

Forças conservativas e movimento no espaço

Antônio Roque

Dezembro 2021

1 Extensão do conceito de forças conservativas

Na aula anterior, a conservação da energia e o conceito de forças conservativas foram aplicados a problemas de movimento em uma dimensão. Nesta aula, estenderemos esses conceitos a problemas gerais de movimento no espaço.

Para começar, vamos considerar o problema do movimento sob a ação da gravidade nas vizinhanças da superfície terrestre. Sejam dois pontos no espaço a diferentes alturas, A e B . Suponha que os dois pontos estão conectados por dois tubos muito lisos alinhados em um mesmo plano vertical, como mostrado na Figura 1.

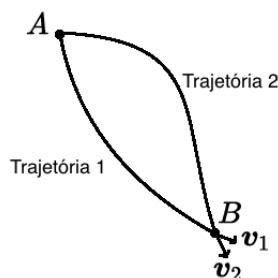


Figura 1: Duas trajetórias entre dois pontos a alturas diferentes.

Uma partícula, colocada em um dos dois tubos, é solta do repouso em A e desliza sem atrito até B . Como não há atrito entre os tubos e a partícula, as únicas forças exercidas pelos tubos sobre a partícula são as forças normais, que formam sempre um ângulo reto com a direção de movimento da partícula. Por causa disso, estas forças não exercem nenhum trabalho sobre a partícula. O que estas forças fazem é obrigar a partícula a seguir a trajetória

determinada pelo tubo, de maneira que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula seja sempre tangente à superfície do tubo em cada ponto deste. Se a partícula seguir a trajetória 1, ela chegará a B com velocidade $\mathbf{v}_1$; se ela seguir a trajetória 2, ela chegará a B com velocidade $\mathbf{v}_2$. As velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ estão mostradas na Figura 1.

Qualquer que seja o tubo pelo qual a partícula vai de A a B , o movimento ocorre por causa da força gravitacional. Vamos agora demonstrar um resultado importante: a variação da energia cinética entre A e B devida ao trabalho feito pela força da gravidade é a mesma para todas as trajetórias que comecem em A e terminem em B .

Quando a partícula se move por um elemento de deslocamento $d\mathbf{s}$, o trabalho dW feito sobre ela pela força gravitacional é

$$dW = |\mathbf{F}_g||d\mathbf{s}|\cos\theta = \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s},$$

onde θ é o ângulo entre as direções de $\mathbf{F}_g$ e $d\mathbf{s}$. Como estamos nas vizinhanças da superfície da Terra, a força $\mathbf{F}_g$ é constante (isto é, é a mesma para todas as posições), com as seguintes componentes:

$$F_x = 0 \quad F_y = -mg,$$

onde tomamos o eixo y como positivo para cima. Então, como o elemento de deslocamento $d\mathbf{s}$ tem componentes (dx, dy) , podemos escrever o trabalho dW como (lembre-se da revisão de produto escalar feita na aula passada):

$$dW = F_x dx + F_y dy = -mg dy.$$

Note que este resultado só depende da massa m da partícula, da aceleração gravitacional g e do elemento de deslocamento *vertical* dy da partícula. Isto significa que o trabalho feito pela força gravitacional quando a partícula vai de A para B não depende do tubo por onde a partícula passa, isto é, da trajetória seguida pela partícula:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = -mg(y_B - y_A),$$

onde y_A é a coordenada y do ponto A e y_B é a coordenada y do ponto B . Como A e B são dois pontos genéricos no espaço, este resultado pode ser escrito como

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dW = -mg(y_2 - y_1),$$

onde 1 e 2 são dois pontos quaisquer no espaço.

Vimos na Aula 14 que o trabalho feito por uma força quando uma partícula se desloca de um ponto a outro do espaço é igual à variação da energia cinética da partícula entre os dois pontos. Combinando este resultado com o obtido acima, temos que

$$K_2 - K_1 = \int_1^2 dW = -mg(y_2 - y_1). \quad (1)$$

Em palavras: quando uma partícula, sob a ação da força gravitacional nas vizinhanças da superfície terrestre, se desloca entre dois pontos do espaço de tal maneira que sua coordenada vertical varie de y_1 para y_2 , a variação da energia cinética da partícula depende apenas da diferença $y_2 - y_1$ multiplicada por $-mg$, independentemente da variação na coordenada x ou da trajetória seguida.

Este resultado generaliza para um movimento qualquer no espaço nas vizinhanças da superfície terrestre o resultado obtido na Aula 14 para uma partícula descrevendo uma trajetória puramente vertical sob a ação da gravidade.

A propriedade importante deste resultado é que a variação da energia cinética depende apenas das posições da partícula antes e depois do percurso feito, sem depender do percurso em si. A consequência disto é que, novamente, podemos definir uma energia potencial gravitacional $U(y)$ para a partícula,

$$U(y) = mgy,$$

de tal maneira que a energia mecânica da partícula se conserva:

$$E = K + U = \text{const.}$$

Este resultado nos permite aplicar o método da energia a diversos problemas em que, além da força gravitacional, existem as chamadas “forças de vínculo”, as quais controlam a trajetória da partícula mas sempre atuam formando um ângulo reto com seu movimento, de maneira que não realizam trabalho e, portanto, não alteram a energia cinética. Veremos alguns exemplos a seguir.

2 Aceleração de dois corpos conectados

Começaremos com um problema que, se fosse tratado aplicando-se diretamente a segunda lei de Newton, requeriria a escrita da equação da segunda lei para cada um dos corpos separadamente. O problema é obter o módulo da aceleração de dois corpos, de massas m_1 e m_2 , conectados e movendo-se sobre uma superfície sem atrito como mostrado na Figura 2.

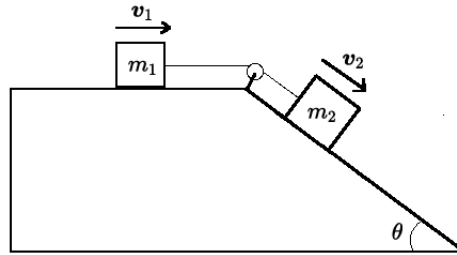


Figura 2: Dois corpos conectados em movimento.

As acelerações dos dois corpos são vetores diferentes, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, mas os seus módulos são iguais: $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a$. Para encontrar o valor de a usando a segunda lei de Newton, teríamos que escrever as equações $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para os dois corpos e manipulá-las para isolar a . Porém, podemos resolver o problema usando uma única equação, a saber, a da energia total do sistema, que é uma grandeza escalar. Para isto, vamos explorar o fato de que os *módulos* dos deslocamentos e suas derivadas (as velocidades) são iguais para os dois corpos.

Temos que $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$, de maneira que a energia cinética total do sistema é dada por,

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2,$$

e sua variação infinitesimal dK é dada por,

$$dK = (m_1 + m_2) v dv.$$

Usando o fato de que

$$a = \frac{dv}{dt},$$

podemos reescrever dK como

$$dK = (m_1 + m_2) v a dt.$$

Agora note agora o seguinte: vdt é a distância percorrida por cada corpo ao longo da superfície sobre a qual ele desliza. O corpo de massa m_1 desliza sobre uma superfície horizontal, de maneira que sua coordenada y permanece constante. Já o corpo de massa m_2 desliza sobre um plano inclinado, de maneira que a variação dy de sua coordenada vertical é igual a $-vdt \sin\theta$ (y positivo para cima)¹. Portanto, a variação da energia potencial gravitacional do sistema (que é a variação da energia potencial gravitacional do corpo de massa m_2) é

$$dU = m_2 g dy = -m_2 g v dt \sin\theta.$$

Como estamos desprezando o atrito, a energia mecânica total do sistema se conserva. Temos então que

$$dK + dU = 0,$$

ou seja,

$$(m_1 + m_2)vadt - m_2 g v dt \sin\theta = 0.$$

Isolando a nesta equação obtemos o resultado procurado:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta.$$

3 Corpo movendo-se em um círculo vertical

Suponha que uma partícula P de massa m está presa a uma varinha de massa desprezível e comprimento ℓ . A outra extremidade da varinha está presa a um pivô no ponto C de maneira que ela pode girar livremente e sem atrito em torno de C . Vamos escolher como origem do sistema de coordenadas o ponto O , que é a posição de repouso do corpo quando ele não está girando (Figura 3).

¹Para ver isto, considere que quando o corpo de massa m_2 move-se para baixo por uma distância ds , sua coordenada y varia de y_1 para y_2 ($y_1 > y_2$). Então, $dy = y_2 - y_1 = -(y_1 - y_2)$ e, pela Figura 2,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{(y_1 - y_2)}{ds} = \frac{(y_1 - y_2)}{vdt} \Rightarrow \\ (y_1 - y_2) &= vdt \sin\theta \Rightarrow dy = -vdt \sin\theta. \end{aligned}$$

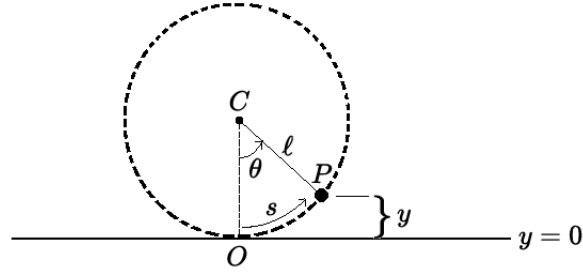


Figura 3: Corpo movendo-se em um círculo vertical.

Em tal caso, como ℓ é constante, para descrever a posição do corpo basta uma única coordenada; esta pode ser o ângulo θ medido no sentido anti-horário a partir da linha CO , ou o deslocamento s ao longo do arco circular descrito pelo corpo a partir de sua posição de repouso².

Da Figura 3, temos que

$$\cos \theta = \frac{\ell - y}{\ell} \Rightarrow y = \ell(1 - \cos \theta),$$

onde y é a altura do corpo em relação à superfície de referência. Portanto, a energia potencial gravitacional do corpo é

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta).$$

O gráfico de $U(\theta)$ está dado na Figura 4.

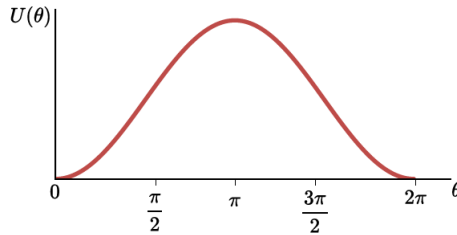


Figura 4: Energia potencial do corpo movendo-se em um círculo vertical.

A energia potencial gravitacional é zero quando o corpo está na posição de repouso ($\theta = 0$) e máxima quando ele está no ponto superior da trajetória ($\theta = \pi$). Note que $U(\theta)$ é simétrica em relação a $\theta = \pi$.

²Note que, por causa disso, o movimento do corpo é, em certo sentido, unidimensional, embora não ocorra em linha reta.

Como não há atrito, a energia mecânica total se conserva,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2,$$

onde 1 e 2 são dois pontos quaisquer da trajetória do corpo. Escrevendo K e U explicitamente,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl(1 - \cos \theta_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgl(1 - \cos \theta_2).$$

Simplificando e isolando v_2 :

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gl(\cos \theta_2 - \cos \theta_1). \quad (2)$$

Supondo que o ponto 1 é o ponto mais baixo da trajetória ($\theta = 0$) e que a velocidade nesse ponto é v_0 (velocidade inicial), temos que

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Vamos agora analisar o que a equação (3) nos diz. O termo $2gl(1 - \cos \theta)$ tem a mesma “cara” do gráfico da Figura 4. Ele cresce com θ a partir de $\theta = 0$, atinge seu máximo em $\theta = \pi$, e depois cai atingindo o valor nulo quando $\theta = 2\pi$. Portanto, como este termo é *subtraído* de v_0^2 no lado direito de (3), a velocidade da partícula *diminui* com θ a partir de seu valor máximo em $\theta = 0$. À medida que θ aumenta e a partícula vai subindo em sua trajetória circular, a velocidade v da partícula vai diminuindo até atingir o valor nulo para um valor particular de θ . Neste ponto, a partícula para de subir. Caso este ponto seja *exatamente* o ponto máximo ($\theta = \pi$), a partícula fica parada nele; caso contrário, a partícula passa a se mover para baixo.

Qual o valor máximo de θ que a partícula atinge para um dado valor de sua velocidade inicial v_0 ? Para obter este valor, basta fazer $v = 0$ em (3) e isolar θ :

$$\cos \theta_{\max} = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} \Rightarrow \theta_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} \right).$$

Outra pergunta que pode ser respondida com o auxílio de (3) é: que velocidade inicial é necessária para que o corpo atinja o ponto mais alto da trajetória? Para responder a esta pergunta, basta considerar novamente a situação em que $v = 0$ em (3) (indicando que a partícula parou) e fazer $\theta = \pi$ (que é o ponto mais alto):

$$v_0^2 = 4g\ell \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{g\ell}.$$

Para qualquer valor de v_0 maior que o dado acima, a partícula atingirá o ponto mais alto (não com $v = 0$, mas com uma velocidade maior que zero e menor que v_0) e passará por ele, caindo em direção a $\theta = 2\pi$ e completando a trajetória circular.

Em qualquer caso (com exceção do em que v_0 é apenas suficiente para fazer o corpo atingir $\theta = \pi$), o corpo realizará oscilações em torno da posição de repouso depois que atingir sua altura máxima. O tópico “oscilações” será visto na disciplina de Física II, de maneira que não vamos aprofundá-lo nesta aula.

O importante a ser observado aqui é a vantagem do método da energia em comparação com a aplicação direta da equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a este problema. A velocidade do corpo varia simultaneamente em módulo, direção e sentido, pois sua aceleração tem componentes normal e tangencial à trajetória, e a varinha exerce uma tensão (desconhecida) sobre o corpo. Para resolver o problema aplicando a segunda lei de Newton, teríamos que conhecer todas essas grandezas; mas, pelo método da energia, isto não é necessário e podemos determinar a velocidade do corpo para qualquer ângulo θ dado (ou altura y dada). Depois da determinação de v pelo método da energia, pode-se obter as componentes da aceleração do corpo caso necessário.

Uma variação interessante deste problema ocorre quando o corpo está preso ao ponto C não por uma varinha rígida, mas por uma corda. Neste caso, dependendo da velocidade inicial v_0 , a corda não consegue sustentar o corpo quando ele atinge um determinado ângulo θ_m (o índice m indica “máximo”) e o corpo descreve uma trajetória parabólica a partir desse ângulo, como mostrado na Figura 5.

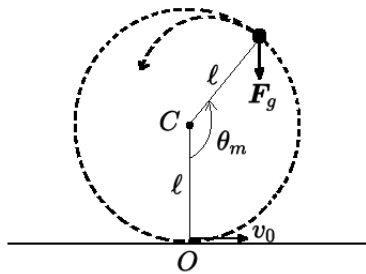


Figura 5: Trajetória de um corpo preso ao ponto C por uma corda de comprimento ℓ lançado com velocidade v_0 insuficiente para manter a tensão na corda até $\theta = \pi$.

Se a velocidade inicial v_0 não for suficientemente grande para fazer com que o corpo chegue ao topo da circunferência (embora essa velocidade possa ser suficiente para tal se o corpo estivesse preso a uma varinha rígida), o corpo cairá a partir de $\theta = \theta_m$ descrevendo uma trajetória parabólica como na Figura 5. O ponto de queda é alcançado quando a tensão na corda cai a zero e a componente de $\mathbf{F}_g$ ao longo do raio do círculo é justamente igual à massa m multiplicada pela aceleração centrípeta v^2/ℓ .

Uma situação exatamente similar ocorre quando um corpo se move em uma trajetória circular metálica (como em um *loop* de uma montanha russa) e a força de reação normal feita pela superfície sobre o corpo se anula em $\theta = \theta_m$ (lembre-se do exercício 7 resolvido na última vídeoaula da Aula 14).

A componente da força peso ao longo do raio do círculo em $\theta = \theta_m$ é $mg \cos(\pi - \theta_m)$. Logo,

$$mg \cos(\pi - \theta_m) = \frac{mv^2}{\ell} \quad (\text{assumindo que } \frac{\pi}{2} < \theta_m < \pi).$$

Substituindo

$$v^2 = v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos \theta_m)$$

nesta equação e isolando $\cos \theta_m$, obtemos:

$$\cos \theta_m = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3g\ell}.$$

A condição para que θ_m seja igual a π é

$$v_0 = \sqrt{5g\ell}.$$

Portanto, se o corpo preso a uma corda for lançado com velocidade inicial v_0 menor que $\sqrt{5g\ell}$ ele não atingirá o topo do círculo. Caso ele estivesse preso a uma varinha rígida, com esta velocidade inicial ele passaria pelo ponto $\theta = \pi$, pois a velocidade v_0 mínima para ele atingir o topo é $2\sqrt{g\ell}$.

4 A gravitação universal: uma força central conservativa

Os problemas de conservação de energia que estudamos até agora envolvem somente a conhecida força da gravidade nas vizinhanças da superfície da

Terra. Esta força, que experimentamos diariamente, tem efetivamente o mesmo módulo, direção e sentido dentro de uma ampla região circundando a Terra, independentemente de sua localização³.

Porém, como visto na Aula 7, a interação gravitacional é uma força que varia de forma inversa ao quadrado da distância entre as duas partículas e atua ao longo da linha que une seus centros. Ela é um exemplo da importante classe de forças denominadas de *forças centrais*, que são puramente radiais com relação a um ponto dado, o “centro de forças”. A força gravitacional tem, além disso, a propriedade de *simetria esférica*. Isto quer dizer que o módulo da força depende somente da distância radial ao centro de forças e não da direção.

Demonstraremos a seguir que todas as forças centrais com simetria esférica são conservativas e consideraremos também aspectos especiais de uma força do tipo $1/r^2$, que é o das forças gravitacional e eletrostática.

Se uma partícula está sujeita a uma força central, o vetor força $\mathbf{F}$ atuando sobre o corpo tem apenas uma componente, F_r . Se a força também tiver simetria esférica, então pode-se escrever F_r apenas em função de r :

$$F_r = f(r). \quad (4)$$

Vamos provar que qualquer força central com simetria esférica deste tipo é conservativa, demonstrando que o trabalho realizado pela força sobre uma partícula quando esta vai de um ponto A a um ponto B não depende da trajetória seguida, mas apenas dos pontos inicial e final. Se este resultado se cumpre, então é certo que se a partícula vai de A a B por um caminho e volta de B a A por outro caminho qualquer, a força central não realizará nenhum trabalho líquido sobre a partícula e esta (caso nenhuma outra força realize trabalho sobre a partícula) retornará a A com a mesma energia cinética com que partiu deste ponto inicialmente. Isto corresponde exatamente à propriedade conservativa como definida para movimentos unidimensionais na Aula 14.

Vamos supor que o centro de forças está em O e vamos considerar o trabalho realizado pela força central $\mathbf{F}$ sobre a partícula quando esta sofre um deslocamento $d\mathbf{s}$ ao longo da trajetória, como mostrado na Figura 6.

³Existem, porém, pequenas variações locais detectáveis por instrumentos suficientemente sensíveis. Veja, por exemplo, o artigo da Wikipedia em inglês *Gravity of Earth*: https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth.

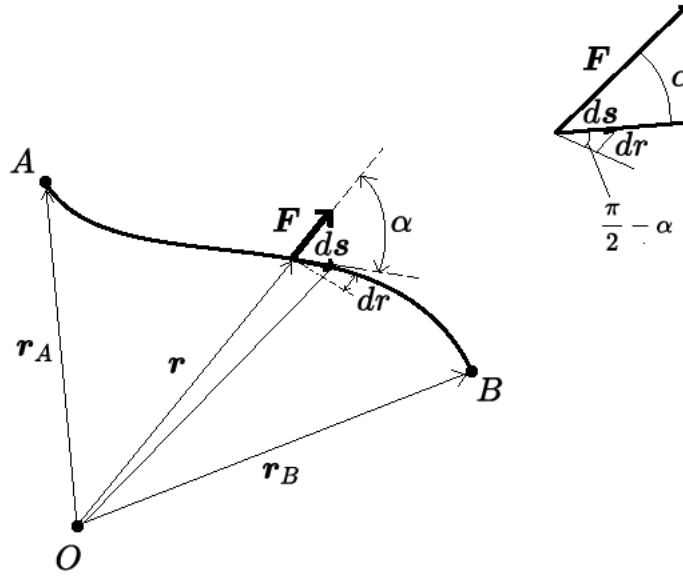


Figura 6: Diagrama para estudo da variação da energia potencial em um campo de forças centrais.

Este trabalho é dado por

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \alpha, \quad (5)$$

onde α é o ângulo entre a direção de $\mathbf{F}$ (que é a mesma de $\mathbf{r}$) e a direção de $d\mathbf{s}$. Da Figura 6 vemos que

$$ds \cos \alpha = dr,$$

onde dr é a variação da distância a O quando a partícula se desloca por $d\mathbf{s}$. Substituindo este resultado em (5), obtemos

$$dW = F dr.$$

Como o módulo da força depende apenas de r (equação (4)), podemos escrever

$$dW = f(r) dr. \quad (6)$$

O trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ sobre a partícula quando ela se move de A até B é dado por

$$W = \int_A^B dW,$$

que, usando a equação (6), pode ser escrito como:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr. \quad (7)$$

Note que a integral em (7) depende apenas dos limites r_A e r_B e não da trajetória que liga A a B . Portanto, concluímos que a força central com simetria esférica é conservativa.

Este resultado poderia ser obtido de uma forma ligeiramente diferente se imaginarmos que a trajetória percorrida entre A e B é formada por uma sucessão de pequenos degraus, como mostrado na Figura 7(a).

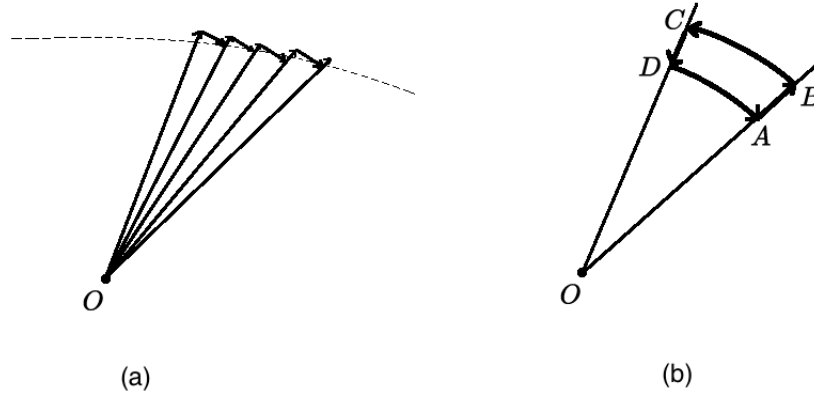


Figura 7: (a) Análise de uma trajetória arbitrária em termos de elementos radiais e transversais. (b) Trajetória fechada em um campo de forças conservativo.

Uma componente de cada degrau é um deslocamento ao longo de uma direção perpendicular a r , mantendo r constante. O trabalho da força associado a este deslocamento é zero, pois a força é perpendicular ao movimento. A outra componente de cada degrau é um deslocamento puramente radial, de maneira que a força e o deslocamento estão na mesma direção. O trabalho da força associado a cada um desses pequenos deslocamentos radiais é

$$dW = F dr = f(r) dr,$$

que é o mesmo resultado obtido em (6).

O inverso do resultado obtido acima é o seguinte:

Um campo de forças centrais que é também conservativo deve ter simetria esférica.

Para demonstrar isto, suponhamos que existe um centro de forças no ponto O da Figura 7(b). Imaginemos uma trajetória fechada $ABCD$, formada por pequenas porções de duas linhas radiais traçadas a partir de O e pelos dois arcos circulares BC e DA (ver Figura 7(b)). Como, por definição, a força é puramente central, ela não tem nenhuma componente perpendicular à direção radial, traçada desde O a qualquer ponto. Portanto, se imaginarmos que uma partícula é levada pela trajetória $ABCD$, ele não experimentará nenhuma força ao longo de BC e de DA . A condição de que a força é conservativa requer que os trabalhos realizados ao longo de AB e CD tenham valores iguais e opostos (pois as distâncias radiais percorridas são iguais e apenas o sentido muda). Como essas duas linhas têm o mesmo comprimento, o valor médio da força deve ser o mesmo para as duas. Se imaginarmos que os comprimentos dessas trajetórias podem ser feitos arbitrariamente pequenos, concluímos que o valor da força para um valor qualquer (escalar) de r é independente da direção do vetor $\mathbf{r}$. Esta é a propriedade de simetria esférica.

As mais importantes fontes de campos de forças centrais com simetria esférica são distribuições de massa ou de carga elétrica com simetria esférica.

É importante destacar que uma força pode ser conservativa sem ser, nem central, nem esféricamente simétrica. Por exemplo, o efeito gravitacional combinado de um par de partículas de massas desiguais, separadas por uma dada distância, tem uma dependência complicada com a direção e a posição, mas sabe-se que a força é conservativa porque é dada pela superposição de dois campos individuais de forças conservativas gerados por massas separadas.

Dado o resultado expresso por (7), pode-se então definir uma energia potencial $U(r)$ para qualquer corpo sujeito a uma força central com simetria esférica:

$$U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr. \quad (8)$$

Se a energia cinética do corpo nos pontos A e B tiver valores K_A e K_B , respectivamente, então (se nenhum trabalho for feito por outras forças), temos

$$K_B - K_A = W$$

e

$$K_A + U_A = K_B + U_B = E, \quad (9)$$

onde E é a energia mecânica total do corpo.

Em palavras, a energia mecânica total se conserva para um corpo que se move sob a ação de qualquer força central com simetria esférica.

No caso particular em que a força depende do inverso do quadrado da distância, ela pode ser escrita como

$$f(r) = \frac{C}{r^2}. \quad (10)$$

Para tal caso, substituindo (10) em (8), temos

$$U_B - U_A = -C \int_{r_A}^{r_B} r^{-2} dr,$$

de onde obtemos:

$$U_B - U_A = C \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (11)$$

Para terminar, resta escolher a posição correspondente ao zero de energia potencial. É conveniente fazer $U = 0$ em $r = \infty$, ou seja, em pontos infinitamente distantes da fonte O . A força F se anula nesses pontos, de maneira que o efeito de uma partícula em O sobre outra partícula, normalmente chamada de *partícula de prova*, localizada em $r = \infty$ é desprezível. Com esta definição, fazendo $r_A = \infty$ e $U_A = 0$ em (11), a energia potencial de uma partícula de prova em B torna-se

$$U_B = \frac{C}{r_B}.$$

Eliminando o subíndice B supérfluo, obtemos:

$$U(r) = \frac{C}{r}. \quad (12)$$

Esta é a expressão para a energia potencial de uma partícula de prova em função de sua posição.

A equação (12) é válida tanto para uma força atrativa como para uma força repulsiva, sendo que a constante C é negativa para forças atrativas e positiva para forças repulsivas.

Em particular, para uma partícula de massa m sob atração gravitacional de um corpo pontual de massa M (o qual vamos supor que está fixo na origem O), temos:

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (13)$$

de maneira que a constante C em (10) é

$$C = -GMm.$$

Logo,

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (14)$$

É importante frisar que as equações (13) e (14) se referem apenas à interação entre dois corpos que podem ser considerados como pontuais, ou seja, cujas dimensões lineares sejam pequenas em comparação com a distância que os separa.

Alguns dos problemas gravitacionais mais interessantes e importantes envolvem situações em que as dimensões dos corpos envolvidos não podem ser desprezadas. Veremos alguns exemplos desses problemas na seção seguinte.

5 Atração gravitacional de um corpo esférico

Consideremos uma esfera sólida e grande de raio R_0 e massa $\overline{M}$, como a mostrada na Figura 8. Nosso problema é calcular a força com que essa esfera atrai um pequeno corpo de massa m localizado em um ponto P arbitrário a uma distância r do centro da esfera.

Vamos supor que a densidade do material que constitui a esfera pode variar com a distância ao centro (como é o caso da Terra), mas que a densidade é a mesma para todos os pontos que estejam a uma mesma distância do centro.

Podemos então tratar a esfera sólida como formada por um grande número de cascas esféricas finas e uniformes, como as sucessivas cascas de uma cebola. Como a força gravitacional newtoniana obedece ao princípio de superposição, o efeito gravitacional total da esfera pode ser calculado pela soma dos efeitos de cada casca individualmente. Desta forma, o problema básico passa a ser o de calcular a força sobre a massa m exercida por uma casca esférica fina de raio R arbitrário.

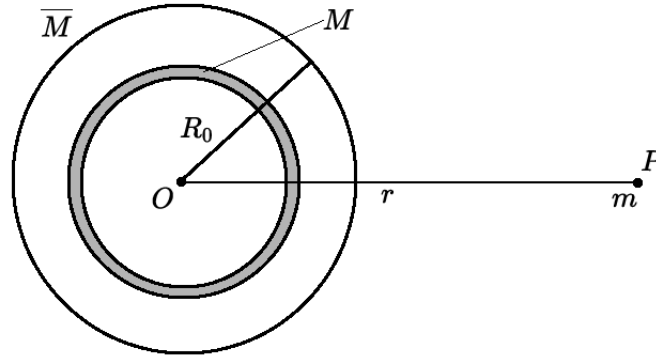


Figura 8: Uma esfera sólida pode ser vista como formada por um conjunto de finas cascas esféricas concêntricas.

5.1 Atração gravitacional de uma casca esférica fina

Para calcular a força F_r que uma casca esférica fina exerce sobre uma partícula de massa m a uma distância r de seu centro, podemos dividir a casca esférica em pequenos elementos de massa, calcular a força que cada um deles exerce sobre m e, então, pelo princípio de superposição, somar vetorialmente todas essas forças.

Há, porém, uma maneira mais simples de calcular F_r . Ela consiste em calcular a energia potencial U da partícula de massa m na presença da casca esférica e depois usar a equação (21) da Aula 14 para obter a força,

$$F_r = -\frac{dU}{dr}. \quad (15)$$

Para o cálculo de U , também vamos dividir a casca esférica em pequenos elementos de massa, mas agora a soma das contribuições de cada um deles para o valor total de U é uma soma de grandezas *escalares* e não vetoriais. Isto simplifica bastante o cálculo. Vamos usar esta abordagem a seguir.

Para calcular U , vamos considerar o esquema mostrado na Figura 9. A figura mostra uma casca esférica de espessura desprezível, com massa M e raio R . O corpo de massa m está a uma distância r do centro da casca.

A casca esférica pode ser considerada como composta pela soma de anéis como o indicado pela região pintada de cinza na Figura 9.

O anel mostrado na Figura 9 corresponde à região da casca esférica compreendida entre as direções θ e $\theta + d\theta$ girada em torno do eixo OP . Vamos

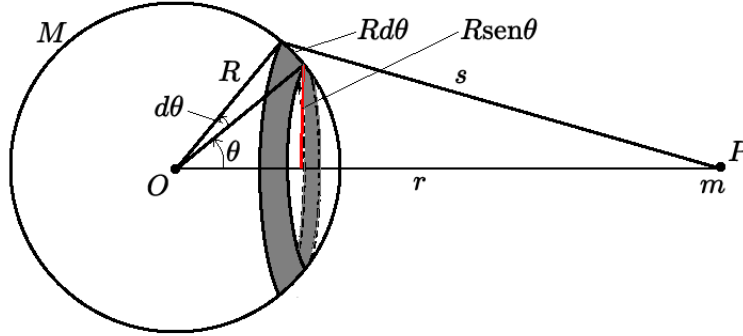


Figura 9: O efeito gravitacional de uma casca individual de espessura desprezível pode ser obtido tratando-a como formada por um conjunto de anéis como o indicado em cinza.

supor que $d\theta$ é infinitesimal, de maneira todos os pontos do anel podem ser considerados como equidistantes de P , ou seja, estão à mesma distância s de m e formam o mesmo ângulo θ com a linha OP . Portanto, a contribuição do anel para a energia potencial total é dada por,

$$dU = -\frac{GmdM}{s},$$

onde dM é a massa do anel.

Para calcular a massa dM do anel, consideremos a geometria da Figura 9. A largura do anel é $Rd\theta$ e o seu raio (indicado em vermelho na figura) é $R \sin\theta$, de maneira que sua área é

$$A_{\text{anel}} = 2\pi R \sin\theta \times Rd\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta.$$

Agora, a área de toda a casca esférica é $4\pi R^2$, de maneira que a massa dM pode ser obtida como,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= \frac{A_{\text{anel}}}{4\pi R^2} \Rightarrow \\ dM &= \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} M = \frac{M}{2} \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na expressão para dU acima, obtemos:

$$dU = -\frac{GMm}{2} \frac{\sin\theta d\theta}{s}. \quad (16)$$

A equação (16) nos dá a contribuição do anel mostrado na Figura 9 para a energia potencial da partícula de massa m na presença da casca esférica. Para calcular a energia potencial total associada à casca esférica inteira, temos que somar as contribuições do tipo dU para todos os anéis que constituem a casca, ou seja, temos que integrar dU por todos os valores de θ , indo de 0 a π :

$$U(r) = -\frac{GMm}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\text{sen}\theta d\theta}{s}. \quad (17)$$

Para o cálculo da integral em (17), devemos notar que s varia com θ , de maneira que temos que encontrar uma expressão que relacione s com θ . Para isto, vamos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo formado por R , r e s na Figura 9:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta.$$

Derivando os termos dos dois lados da igualdade em relação a θ e notando que R e r são constantes, temos

$$2s \frac{ds}{d\theta} = 2rR \text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\text{sen}\theta d\theta}{s} = \frac{ds}{rR}.$$

O termo do lado esquerdo desta equação é exatamente o integrando da equação (17), de maneira que podemos escrever:

$$U(r) = -\frac{GMm}{2rR} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} ds. \quad (18)$$

Para o cálculo da integral de ds , podemos distinguir dois casos:

Caso 1. O ponto P está *fora* da superfície esférica (ou seja, $r > R$, como no desenho da Figura 9). Neste caso, os limites de integração para s são os seguintes:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow s_{\min} = r - R \\ \theta = \pi &\Rightarrow s_{\max} = r + R. \end{aligned}$$

Então, a integral em (18) fica:

$$\begin{aligned}
 U(r) &= -\frac{GMm}{2rR} \int_{r-R}^{r+R} ds \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} \left[s \right]_{r-R}^{r+R} \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} [r+R - (r-R)] \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} 2R \Rightarrow \\
 U(r) &= -\frac{GMm}{r} \quad (\text{ponto } \textit{externo} \text{ à casca esférica}). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Caso 2. O ponto P está *dentro* da superfície esférica (ou seja, $r < R$). Neste caso, os limites de integração para s passam a ser:

$$\begin{aligned}
 \theta = 0 &\Rightarrow s_{\min} = R - r \\
 \theta = \pi &\Rightarrow s_{\max} = R + r.
 \end{aligned}$$

A integral em (18) fica, então:

$$\begin{aligned}
 U(r) &= -\frac{GMm}{2rR} \int_{R-r}^{R+r} ds \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} \left[s \right]_{R-r}^{R+r} \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} [R+r - (R-r)] \\
 &= -\frac{GMm}{2rR} 2r \Rightarrow \\
 U(r) &= -\frac{GMm}{R} \quad (\text{ponto } \textit{interno} \text{ à casca esférica}). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Embora estes dois resultados sejam parecidos, há uma diferença fundamental entre eles. A equação (19) nos diz que a energia potencial de interação entre a casca esférica e uma partícula externa a ela é *a mesma* que teríamos se toda a massa M da casca estivesse concentrada em seu centro. Já a equação (20) nos diz que a energia potencial de interação quando a partícula está dentro da casca esférica é constante.

Vamos agora usar a equação (15) para obter a força F_r feita pela casca esférica sobre a partícula de massa m nos dois casos:

Caso 1.

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \quad (\text{ponto } \textit{externo} \text{ à casca esférica}). \quad (21)$$

Caso 2.

$$F_r = 0 \quad (\text{ponto } \textit{interno} \text{ à casca esférica}). \quad (22)$$

A Figura 10 mostra os gráficos da energia potencial e da força em função da distância radial r entre a partícula de massa m e o centro da casca esférica. Para $r > R$, os gráficos são válidos mesmo que a distribuição de massa na esfera sólida não seja homogênea (como é o caso da Terra, por exemplo); porém, para $r < R$ os gráficos mostrados na Figura 10 só são válidos para uma esfera homogênea. Para um corpo como a Terra, eles seriam diferentes.

5.2 Atração gravitacional de uma esfera sólida

Agora que obtivemos a energia potencial e a força gravitacional de uma casca esférica, podemos voltar ao problema original e obter a energia potencial e a força gravitacional de um corpo esférico sólido.

Nossa suposição inicial é a de que a esfera sólida pode ser considerada como constituída por uma sucessão de superfícies esféricas *uniformes*, de maneira que a densidade possa variar com a distância radial a partir do centro.

Assumindo esta consideração de simetria, pode-se obter algumas conclusões acerca da força gravitacional exercida pela esfera sobre uma partícula de teste. Vamos supor que a massa total da esfera é M e seu raio é R .

Caso 1. A partícula está *fora* da esfera ($r > R$).

Como cada uma das cascas esféricas que compõem a esfera sólida atua como se sua massa total estivesse concentrada no centro, o mesmo ocorre para a esfera sólida. Independentemente da forma como a densidade varie com a distância radial, temos:

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (\text{ponto } \textit{fora} \text{ da esfera}). \quad (23)$$

Este resultado foi obtido por Newton. Não importa a que distância a partícula de massa m esteja do centro da esfera de massa M , a expressão

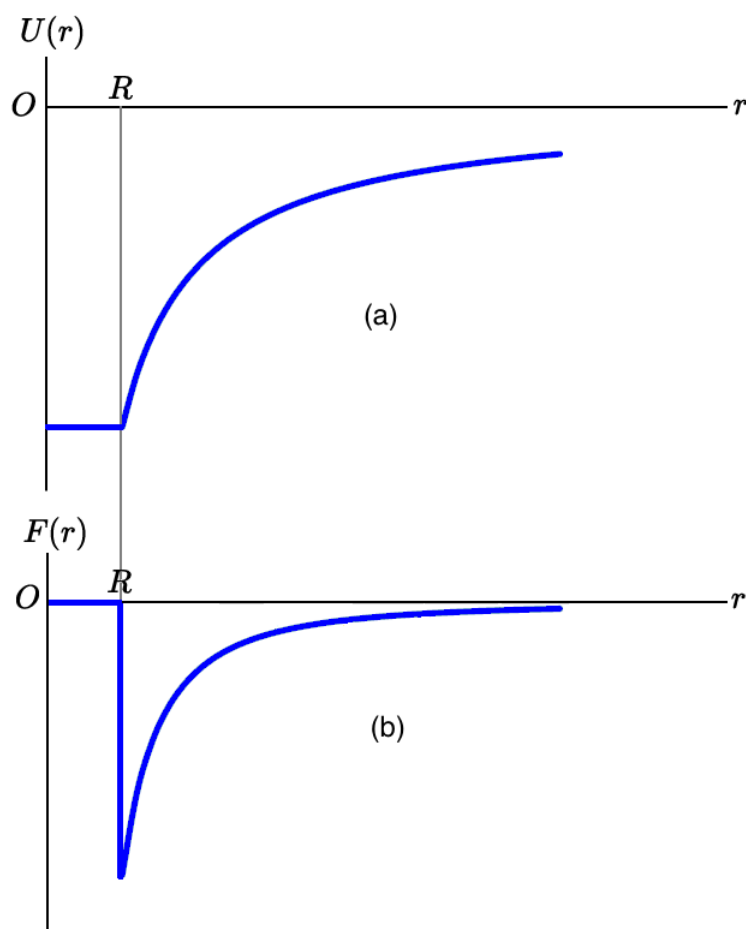


Figura 10: (a) Energia potencial gravitacional de uma partícula em função de sua distância r ao centro de uma casca esférica de raio R . (b) Força gravitacional exercida pela casca esférica sobre a partícula em função de r .

para a força gravitacional atrativa é a mesma, dada por (23). Por exemplo, se a esfera de massa M for a Terra a lei de força com que ela atrai um corpo perto de sua superfície, como uma maçã em uma árvore, ou um corpo muito longe, como a Lua, é a mesma!⁴

A energia potencial gravitacional também é a mesma que existiria se toda a massa M da esfera estivesse localizada em seu centro:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{ponto } \textit{fora} \text{ da esfera}). \quad (24)$$

Caso 2. A partícula está *dentro* da esfera ($r < R$).

Neste caso, deve-se proceder com mais cuidado, mas duas constatações são claramente evidentes:

- a. A contribuição para a força de todas as cascas esféricas *externas* ao ponto onde está a partícula de teste é zero, pela equação (22).
- b. Todas as cascas esféricas situadas no *interior* do ponto onde está a partícula de teste atuam como se suas massas estivessem concentradas no centro, pela equação (21).

Portanto, para especificar a força sobre uma partícula que está dentro da esfera sólida, a uma distância r de seu centro, deve-se conhecer a fração da massa total da esfera contida no interior de uma esfera de raio r .

Um caso particular interessante é o em que a esfera é *homogênea*, isto é, sua densidade é a mesma (constante) para qualquer raio r . Neste caso, a fração da massa total da esfera dentro de um raio r é igual à fração do volume total da esfera dentro deste raio:

$$\frac{r^3}{R^3}.$$

Portanto, a massa dentro de uma esfera de raio r é

$$\frac{r^3}{R^3} M.$$

A força que a partícula de teste sofre é, então, a mesma que ela sofreria caso toda esta massa estivesse concentrada no centro:

$$F(r) = -\frac{GMr^3}{R^3} \frac{m}{r^2} \Rightarrow$$

⁴Hoje em dia esta afirmação pode parecer trivial e não merecedora do ponto de exclamação usado, mas imaginem o seu impacto no fim do séc. XVII.

$$F(r) = -\frac{GMm}{R^3}r \quad (\text{ponto dentro de uma esfera homogênea}). \quad (25)$$

Neste caso particular, a força gravitacional atrativa varia linearmente com a distância r da partícula ao centro.

A energia potencial gravitacional para este caso particular pode ser calculada com o uso da equação (8):

$$U(r) - U(R) = - \int_R^r F(r) dr,$$

com $U(R)$ obtida fazendo-se $r = R$ em (24)

Substituindo (25) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} U(r) - U(R) &= \frac{GMm}{R^3} \int_R^r r dr \\ &= \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2). \end{aligned}$$

Substituindo

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}$$

nesta expressão:

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2) - \frac{GMm}{R} \\ &= \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2 - 2R^2) \\ &= \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \Rightarrow \\ U(r) &= -\frac{GMm}{2R^3} (3R^2 - r^2) \quad (r < R) \quad (\text{esfera homogênea}) \end{aligned} \quad (26)$$

Em particular, para $r = 0$, temos

$$U(0) = -\frac{3GMm}{2R}.$$

Se imaginarmos uma partícula de teste que sai do centro da esfera sólida, sua energia potencial cresce de forma parabólica com r , conforme (26), até $r = R$; depois disso, para $r > R$, sua energia potencial cresce conforme $1/r$ como em (24).

Os comportamentos da força e da energia potencial gravitacional em função de r para um corpo esférico homogêneo estão mostrados na Figura 11.

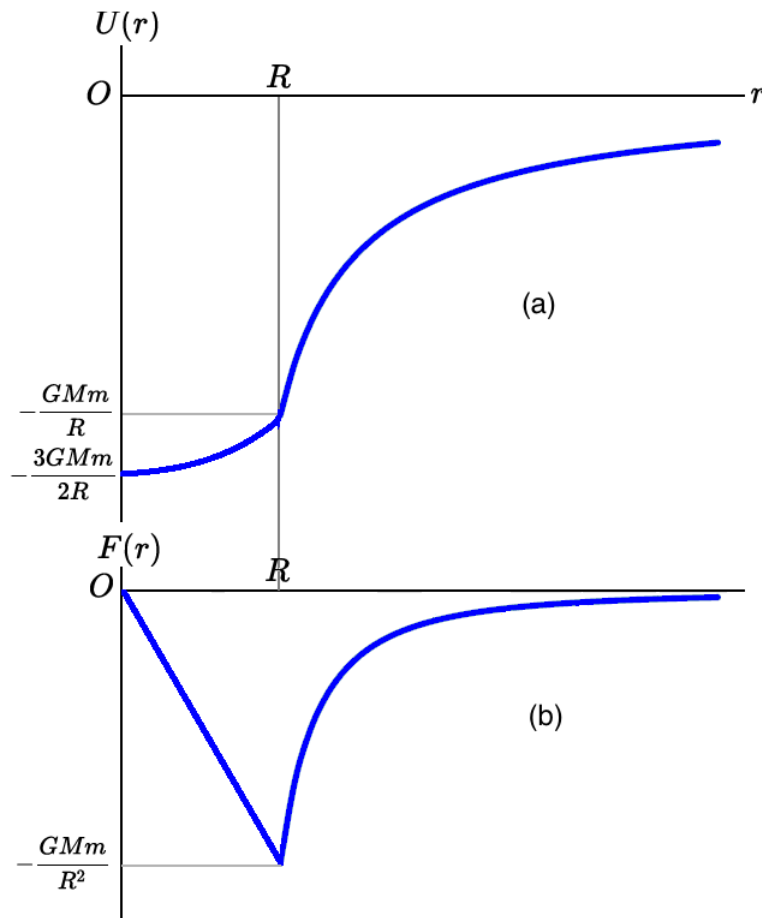


Figura 11: (a) Energia potencial gravitacional de uma partícula em função de sua distância r ao centro de uma esfera sólida homogênea de raio R . (b) Força gravitacional exercida pela esfera sólida homogênea sobre a partícula em função de r .

6 Velocidade de escape

Considere um corpo sobre a superfície de uma grande esfera, como um planeta, por exemplo. Suponha que desejamos lançar o corpo para o espaço exterior de maneira que ele não retorne nunca mais, vencendo a força de atração gravitacional que o planeta exerce sobre o corpo. Que velocidade devemos imprimir ao corpo para que isso aconteça?

Este problema pode ser resolvido facilmente utilizando a conservação da energia. Na superfície do planeta ($r = R$) a energia potencial é dada por

$$U(R) = -\frac{GMm}{R},$$

e a uma grande distância da superfície (que representaremos por $r = \infty$) ela é $U(\infty) = 0$. Como queremos que o corpo atinja o infinito, ele deve chegar lá com uma certa energia cinética $K(\infty)$. Então, o corpo deve ser lançado com uma energia cinética $K(R)$ cujo valor é, pela conservação da energia, dado por⁵

$$K(R) = K(\infty) + \frac{GMm}{R}.$$

Portanto,

$$K(R) \geq \frac{GMm}{R}.$$

A condição crítica é obtida quando se usa o sinal de igual na expressão acima. Neste caso, o corpo atinge o infinito com uma velocidade residual nula. O menor valor de energia cinética que o corpo deve ter para escapar da esfera de raio R é dado por,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{R}.$$

Portanto, a velocidade de escape mínima para uma partícula na superfície de uma esfera de raio R é:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (27)$$

⁵A conservação da energia implica que

$$K(R) + U(R) = K(\infty) + \overset{0}{U(\infty)} \Rightarrow K(R) = K(\infty) - U(R).$$

Ao calcular a velocidade de escape de um corpo na superfície da Terra, é conveniente expressar o resultado em termos da aceleração g da gravidade na superfície da Terra e do raio R_T da Terra. Para fazer isso, note que a força gravitacional sobre uma massa m em $r = R_T$ pode ser escrita como mg . Então,

$$\frac{GM_T m}{R_T^2} = mg,$$

o que implica que

$$\frac{GM_T}{R_T} = gR_T.$$

Substituindo este resultado na equação (27), obtemos então

$$v_0 = \sqrt{2gR_T}.$$

Substituindo nesta expressão os valores numéricos $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ e $R_T \approx 6,4 \times 10^6 \text{ m}$, temos que

$$v_0 \approx 11,2 \text{ km/s}.$$