

Árvores-B: Definição e Complexidade

Profa. Dra. Cristina D. Aguiar

Definição Formal (1/3)

- **Árvore-B com ordem m**
 - cada página (ou nó) deve ser da seguinte forma
 $\langle \langle C_1, PR_1 \rangle, \langle C_2, PR_2 \rangle, \dots, \langle C_{q-1}, PR_{q-1} \rangle, P_1, P_2, \dots, P_{q-1}, P_q \rangle$, onde $(q \leq m)$
 - cada C_i ($1 \leq i \leq q - 1$) é uma chave de busca
 - cada P_{Ri} ($1 \leq i \leq q - 1$) é um campo de referência para o registro no arquivo de dados que contém o registro de dados correspondente a C_i
 - cada P_j ($1 \leq j \leq q$) é um campo de referência para uma subárvore ou assume o valor -1 caso não exista subárvore (ou seja, caso seja um nó folha)
-

Definição Formal (2/3)

- **Árvore-B com ordem m**
 - dentro de cada página, $C_1 < C_2 < \dots < C_{q-1}$
 - para todos os valores X da chave na subárvore apontada por P_i
 - $C_{i-1} < X < C_i$ para $1 < i < q$
 - $X < C_i$ para $i = 1$
 - $C_{i-1} < X$ para $i = q$
-

Definição Formal (3/3)

- **Árvore-B com ordem m**
 - cada página possui um máximo de m descendentes
 - cada página, exceto a raiz e as folhas, possui no mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes → taxa de ocupação
 - a raiz possui pelo menos 2 descendentes, a menos que seja um nó folha
 - todas as folhas aparecem no mesmo nível
 - uma página interna com k descendentes contém $k-1$ chaves
 - uma folha possui no mínimo $\lceil m/2 \rceil - 1$ chaves e no máximo $m - 1$ chaves → taxa de ocupação
-

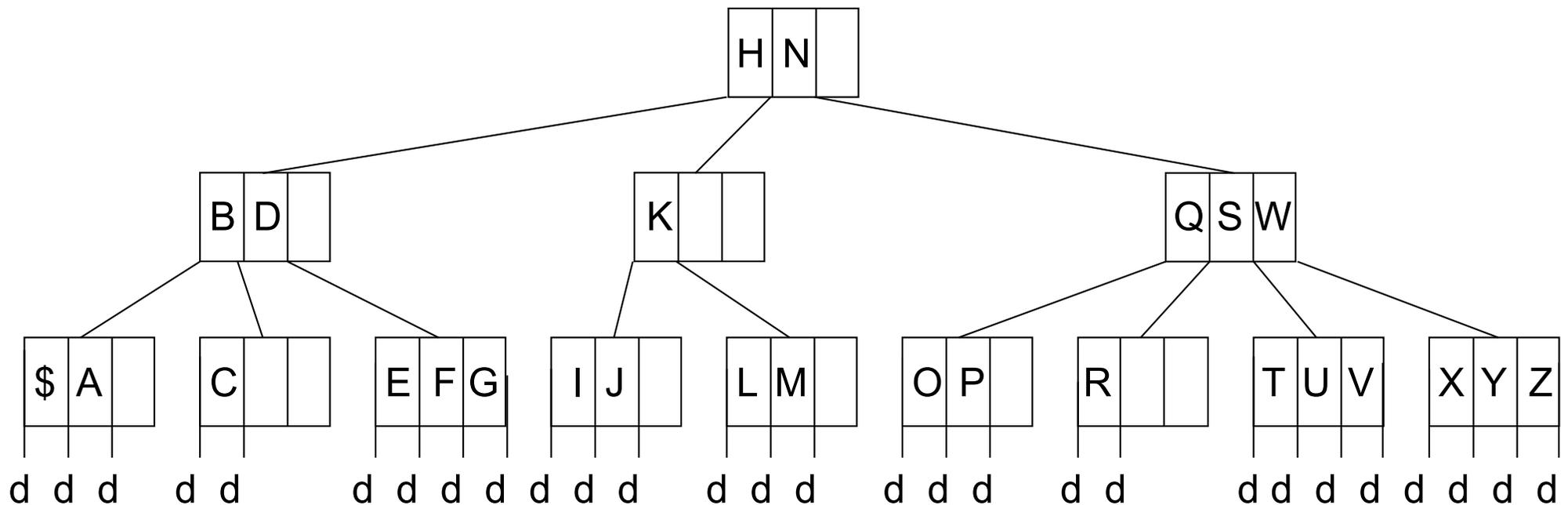
Complexidade (Pior Caso)

- Profundidade do caminho de busca
 - número máximo de acessos a disco



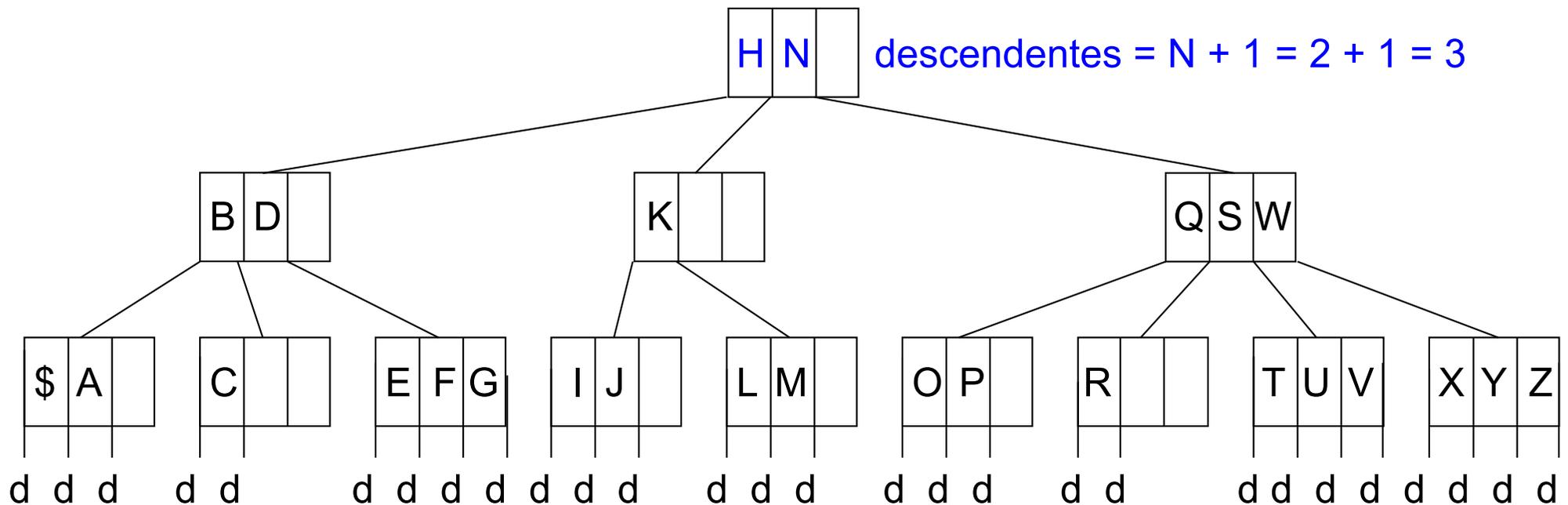
Característica

número de descendentes de um nível da árvore-B = número de chaves contidas no nível em questão e em todos os níveis acima (N) + 1



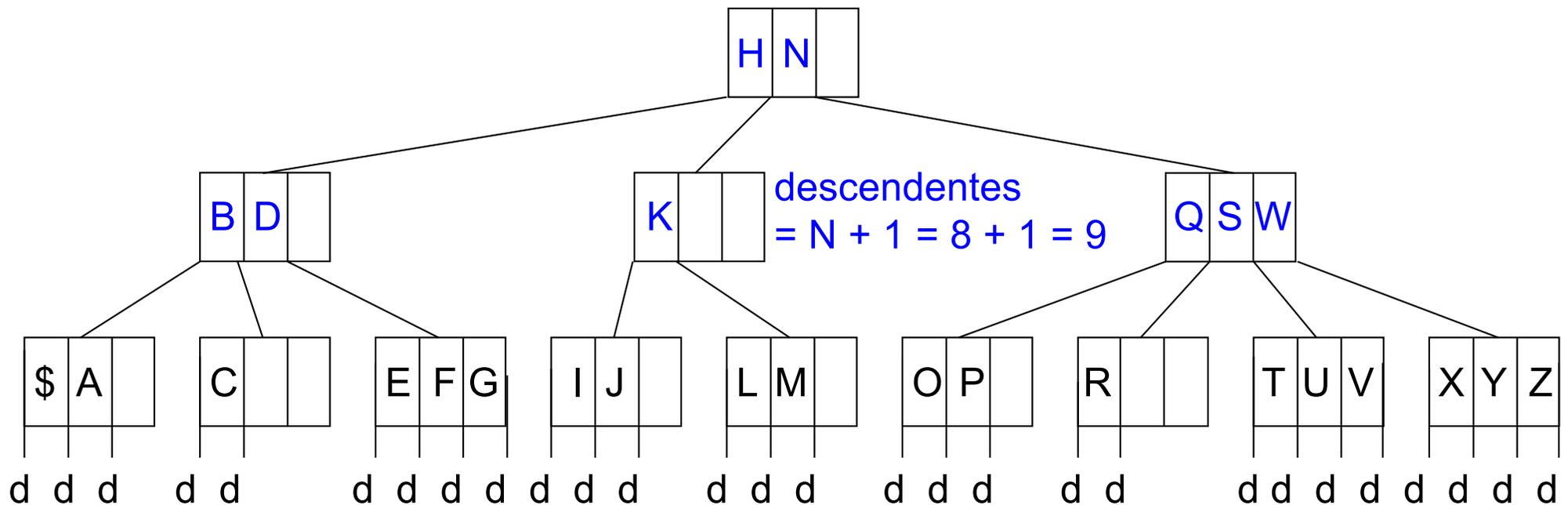
Característica

número de descendentes = número de chaves contidas + 1
de um nível da árvore-B no nível em questão e
em todos os níveis acima (N)



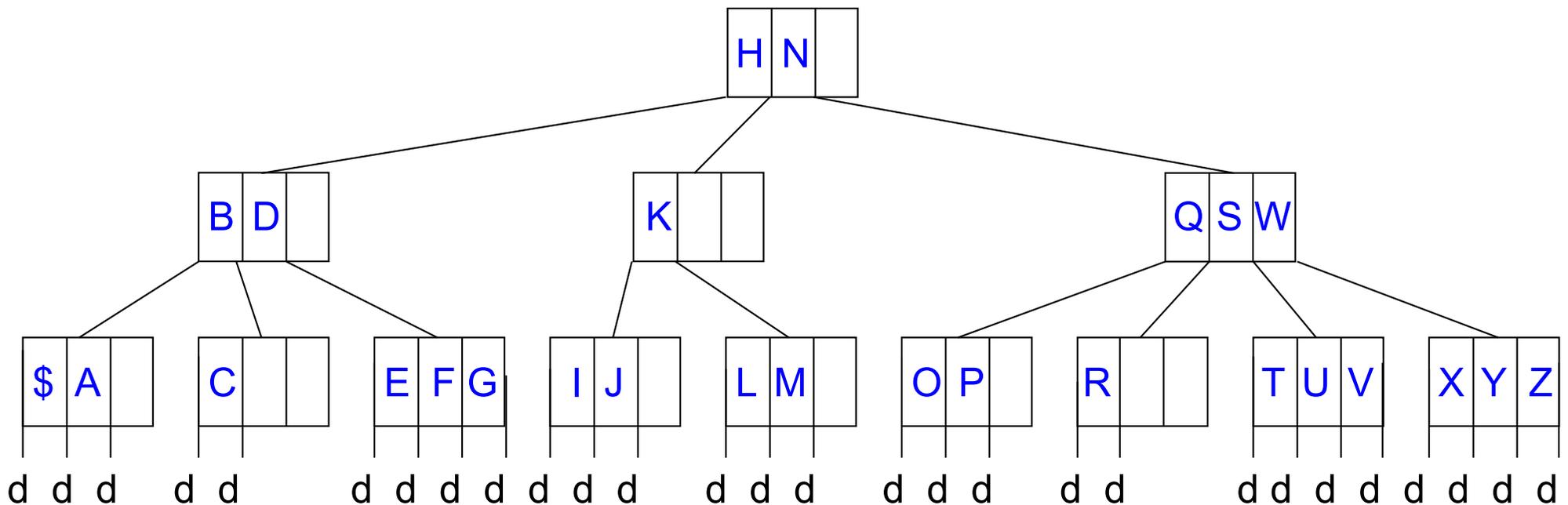
Característica

número de descendentes de um nível da árvore-B = número de chaves contidas no nível em questão e em todos os níveis acima (N) + 1



Característica

número de descendentes de um nível da árvore-B = número de chaves contidas no nível em questão e em todos os níveis acima (N) + 1



$$\text{descendentes} = N + 1 = 27 + 1 = 28$$

Característica

- Propriedades da árvore-B de ordem m
 - cálculo do número mínimo de descendentes de um nível (**análise do pior caso**)

nível	número mínimo de descendentes
1	2
2	$2 \times \lceil m/2 \rceil$
3	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^2$
4	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^3$
...	...
d	$2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$

nível 1 (raiz):
tem no mínimo
2
descendentes

Observação 2

- Propriedades da árvore-B de ordem m
 - cálculo do número mínimo de descendentes de um nível (*análise do pior caso*)

nível	número mínimo de descendentes
1	2
2	$2 \times \lceil m/2 \rceil$ ←
3	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^2$
4	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^3$
...	...
d	$2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$

nível 2: tem 2 páginas a partir da raiz, sendo cada uma com no mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes

Observação 2

- Propriedades da árvore-B de ordem m
 - cálculo do número mínimo de descendentes de um nível (*análise do pior caso*)

nível	número mínimo de descendentes
1	2
2	$2 \times \lceil m/2 \rceil$
3	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^2$
4	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^3$
...	...
d	$2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$

nível 3: cada uma das 2 páginas a partir da raiz tem $\lceil m/2 \rceil$ páginas, sendo cada uma com no mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes

Observação 2

- Propriedades da árvore-B de ordem m
 - cálculo do número mínimo de descendentes de um nível (**análise do pior caso**)

nível	número mínimo de descendentes
1	2
2	$2 \times \lceil m/2 \rceil$
3	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^2$
4	$2 \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil \times \lceil m/2 \rceil = 2 \times \lceil m/2 \rceil^3$
...	...
d	$2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$

para qualquer nível d , com exceção da raiz (nível 1)



Complexidade (Pior Caso)

- Número de chaves (N)
 - $N + 1$ descendentes no nível das folhas
 - Profundidade da árvore-B no nível das folhas
 - d
 - Relacionamento
 - $N + 1$ descendentes e
 - número mínimo de descendentes da árvore-B com profundidade d
-

Exemplo

- Tamanho da página de disco
 - árvore-B de ordem 512
 - 511 chaves/página
 - número de chaves
 - 1.000.000 de chaves
 - ⇒ número de níveis que pode ser atingido?
-

Exemplo

$$N + 1 \geq 2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$$
$$d \leq 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil} \left((N + 1)/2 \right)$$

– $m = 512$

– $N = 1.000.000$

– $d \leq 1 + \log_{256} (500.000,50) \Rightarrow d \leq 3,37$

– acesso a disco adicional: arquivo de dados

a árvore possui não mais
do que 3 níveis de altura

