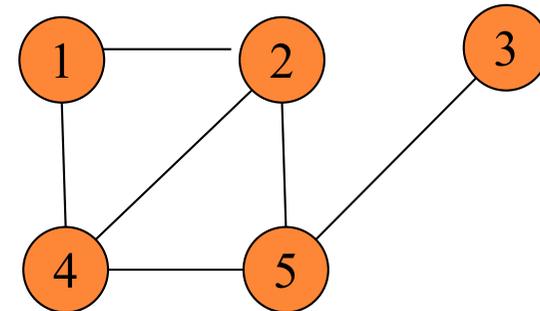
- $G = (V,A)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $A = \{(1,2),(1,4),(2,4)\}$



GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

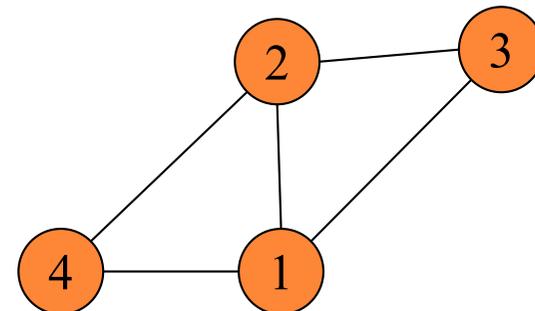
- $G = (V,A)$

- $V = \{1,2,3,4,5\}$ e
- $A = \{(1,2),(1,4),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}$



- $G = (V,A)$

- $V = \{1,2,3,4\}$ e
- $A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$



GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

VÉRTICES ADJACENTES

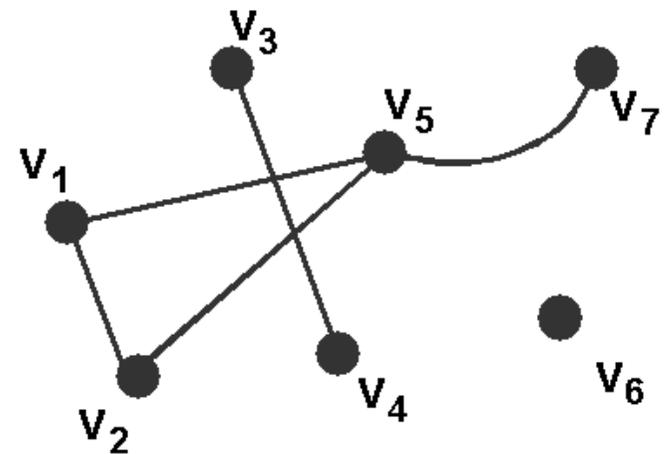
- Dois vértices u e v de um grafo não direcionado são **adjacentes** (ou vizinhos) quando eles forem os extremos de uma mesma aresta (u,v) .

v_3 é adjacente a v_4 ? **SIM**

v_4 é adjacente a v_3 ? **SIM**

v_5 é adjacente a v_4 ? **NÃO**

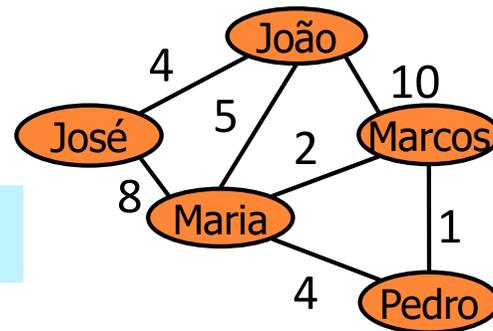
A aresta (v_3,v_4) é dita **incidente** a v_3 e a v_4



GRAFO SOBRE AMIZADE

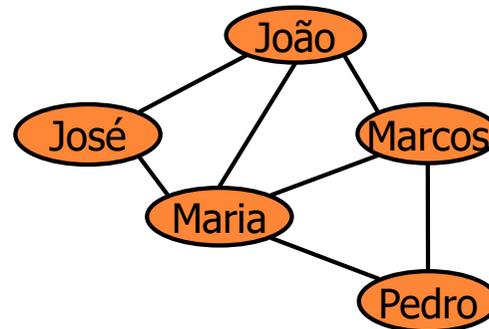
- O quanto você é meu amigo?
 - **Grafo ponderado** => as arestas possuem um peso (valor numérico) associado.

arestas: *triplas* $(u, v, valor)$

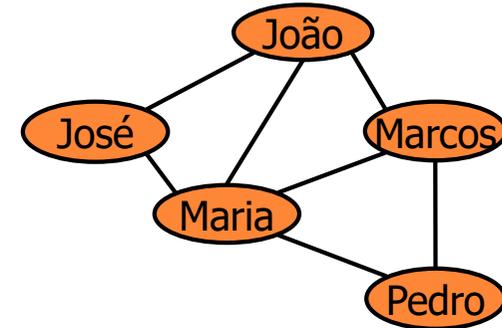


- **Grafo não ponderado** => todas as arestas possuem um mesmo peso.

arestas: *duplas* (u, v)



GRAFO SOBRE AMIZADE



- Quem possui mais (ou menos) amigos?
 - Quantidade de relacionamentos (conexões)
 - **Grau do vértice** => número de vértices adjacentes a ele.
 - Pessoa mais popular tem o vértice de maior grau
 - “Ermitões” são vértices de grau zero.

vértice isolado: vértice de grau 0

vértice final: vértice de grau 1

vértice par: vértice com grau par

vértice ímpar: vértice com grau ímpar



DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

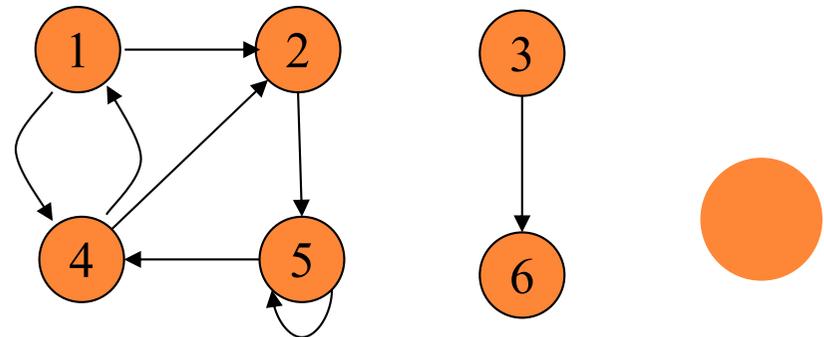
- O grau de um vértice em grafos direcionados é dado por:

número de arestas que saem dele (*grau de saída ou out-degree*)



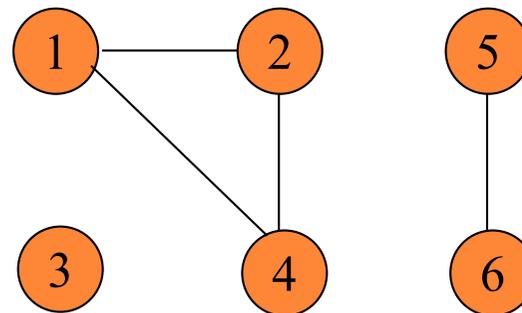
número de arestas que chegam nele (*grau de entrada ou in-degree*).

- Ex: vértice 5 tem:
 - grau de entrada = 2
 - grau de saída = 2
 - grau = 4

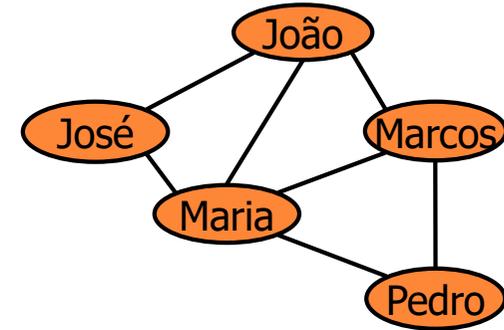


DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

- O grau de um vértice em grafos não direcionados é dado pelo número de arestas que incidem nele.
 - um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
 - Ex.
 - grau do vértice 1: 2
 - grau do vértice 3: 0 (isolado)



GRAFO SOBRE AMIZADE



- Eu estou ligado a uma celebridade por uma cadeia de amigos?
 - existe um caminho entre mim e uma celebridade?
 - **caminho** => sequência de arestas que conectam dois vértices.



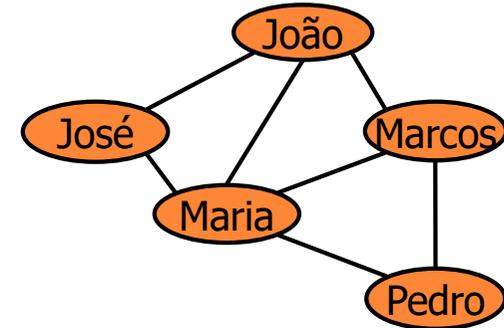
DEFINIÇÕES - CAMINHO

- Um **caminho de comprimento k** de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ tal que:
 - $x = v_0$
 - $y = v_k$
 - e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \dots, k$.
- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém:
 - os vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$
 - as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$.

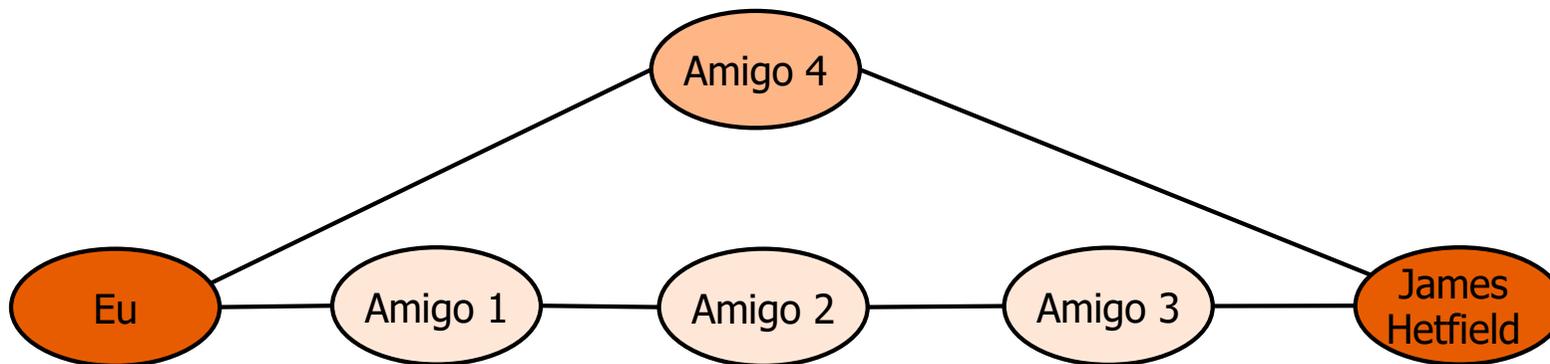
caminho de k vértices: formado por $k-1$ arestas



GRAFO SOBRE AMIZADE

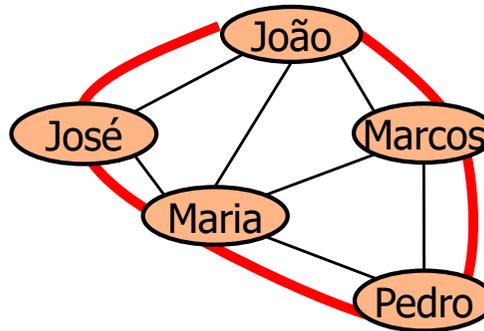


- Quão próxima é a minha ligação com essa celebridade?
 - Diversos caminhos que ligam dois vértices.
 - **Caminho mais curto (menor caminho)**
 - aquele com menor soma de pesos das arestas (ponderado)
 - ou com menor número de arestas (não ponderado).
 - **Caminho mais longo**
 - aquele com maior soma de pesos das arestas (ponderado)
 - ou com maior número de arestas (não ponderado).



GRAFO SOBRE AMIZADE

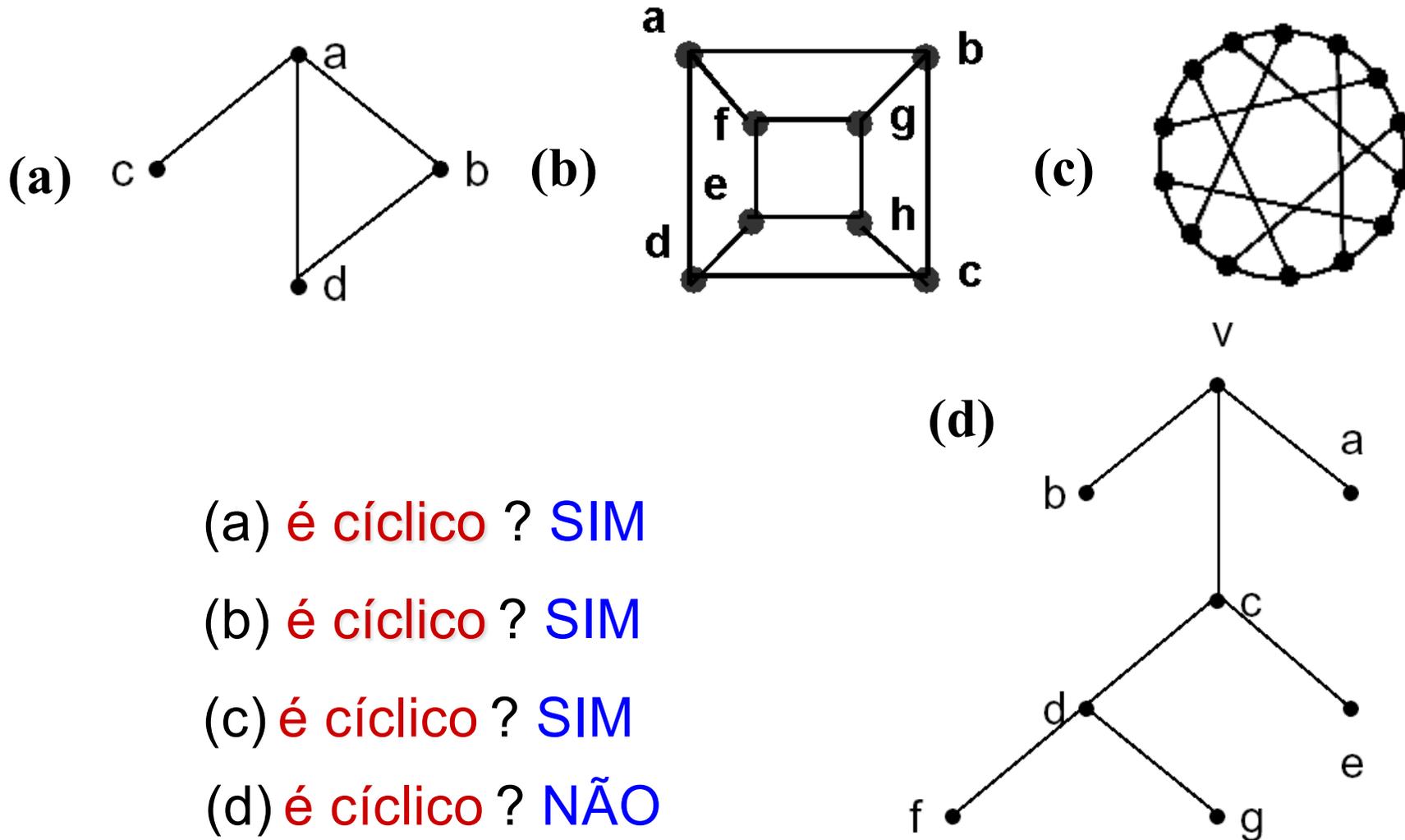
- Quanto tempo demora para que eu ouça uma fofoca que contei?



- **Ciclo** => caminho no qual o primeiro e o último vértices são iguais.
- **Ciclo simples** => ciclo em que nenhum vértice se repete (exceto primeiro e último).
- **Grafo cíclico** => possui pelo menos um ciclo.
- **Grafo acíclico** => grafo sem ciclos.



EXEMPLOS



(a) é cíclico ? SIM

(b) é cíclico ? SIM

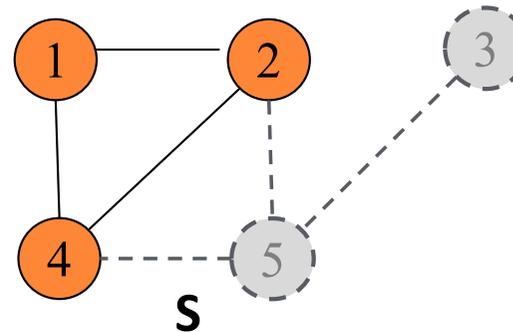
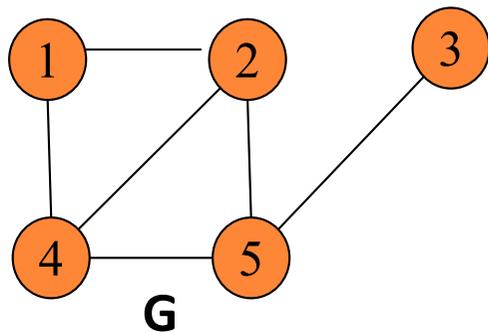
(c) é cíclico ? SIM

(d) é cíclico ? NÃO

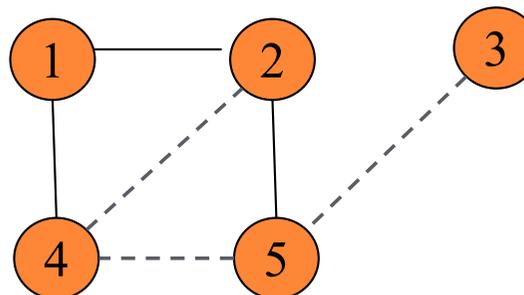


DEFINIÇÃO - SUBGRAFOS

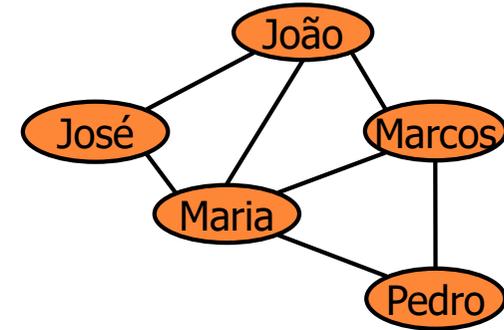
- Um **subgrafo S** de um grafo G é um grafo tal que:
 - os vértices de S são um subconjunto dos vértices de G
 - as arestas de S são um subconjunto das arestas de G



- Um **subgrafo gerador** (*spanning subgraph*) de G é um subgrafo que contém todos os vértices de G .



GRAFO SOBRE AMIZADE

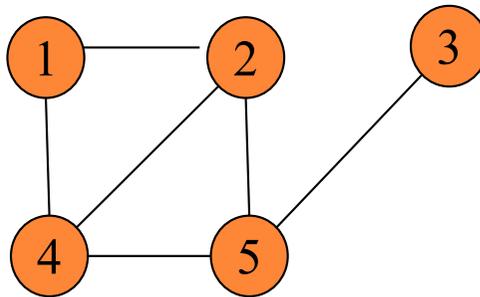


- Existe um caminho de amigos entre quaisquer duas pessoas no mundo?
 - Teoria da separação por até “seis graus”.
 - **Grafo conexo** ou **conectado** \Rightarrow existe um caminho entre quaisquer dois vértices.
 - **Componente conexo** \Rightarrow parte conectada de um grafo não conexo.
 - **Grafo completo** \Rightarrow grafo simples em que cada vértice está conectado a todos os outros

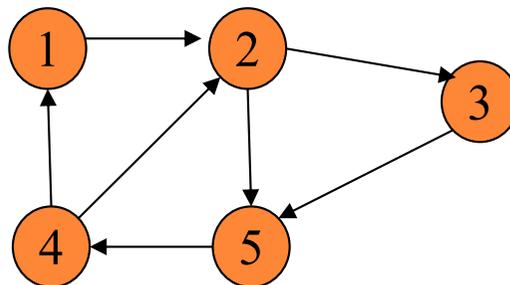


DEFINIÇÃO – GRAFO CONEXO

- Um grafo G é **conexo** se para quaisquer dois vértices distintos u e v existe um caminho de u a v .

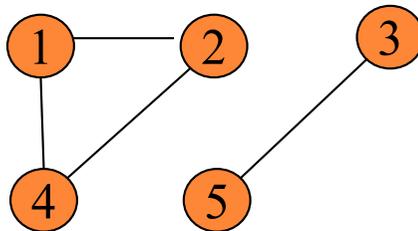


- Um **dígrafo** G é **fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices distintos u e v , v é **alcançável** a partir de u e vice-versa.



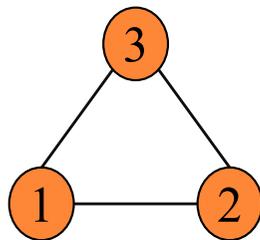
DEFINIÇÕES

- Um **componente conexo** de um grafo **G** é um **subgrafo conexo** de **G**

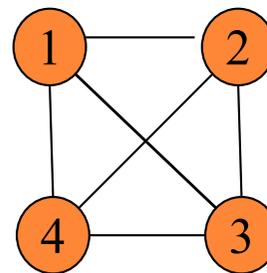


grafo não conexo
com 2 componentes conexos

- Um **grafo completo G** é um grafo simples em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes.
 - Existe um único grafo completo com **n** vértices, denotado **K_n** .



K_3

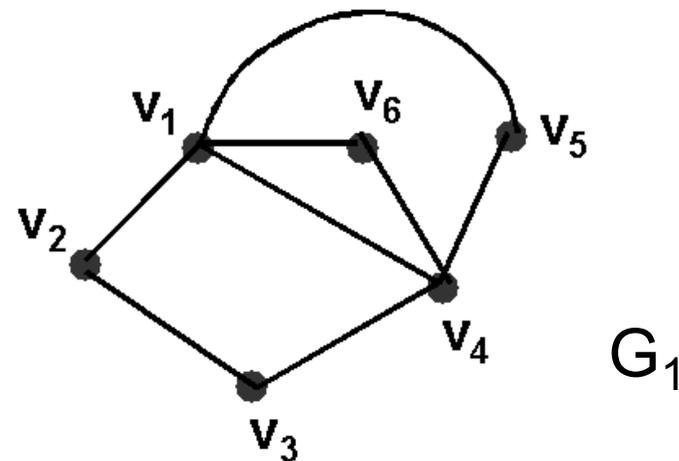


K_4

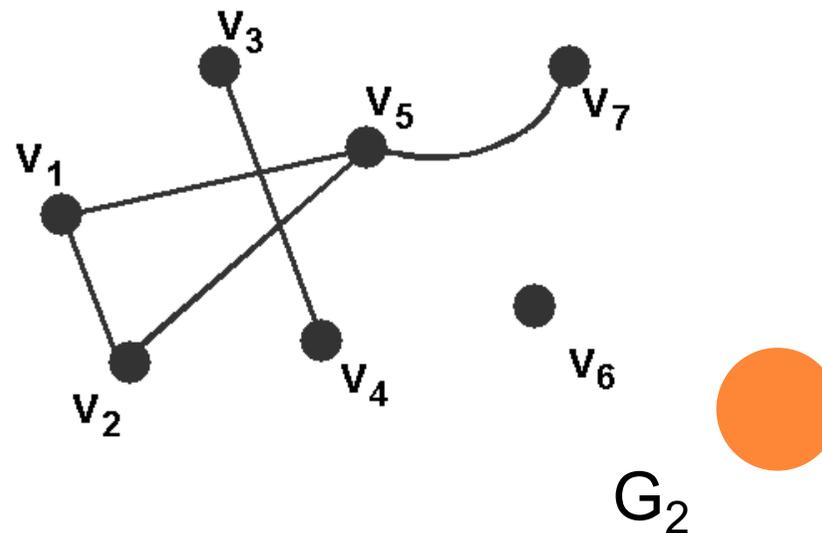


EXERCÍCIO

G_1 é um grafo **conexo** ? **SIM**

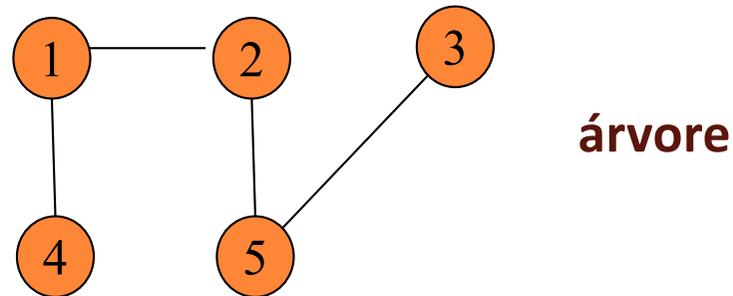


G_2 é um grafo **conexo** ? **NÃO**
desconexo



DEFINIÇÕES – ÁRVORE E FLORESTA

- Uma **árvore** é um **grafo conexo acíclico**.

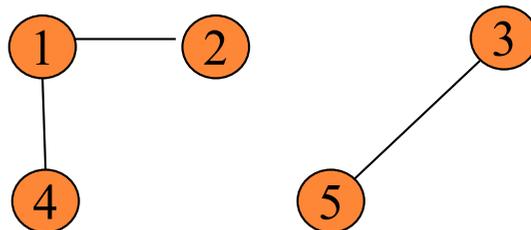


- Uma **floresta** é um **grafo acíclico**.

=> toda árvore é uma floresta

=> a recíproca é verdadeira?

=> os componentes conexos de uma floresta são árvores.

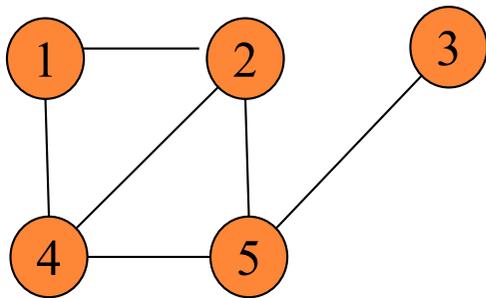


floresta com 2 árvores

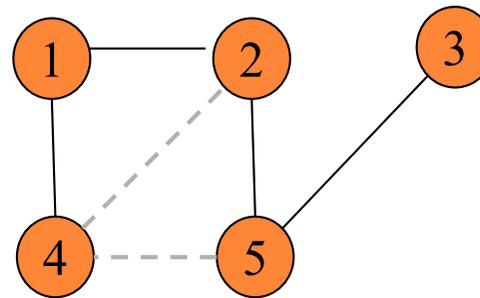


DEFINIÇÕES – ÁRVORE E FLORESTA

- Uma **árvore geradora** (*spanning tree*) de um grafo conexo é um **subgrafo gerador** que é uma **árvore**.
 - pode haver mais de uma árvore geradora (a menos que o grafo seja uma árvore)
 - a **árvore geradora mínima** (*minimum spanning tree*) é a árvore geradora com **menor soma de pesos** de arestas



grafo



árvore geradora

- Uma **floresta geradora** de um grafo é um **subgrafo gerador** que é uma **floresta**



BIBLIOGRAFIA

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- Y. Langsam, M. J. Augenstein and A. M. Tenenbaum. Data Structures Using C and C++, Prentice Hall, 2a Edição, 1996.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.

