7600018 - Mecânica Clássica (2023)

Movimento em Uma Dimensão

Notas de aula e exercícios. Texto baseado nos Caps. 1 e 2 das Refs. Symon e Kibble, e Caps. 2 e 3 da Ref. Marion. A leitura das referências é recomendada (e serão destacadas algumas seções, quando oportuno) mas a prioridade deve ser a *resolução de exercícios*. As notas de aula pretendem apresentar uma visão resumida dos tópicos do programa da disciplina, suficiente para iniciar a resolução dos problemas aqui propostos. Note que a lista contém os problemas mais importantes para verificar o aprendizado dos vários tópicos estudados, muitas vezes combinando vários tópicos no mesmo exercício. Se encontrar dificuldade em relação a um tópico específico, faça leitura das seções sugeridas para se aprofundar mais nele (ou nos requisitos matemáticos a ele associados) e comece com exemplos de exercícios mais simples, que também serão indicados ao longo do semestre.

1 Introdução

Consideraremos primeiramente o movimento linear, fazendo uma revisão dos conceitos da mecânica newtoniana e algumas aplicações.

A mecânica clássica de uma partícula (= ponto) será baseada em descrever sua trajetória em função do tempo (*cinemática*), sabendo as forças aplicadas nela (*dinâmica*). Nesse sentido, a relatividade também é clássica! O mesmo pode ser feito para sistemas de partículas e para corpos extensos (cujo equilíbrio é objeto de estudo da *estática*). Veja que é BEM diferente da mecânica quântica! no mundo quântico não há trajetória bem definida, apenas posso descrever a evolução temporal da função de onda (nuvem de probabilidade) da partícula, e tenho que lidar com as sutilezas envolvidas em fazer medidas etc. Nada é definido, exato, ou ordenado no mesmo modo que na mecânica clássica.

É claro que ser "exata" (ter trajetória bem definida) não necessariamente significa ser simples. Como dito acima, a mecânica clássica descreve também sistemas de partículas, o que pode significar grande dificuldade para os cálculos (e.g., o problema gravitacional de 3 corpos já nem é solúvel!) e grande riqueza de fenômenos estudados, por exemplo no caso da dinâmica não linear, dando origem a turbulência e caos! São estudados ainda corpos rígidos e meios contínuos. Está incluída aqui também, em princípio, a mecânica estatística (clássica), que trata o movimento de conjuntos de 10^{23} partículas de forma probabilística, reduzindo a descrição a poucas variáveis, recuperando a termodinâmica.

Em todos esses casos, a ideia é que dadas as leis de movimento sabemos, de alguma forma, deduzir a(s) trajetória(s), i.e. reduzir o problema a *quadraturas* (= integrais, em termos das *constantes do movimento*). Nem precisa enfatizar o quanto a simulação computacional é importante aqui, né!

Vamos recapitular, a seguir, os conceitos (definições) em que se baseia a mecânica clássica, e as leis que a regem, com a ressalva de que mesmo tais aspectos básicos podem ser apresentados de maneiras ligeiramente diferentes, como discutido nas referências. Trata-se de um assunto fascinante do ponto de vista histórico e filosófico, aspectos que não temos a pretensão de cobrir em nossa disciplina, a não ser de forma modesta e complementar ;-) A esse respeito, segue a reflexão feita por Freud sobre como somos influenciados pela conquista (da mecânica clássica!) de identificar e descrever com exatidão o movimento dos corpos celestes, e devemos nos perguntar se a "ordem" é um princípio da natureza ou uma obsessão humana!?

> *[...] ao passo que não se espera encontrar asseio na natureza, a ordem, pelo contrário, foi imitada a partir dela. A observação que o homem fez das grandes regularidades astronômicas não apenas o muniu de um modelo para a introdução da ordem em sua vida, mas também lhe forneceu os primeiros pontos de partida para proceder desse modo. A ordem é uma espécie de compulsão a ser repetida, compulsão que, ao se estabelecer um regulamento de uma vez por todas, decide quando, onde e como uma coisa será efetuada, e isso de tal maneira que, em todas as circunstâncias semelhantes, a hesitação e a indecisão nos são poupadas. Os benefícios da ordem são incontestáveis. Ela capacita os homens a utilizarem o espaço e o tempo para seu melhor proveito, conservando ao mesmo tempo as forças psíquicas deles. Deveríamos ter o direito de esperar que ela houvesse ocupado seu lugar nas atividades humanas desde o início e sem dificuldade, e podemos ficar admirados de que isso não tenha acontecido, de que, pelo contrário, os seres humanos revelem uma tendência inata para o descuido, a irregularidade e a irresponsabilidade em seu trabalho, e de que seja necessário um laborioso treinamento para que aprendam a seguir o exemplo de seus modelos celestes.*
>
> Sigmund Freud em "O Mal-Estar na Civilização" (1930)

Conceitos

Suponhamos claros os conceitos de tempo e espaço. A *velocidade* ilustra como a posição espacial de um objeto muda de acordo com o tempo. Por sua vez, a *aceleração* é dada pela mudança da velocidade em função do tempo, e é assim que descrevemos o movimento desse objeto. Agora vamos às sutilezas: embora a aceleração seja "bem definida", a velocidade dependerá do referencial utilizado, certo? De fato, se estivermos em um veículo, conseguimos perceber quando ocorre uma aceleração dele, mas em princípio podemos não saber se estamos nos movendo ou não, apenas podemos perceber (olhando pela janela!) que temos velocidade relativa a outros veículos ou o solo. Esse é o *princípio da relatividade* (newtoniano, ou de Galileu): dados dois objetos não acelerados (i.e., com velocidade constante) não é possível decidir qual deles está parado e qual se move, experimentos feitos em "referenciais" (por exemplo, um trem, um avião, ou o laboratório) não acelerados serão totalmente equivalentes. Tais referenciais são chamados de inerciais. Em geral, tudo o que vamos estudar se aplica apenas para referenciais inerciais. A descrição de experimentos/fenômenos a partir de referenciais acelerados é mais complicada, mas é possível também. Veremos exemplos disso mais adiante.

Já que a aceleração é um conceito absoluto, parece natural definir força como o que causa a aceleração em um corpo. Essa definição não será muito útil para a descrição de um corpo em equilíbrio, claro, mas tem a vantagem de introduzir também o conceito de massa (inercial): se a aceleração é proporcional à força, então a massa, ou seja, a quantidade de matéria, representa a resistência do corpo a ser acelerado. Podemos elaborar melhor essas definições, mas essencialmente isso significa que temos uma maneira de definir (e medir) massas que é independente da gravidade! Na verdade, as duas definições de massa, inercial e gravitacional, poderiam não coincidir (!) mas de fato elas são idênticas, o que constitui o *princípio de equivalência*.

É notável, portanto, que a massa ao mesmo tempo sinta e produza força! Lembremos que a massa (gravitacional) é fonte de força, de acordo com a lei da gravitação universal, de Newton, que afirma que dois corpos de massas m_1 e m_2 exercem força um sobre o outro, dada por

$$F = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\,,$$

onde G é constante e r é a distância entre os corpos. Perceba que a lei da gravitação é extremamente semelhante à lei de Coulomb para duas cargas elétricas, apenas com as diferenças: 1) a constante de interação é bem maior para a força elétrica (como sabemos, basta friccionar uma régua ou um pente e ele irá atrair pedacinhos de papel, equilibrando o peso deles; a força devida a poucas cargas acumuladas no pente irá causar deslocamento de cargas no papel neutro e compensar a força gravitacional da Terra inteira sobre todas as moléculas do papel!) e 2) a força gravitacional é sempre atrativa, enquanto a força elétrica é atrativa ou repulsiva, dependendo do sinal relativo das cargas.

Como para a força elétrica, a expressão acima pode ser escrita para a força infinitesimal relativa a um elemento de volume e integrada para fornecer a atração gravitacional exercida por um objeto extenso. Realizando os cálculos dessa forma, Newton demonstrou (aos 23 anos[1]) o chamado "Teorema das cascas esféricas", que afirma que um corpo com simetria esférica afeta objetos externos como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro, e uma casca com simetria esférica não exerce força gravitacional no seu interior. Igualzinho ao resultado que vale para a eletrostática! **Você consegue** reproduzir esses cálculos? Em particular, para um corpo de massa m se movendo próximo à superfície da Terra, tomamos a distância como R (raio da Terra, de massa M) e a expressão para o peso do corpo fica $F = mg$, sendo $g = GM/R^2$ a aceleração da gravidade. **Você consegue** estimar a variação nessa força quando o corpo está a uma altura h do solo?

Leis de Newton

Tomemos as três leis de Newton (publicadas em 1687 nos famosos "Principia"), que conhecemos e amamos:

1. (Lei da inércia) *Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.*

2. ($F = ma$, ou "Física meu amor") *A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.*

[1]Newton nasceu em 1643. Hoje podemos argumentar que o resultado pode ser obtido mais facilmente se utilizarmos o "teorema de Gauss"— relacionando o fluxo do campo gravitacional que atravessa uma superfície esférica à massa contida em seu interior— em vez de realizar a integração explícita. Bom, na verdade o teorema ainda não existia na época de Newton (Gauss viveu em meados de 1800) e, aliás, nem o cálculo integral, que foi desenvolvido pelo próprio Newton!

3. (Ação e reação) *A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.*

Vemos que, de certa forma, as duas primeiras leis são *definições*, respectivamente do que é um referencial inercial (como visto acima) e do que é uma força (também como discutido acima). Na verdade, é interessante que Newton não usou a definição de força na forma "ma", como usamos hoje, mas sim como variação da quantidade de movimento, ou *momento* $p \equiv mv$, ou seja, sua definição de força resultante foi

$$F \;=\; \frac{dp}{dt}\,.$$

É claro que a forma acima é equivalente à expressão usual, já que a massa é uma constante, e portanto $dp/dt = \dot{p} = m\dot{v} = ma$. Note que a correta definição do conceito de quantidade de movimento teve grande importância histórica, já que a combinação de m e v aparece também em outra grandeza muito semelhante, a *energia cinética* $K \equiv mv^2/2$. Ambas são muito importantes para descrição do movimento de um corpo de massa m sob ação da força F: a variação instantânea do momento p é igual à força aplicada (= segunda lei), e a variação de K é igual ao *trabalho* realizado pela força, definido como produto da força pelo deslocamento, integrado ao longo da trajetória descrita pelo corpo,[2] i.e.

$$W \equiv \int F\,dx \;=\; K_f - K_i\,,$$

sendo K_f e K_i respectivamente as energias cinéticas final e inicial. **Você consegue** demonstrar essa afirmação? E a energia potencial, como está relacionada ao trabalho, e qual a condição sobre a força estudada para que ela possa ser definida?

Quanto à terceira lei, dadas as restrições que a ela se aplicam[3] trata-se realmente de uma lei, mas talvez seja mais útil pensar nela de forma mais geral, como uma manifestação da lei de conservação do momento total para um sistema isolado! De fato, pensando em um sistema isolado composto por duas partículas, de massas m_1 e m_2, que exercem força uma sobre a outra, temos o momento total dado por $P = m_1 v_1 + m_2 v_2$, certo? Porém vale que

[2]Se a força não for paralela ao deslocamento, define-se W usando a componente de F na direção de dx.

[3]Válida somente para um sistema isolado, não se aplica se as forças entre os corpos não estiverem ao longo da linha que os conecta, se forem dependentes da velocidade dos corpos ou se forem transmitidas com velocidade finita. Veja por exemplo a Seção 1.2 do Kibble.

$m_1\dot{v}_1 = -m_2\dot{v}_2$, de acordo com a terceira lei, já que as forças que as partículas exercem uma sobre a outra são iguais e opostas, e dadas pela segunda lei. Então, de acordo com a terceira lei, temos

$$m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2 \,=\, \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) \,=\, \frac{dP}{dt} \,=\, 0\,,$$

ou seja, a terceira lei é equivalente à conservação do momento linear total do sistema isolado!

Ok, o que fizemos até aqui foi uma revisão (crítica) do material já visto nas disciplinas introdutórias de física newtoniana.[4] O que faremos agora será estudar alguns dos mesmos fenômemos já vistos mas com maior profundidade, e usando métodos diferentes, mais gerais. Em particular, a segunda lei é uma equação diferencial, e vimos como lidar com vários exemplos delas de forma geral e sistemática, no curso de Intro à Fismat. Vamos usar também os métodos perturbativo e variacional, que ampliam a classe de problemas que podem ser estudados. Mas nossa conquista mais poderosa será o formalismo de Lagrange (e suas extensões), que irá permitir a descrição mais geral e elegante de um grande número de fenômenos. Em particular, serão reobtidas nesse formalismo as leis de Newton, como resultado do *princípio de mínima ação*, que seleciona, assim, a trajetória clássica de movimento. Nesse formalismo os conceitos da mecânica clássica ganham ilustração muito mais clara, inclusive como limite da física quântica (via integrais de trajetória, de Feynman). Historicamente, o fato de que a mecânica newtoniana é obtida por aplicação de um princípio geral, selecionada dentre todas as possíveis leis de movimento, foi interpretado como sinal de que vivemos no "melhor dos mundos", um pensamento ironizado por Voltaire em seu romance "Candide". O formalismo permite, ainda, relacionar diretamente a conservação de grandezas (e.g. energia, momento linear e angular) a simetrias das leis do movimento (respectivamente em relação ao tempo, espaço e rotações), através do belíssimo "Teorema de Noether" (de 1918).

Vejamos, a seguir, algumas aplicações das leis de Newton ao movimento unidimensional sob forças dispersivas, elásticas e gravitacionais, assim como colisões de duas partículas. Vamos ver com mais detalhe, na sequência, as oscilações unidimensionais.

[4] Note que as três leis de Newton *não* se modificam ao passarmos para a relatividade restrita, a única diferença está na definição dos conceitos envolvidos. Em particular, o momento será dado agora pela massa (que não se altera) multiplicada pelo coeficiente $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, que indica o quanto a velocidade v do corpo se aproxima da velocidade da luz c. Para as velocidades usuais temos $v \ll c$, e portanto $\gamma = 1$.

2 Aplicações

Estamos considerando como "undimensionais" as situações em que o movimento pode ser descrito em termos de uma variável apenas, de forma geral. Isso vai incluir o movimento no campo gravitacional (nos casos em que a análise for feita somente em função da coordenada radial r), o movimento circular (em função da coordenada angular θ), pêndulo (idem), movimento ao longo de uma superfície (e.g. plano inclinado, ou curvas associadas à energia potencial gravitacional em função da altura), etc. Vamos considerar casos de forças conservativas (elástica, gravitacional) e dispersivas, assim como casos simples de colisões. As oscilações unidimensionais serão vistas como aplicação dos métodos para resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), resumidos na próxima seção. Vejamos alguns exemplos, e recomendações de seções dos livros-texto para leitura mais aprofundada, se desejado.

Força constante: neste caso será fácil integrar a segunda lei, para obter $v(t)$ e então $x(t)$. Teremos as conhecidas expressões para o movimento uniformemente acelerado, ou seja

$$F \,=\, ma \,=\, m\,\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad v(t) \,=\, \int_0^t \frac{F}{m}\,dt \,=\, v_0 + at\,,$$

sendo v_0 a velocidade inicial, e

$$x(t) \,=\, \int_0^t \frac{dx}{dt}\,dt \,=\, \int_0^t v(t)\,dt \,=\, x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,,$$

sendo x_0 a posição inicial. Este é o caso de vários exemplos comuns em problemas introdutórios, e.g. movimento sob a ação da gravidade (suposta constante: $a = -g$), como na máquina de Atwood. Veja o Exemplo 2.9 do Marion, em que dois corpos, de massas m_1 e m_2, estão pendurados nas duas extremidades de uma corda passando por uma polia (ideal) na vertical. Você pode escrever a equação de forças para ambos e obter a aceleração do conjunto e a tensão T na corda. Em particular, para $m_1 = m_2$ a aceleração será nula e a tensão igual ao peso dos corpos. E para $m_2 \gg m_1$ (ver exemplo semelhante no Symon, Cap. 1) o que acontece? **Você consegue** interpretar esse resultado?

Outro exemplo de força constante é o movimento sobre um plano inclinado, em que a aceleração será $a = g\sin\theta$ (sendo θ o ângulo de inclinação do plano). É comum considerar uma força de atrito, também constante, dada pelo coeficiente de atrito μ vezes a força normal. Um exemplo interessante para testar seu conhecimento desse tópico é o problema 1.6 do Symon, discutido em aula. Nele temos um garoto que puxa um trenó sobre a neve.

Devemos notar que a aceleração do corpo dele será igual à do trenó, embora seu pé esteja momentaneamente parado em relação ao solo, por ação do atrito estático. Nesse e em casos semelhantes é importante verificar a consistência dos "pares" de ação e reação ao montar o diagrama de forças.

Força geral $F(t)$: note que o problema unidimensional consiste em encontrar a solução $x(t)$ da equação de segundo grau obtida da segunda lei de Newton, ou seja, temos apenas a variável t e a força (assim como a posição x) depende "só" dela. Dito isto, pode ser possível integrar explicitamente a equação para encontrar $x(t)$ como fizemos acima, ou não. De forma abstrata, temos duas integrações: a primeira para obter $v(t)$ e a segunda para obter $x(t)$, a partir da primeira integral. Isso é feito na Seção 2.3 do Symon, fornecendo

$$x(t) \;=\; x_0 + v_0\, t + \frac{1}{m}\int_0^t dt' \int_0^{t'} F(t'')\, dt'' \, .$$

Em princípio, dada a expressão $F(t)$ pode-se obter $x(t)$. Por exemplo, é feito o cálculo para uma força periódica (associada a uma carga em um campo elétrico oscilante). Ou seja, temos aplicações de métodos para solução de EDOs, como mencionado acima.

Força dissipativa $F(v)$: como já dito, a força é dada em função de t. Porém, se ela puder ser escrita em termos de $v(t)$ apenas, teremos uma interpretação mais clara de sua atuação. Por exemplo, se a força for oposta ao movimento, e.g. $F \sim -v$, seu trabalho será sempre negativo, pois ela terá sinal contrário ao deslocamento. Assim, seu efeito será dissipar a energia cinética inicial do corpo, certo? Lembre-se da expressão $W = \int F dx = K_f - K_i$, vista anteriormente, e note que $v = dx/dt$. Isso significa que F terá sinal oposto a dx, para todos os intervalos considerados na integral, que então terá necessariamente resultado negativo, i.e. teremos $K_f < K_i$, sendo $K = mv^2/2$ a energia cinética.

Para $F = -bv$, temos

Força conservativa $F(x)$: neste caso, a integral $\int F(x)dx$ corresponderá à variação de uma função de x, a primitiva de $F(x)$, que podemos associar a uma energia potencial $U(x)$, ou seja,

$$\int F(x)\, dx \;=\; -(U_f - U_i) \quad\to\quad F(x) = -\frac{dU}{dx}\, .$$

Note que tomamos (por conveniência) a primitiva de $F(x)$ como menos a energia potencial $U(x)$. É precisamente por isso que podemos chamar U de energia potencial, já que a expressão acima é, também, igual a $K_f - K_i$, e portanto resulta que

$$K_f - K_i \,=\, U_i - U_f \quad \to \quad K_i + U_i \,=\, K_f + U_f \,\equiv\, E\,.$$

Em outras palavras, quando a força depende apenas de x (i.e., o trabalho depende apenas das posições inicial e final) a energia total $E = K + U$ é conservada!

Com exemplos de forças desse tipo, temos a força elástica $F = -kx$, associada à energia potencial $U = kx^2/2$, e a força gravitacional, dada para uma massa m próxima à Terra por $F = GMm/r^2$, sendo $r \approx R$. Nesse caso, se pensarmos que a variável r faz o papel de x (pois não há dependência angular, apenas radial), podemos obter a energia potencial simplesmente[5] como $U(r) = -GMm/r$. Ou seja, podemos "esquecer" que o problema é tridimensional. Você pode se perguntar se essa energia potencial faz sentido, afinal ela é sempre negativa, e vai a zero no infinito. Mas é justamente o esperado, pois para um corpo que está sendo atraído pela Terra e será acelerado, sua energia cinética deve aumentar, enquanto a potencial vai diminuir (em valor real, embora aumente em módulo). É um pouco estranho, mas faz sentido. Ok, e como faço para relacionar essa energia potencial à expressão usual mgh para objeto próximo à Terra a uma altura h? Basta tomar $r = R + h$ e fazer a aproximação de h/R pequeno, fornecendo

$$U(r) \,=\, -\frac{GMm}{r} \,=\, -\frac{GMm}{R}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \,\approx\, -\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) \,=\, mgh - \frac{GMm}{R}\,.$$

Claramente, o segundo termo é uma constante e pode ser absorvido na definição de U. Temos, assim, que a energia potencial mgh é essencialmente o mesmo que a altura do corpo, e podemos interpretar uma curva $h(x)$ no plano vertical como se fosse um gráfico de $U(x)$ em função da posição horizontal x.

Nesse sentido, fica fácil analisar o movimento de um carrinho de montanha russa em um parque de diversões, associando a energia potencial no topo (por exemplo) à energia cinética no ponto mais baixo da curva. Em outros pontos, basta saber a altura e temos a velocidade v do carrinho. Em particular, se o brinquedo tiver um "loop" circular de raio r, sabemos que

[5] Em geral, a força será dada em três dimensões pelo *gradiente* de U. Supondo a energia potencial dada por $U(r) = -GMm/r$, já vemos que o gradiente fornece a força desejada, i.e. $\mathbf{F} = -GMm/r^2\,\hat{\mathbf{r}}$. Note que a força, atrativa, é oposta ao vetor posição $\mathbf{r}$ de m, tomado a partir do centro da Terra. Neste caso, podemos tomar o gradiente em coordenadas cartesianas, lembrando que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e que $\hat{\mathbf{r}} = (x, y, z)/r$.

essa velocidade será associada[6] à aceleração centrípeta v^2/r. Por sua vez, a força centrípeta será dada no ponto mais alto do loop pelo peso do carrinho mais a força normal. Assim, quanto maior a altura inicial do carrinho, maior a velocidade no topo do loop, e maior a força normal que "gruda" o carrinho ao trilho nesse ponto. Você pode facilmente calcular, então, a altura inicial mínima para o carrinho conseguir fazer o loop, correspondendo à situação de força normal nula no topo do loop.

Agora vamos considerar a curva vertical na região próxima a um ponto de mínimo x_0, que vamos associar a um ponto de equilíbrio estável do movimento. Ao redor desse ponto, o potencial pode ser expandido em série de Taylor e escrito como

$$U(x) \,=\, U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\, U''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots \,\approx\, U(x_0) + \frac{1}{2}\, U''(x_0)(x - x_0)^2 \,,$$

pois a primeira derivada $U'(x)$ será nula para o ponto de mínimo (ou máximo). Além disso, não há perda de generalidade em tomar a constante $U(x_0)$ igual a zero (ou, equivalentemente, absorvê-la na definição da energia potencial U). Sabemos que a constante $U''(x_0)$ deve ser positiva —ou seja, que o formato de $U(x)$ ao redor de x_0 corresponde a uma parábola virada para cima— e portanto podemos tomar

$$U''(x_0) \,\equiv\, k \quad\to\quad \lim_{x\to x_0} U(x) \,=\, \frac{k(x - x_0)^2}{2} \,.$$

O potencial gravitacional "virou" um potencial elástico!

Atenção: na discussão acima, $U(x)$ descreve como a energia potencial mgh varia em função de x, para uma dada curva vertical. O que vimos é que essa curva pode ser escolhida de forma a reproduzir a forma do potencial elástico $kx^2/2$, ou qualquer outra forma!

Concluindo: a força $F(t)$ pode ser pensada como $F(x, \dot{x}, t)$. Os termos dependentes de $\dot{x} = v$ (tipicamente, com sinal oposto à velocidade) terão papel de força dissipativa, enquanto $F(x)$ será associada a uma energia potencial $U(x)$. De qualquer forma, a energia **não** será em geral conservada (a não ser que a força seja estritamente conservativa). Por outro lado, o momento total de um sistema de partículas, dado por $P = \sum m_i v_i$, será sempre constante!

[6]**Você consegue** deduzir a expressão para a aceleração centrípeta? Note que ela está orientada radialmente, e que ela apenas causa variação na direção da velocidade, mantendo seu módulo constante. Você pode desenhar um triângulo ilustrando a variação Δv da velocidade v correspondente a um deslocamento angular θ e tomá-lo pequeno, de forma que $\sin\theta \approx \theta$. Você terá assim a aceleração centrípeta dada por $\omega v = v^2/r$, sendo $\omega = d\theta/dt = v/r$.

(Como vimos acima, isso é consequência da terceira lei, considerando um sistema isolado.) Essa propriedade será muito útil para resolução de problemas envolvendo *colisões*.

3 Oscilações Unidimensionais