Energia em mecânica clássica

Antônio Roque

Novembro 2021

1 Introdução

Todas as pessoas, sejam elas cientistas ou não, têm algum entendimento do que é energia. Energia é aquilo de que precisamos para fazer coisas. Todos sabemos que cada litro de gasolina, cada kWh de eletricidade, cada bateria de carro, cada caloria de comida, representam, de uma forma ou outra, aquilo que é necessário para realizar o que chamamos de *trabalho*. Em geral, não se pensa no custo de uma força, uma aceleração ou um momento linear, mas todos entendem quando se fala de custo de energia. A energia é a moeda universal que existe, aparentemente, em formas variadas e que podem ser convertidas umas nas outras.

O que foi dito acima não define *energia*. Na realidade, os físicos não têm uma definição precisa do que é energia. Certa vez, o físico holandês Hendrik A. Kramers (1894-1952), disse que "os mais importantes e proveitosos conceitos físicos são aqueles para os quais não é possível atribuir uma definição bem clara". Esta frase se aplica bem ao conceito de energia.

A chave para o enorme valor do conceito de energia é que, embora ela possa se transformar de uma forma em outra, sua quantidade total é sempre *conservada*. Mesmo sem ter uma definição clara do que é energia, possuímos métodos quantitativos para medir as diferentes formas em que ela aparece: gravitacional, elétrica, magnética, elástica, cinética, etc. Historicamente, sempre que há uma situação em que aparentemente uma certa quantidade de energia desaparece em um processo qualquer, não estando em uma das formas conhecidas, tem sido possível reconhecer e definir uma nova forma de energia que nos permite salvar a lei de conservação. E as leis de conservação, como já deve ter ficado claro neste curso, são um dos mais poderosos instrumentos que os físicos têm para estruturar sua descrição da natureza.

Neste curso, lidaremos apenas com as duas principais formas de energia que são relevantes para a mecânica clássica: a energia cinética, associada ao movimento de um corpo, e a energia potencial, associada a interações entre corpos – gravitacional, eletromagnética, etc – e a deformações elásticas. Se a energia tiver que ser transformada de uma dessas formas para outras formas "não mecânicas", como energia química, radiação ou o movimento aleatório de átomos e moléculas que chamamos de calor, então, do ponto de vista da mecânica, ela se perde. Esta é uma propriedade muito importante, pois significa que se restringirmos nossa atenção a aspectos puramente mecânicos a conservação da energia não se cumpre. A lei da conservação da energia nunca deve ser assumida cegamente. Deve-se sempre levar em consideraçãoo o contexto em que ela é aplicada.

No contexto restrito da mecânica clássica, apenas em algumas situações especiais a energia mecânica é conservada. Não obstante, nas situações em que a conservação da energia mecânica é válida ela tem enorme valor para a análise e a solução de problemas físicos.

2 Integrais de movimento

Na Aula 8, introduzimos brevemente a noção básica de trabalho feito por uma força que atua sobre um corpo, produzindo o aumento correspondente na energia cinética do corpo. Nesta seção, voltaremos a este tema para desenvolvê-lo mais amplamente.

Para começar, vamos novamente considerar o caso de um corpo de massa m movendo-se em linha reta sob a ação de uma força F que pode depender tanto do tempo t como do espaço x (como o movimento é unidimensional, não precisamos utilizar notação vetorial). Pela segunda lei de Newton, temos

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt}.$$

Vamos supor que a força atua por um tempo t durante o qual a posição do corpo varia de x_1 a x_2 e a velocidade varia de v_1 a v_2.

Então, multiplicando a equação acima por dt e integrando temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = m \int_{v_1}^{v_2} dv = m(v_2 - v_1). \tag{1}$$

Por outro lado, podemos multiplicar a equação para F por dx e integrar também. O resultado é:

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} dx.$$

Mas

$$\frac{dv}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv = v dv.$$

Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = m \left[\frac{v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} \right] = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right). \tag{2}$$

O termo do lado esquerdo na equação (1) é o impulso total da força e o termo do lado esquerdo na equação (2) é o trabalho feito pela força. A equação (1) nos diz que o impulso de F é igual à variação do momento linear do corpo e a equação (2) nos diz que o trabalho feito pela força é igual à variação da energia cinética do corpo.

Se soubermos como F varia com t e x, podemos representar as integrais dos lados esquerdos das equações (1) e (2) pelas áreas abaixo dos gráficos de $F \times t$ e $F \times x$ entre os limites apropriados. Veja um exemplo na Figura 1.

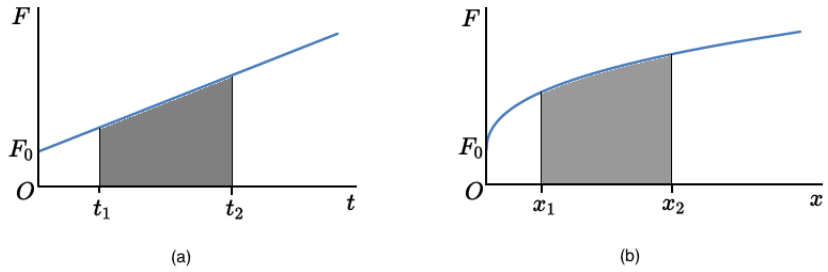


Figura 1: (a) Força que varia linearmente com o tempo. A área abaixo da curva entre t_1 e t_2 é o impulso total da força entre esses tempos. (b) Mesma força de (a) representada em função do espaço. A área abaixo da curva entre x_1 e x_2 é o trabalho feito pela força quando o corpo se desloca de x_1 para x_2.

Vamos passar agora para o caso geral de movimento em duas ou três dimensões. Neste caso, temos que tomar cuidado com as definições das integrais que caracterizam impulso e trabalho, pois as variáveis envolvidas,

força, posição e velocidade são vetoriais. Isto é, não basta apenas conhecer os módulos dessas variáveis, mas também suas direções e sentidos.

A segunda lei de Newton, na forma vetorial, é

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

A definição vetorial de impulso não apresenta maiores dificuldades, pois a integral é feita no tempo, que é um escalar. Temos, então:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt = m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1). \tag{3}$$

A maneira de interpretar a integral de $\boldsymbol{F}$ em (3) quando a direção de $\boldsymbol{F}$ varia com o tempo é a seguinte: para cada pequeno intervalo de tempo Δt entre t_1 e t_2, calculamos o pequeno impulso correspondente $\boldsymbol{F}\Delta t$ (que é um vetor apontando em uma certa direção) e depois somamos vetorialmente todos os pequenos impulsos. Este procedimento está ilustrado na Figura 2.

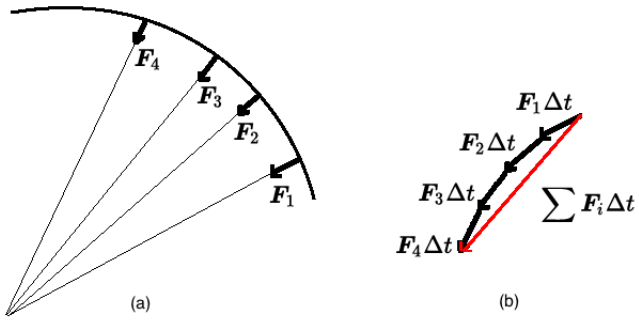


Figura 2: Ilustração do procedimento para o cálculo da integral $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$. (a) Vetores força sobre uma partícula que descreve a trajetória curva para quatro intervalos sucessivos de tempo Δt. (b) Soma vetorial dos quatro vetores $\boldsymbol{F}\Delta t$, indicada pelo vetor em vermelho.

Vamos agora passar para a definição de trabalho no caso vetorial. Temos que tomar mais cuidado neste caso porque ele envolve a integral da força sobre uma partícula calculada ao longo da trajetória descrita pela partícula no espaço. E tanto a força $\boldsymbol{F}$ como os elementos de distância $\Delta \boldsymbol{r}$ que compõem a trajetória são vetores.

Para entender qual é o efeito da aplicação de uma força com direção e sentido arbitrários sobre o movimento de um corpo, vamos considerar os três casos mostrados na Figura 3.

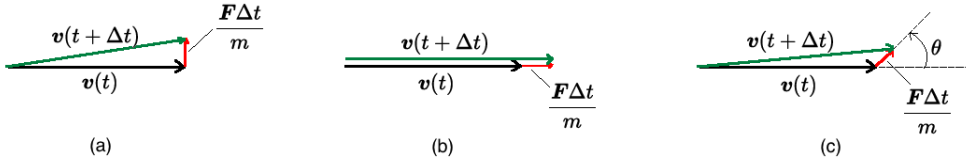


Figura 3: (a) Variação da velocidade devida a um impulso perpendicular a $\boldsymbol{v}$. (b) Variação da velocidade devida a um impulso paralelo a $\boldsymbol{v}$. (c) Variação da velocidade devida a um impulso arbitrário.

Em todos os casos da Figura 3, vamos supor que a força $\boldsymbol{F}$ é aplicada à partícula durante um curto intervalo de tempo Δt. Portanto, a variação na velocidade devida à aplicação da força pode ser calculada como

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}\Delta t}{m}.$$

Vemos que a variação $\Delta \boldsymbol{v}$ na velocidade da partícula está na mesma direção e sentido que $\boldsymbol{F}$.

No caso da Figura 3(a), a força $\boldsymbol{F}$ é aplicada numa direção perpendicular à da velocidade $\boldsymbol{v}$ da partícula, ou seja, a força $\boldsymbol{F}$ e a velocidade $\boldsymbol{v}$ formam um ângulo reto. Vemos pela figura que isto provoca uma variação na direção de $\boldsymbol{v}$ sem alterar significativamente seu módulo. Se imaginarmos que $\Delta t \to 0$, a variação infinitesimal no módulo de $\boldsymbol{v}$ devida à aplicação desta força perpendicular a $\boldsymbol{v}$ vai a zero.

Por outro lado, no caso da Figura 3(b), a força $\boldsymbol{F}$ é aplicada numa direção paralela à da velocidade $\boldsymbol{v}$ da partícula, ou seja, o ângulo entre a força $\boldsymbol{F}$ e a velocidade $\boldsymbol{v}$ é zero. Vemos pela figura que isto provoca uma variação apenas no módulo de $\boldsymbol{v}$ sem alterar sua direção.

Na definição de trabalho, queremos levar em consideração apenas mudanças no *módulo* da velocidade $\boldsymbol{v}$ de uma partícula e não na sua direção. Portanto, a força perpendicular a $\boldsymbol{v}$ no caso da Figura 3(a) não realiza trabalho sobre a partícula, mas a força paralela a $\boldsymbol{v}$ da Figura 3(b) realiza.

A definição de trabalho se restringe somente a forças ou componentes de forças que estejam na direção da velocidade $\boldsymbol{v}$ da partícula.

O que acontece no caso genérico? Isto está mostrado na Figura 3(c). Se a força $\boldsymbol{F}$ formar um ângulo θ com $\boldsymbol{v}$, sua componente ao longo de $\boldsymbol{v}$ é dada por

$$|\boldsymbol{F}|\cos\theta = m\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t}\cos\theta,$$

onde $\Delta\boldsymbol{v}$ é a variação vetorial de $\boldsymbol{v}$ (dada por $\boldsymbol{F}\Delta t/m$). O elemento de distância percorrido pela partícula durante Δt é (pela definição de vetor velocidade),

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\Delta t.$$

O deslocamento da partícula em Δt é o módulo de $\Delta\boldsymbol{r}$.

O trabalho feito pela força $\boldsymbol{F}$ durante o tempo Δt é dado pela componente de $\boldsymbol{F}$ na direção de $\boldsymbol{v}$ multiplicada pelo deslocamento da partícula nesse tempo:

$$\Delta W = |\boldsymbol{F}||\Delta\boldsymbol{r}|\cos\theta = m\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\cancel{\Delta t}}\cos\theta|\boldsymbol{v}|\cancel{\Delta t} = m|\boldsymbol{v}||\Delta\boldsymbol{v}|\cos\theta.$$

Note que a equação acima é *escalar*. Na definição de trabalho, foi eliminada qualquer referência ao efeito de $\boldsymbol{F}$ sobre a variação na direção de $\boldsymbol{v}$ e somente a informação acerca de seu efeito na variação do módulo de $\boldsymbol{v}$ foi mantida.

A expressão acima não é elegante. Podemos reescrevê-la de uma forma muito mais limpa usando a notação do *produto escalar* entre dois vetores visto na disciplina de Geometria Analítica.

Revisão de produto escalar

Por definição, dados dois vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ que formem um ângulo θ entre eles ($0 \leq \theta \leq \pi$), o produto escalar dos dois vetores é

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = AB\cos\theta. \tag{4}$$

Decorre da definição de produto escalar que se dois vetores são ortogonais ($\theta = \pi/2$) o produto escalar entre eles é zero e o produto escalar de um vetor por ele mesmo é

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0 = AA = A^2. \tag{5}$$

Dados os vetores unitários $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\hat{\boldsymbol{k}}$ de um sistema de coordenadas cartesiano, como seus módulos valem 1 e eles são ortogonais entre si temos:

$$\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}\cdot\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = 1 \tag{6}$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = 0. \tag{7}$$

O produto escalar entre dois vetores é independente da ordem em que eles aparecem na operação (propriedade comutativa):

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{8}$$

O produto escalar satisfaz à propriedade distributiva em relação à soma de vetores:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}. \tag{9}$$

Dadas as expressões para os vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ em termos de suas componentes cartesianas,

$$\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z \hat{\boldsymbol{k}}$$

e

$$\boldsymbol{B} = B_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z \hat{\boldsymbol{k}},$$

as propriedades (6), (7) e (9) nos dão que

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{10}$$

Fim da revisão de produto escalar

Em termos do produto escalar, o trabalho ΔW feito pela força $\boldsymbol{F}$ durante o tempo Δt pode ser escrito como:

$$\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = m \left(\boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{v} \right),$$

ou, em termos de quantidades infinitesimais:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = m \left(\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} \right). \tag{11}$$

Vamos agora fazer um truque limpo (e valioso). Da equação (5) para o produto escalar de um vetor por ele mesmo,

$$v^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Vamos agora tomar a diferencial deste termo:

$$dv^2 = d\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right) = d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v} \cdot \, d\boldsymbol{v},$$

onde usamos a propriedade comutativa do produto escalar. A equação acima implica que

$$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2} dv^2.$$

Substituindo em (11):

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} m\, dv^2. \tag{12}$$

Finalmente, vamos agora supor que sob a ação da força $\boldsymbol{F}$ o corpo descreve uma trajetória qualquer no espaço, como a dada na Figura 4, por exemplo. Então, integrando (12) ao longo desta trajetória obtemos o trabalho total feito pela força:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} m \int_{v_1}^{v_2} dv^2 = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right). \tag{13}$$

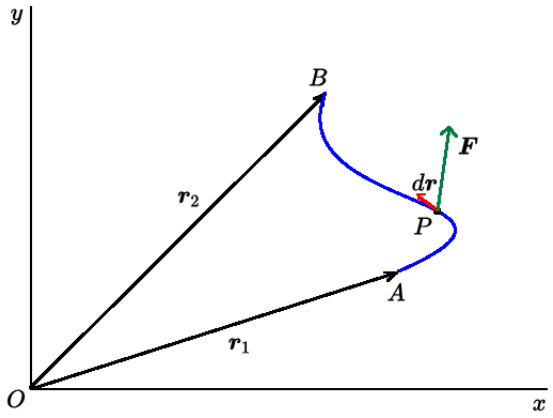


Figura 4: Trajetória genérica (em azul) de uma partícula entre dois pontos (A e B) cujos vetores de posição são $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$. Num ponto qualquer P da trajetória o vetor $d\boldsymbol{r}$ está indicado em vermelho e a força $\boldsymbol{F}$ neste ponto em verde.

A equação (13) descreve, de maneira geral, a relação entre o trabalho e a variação da energia cinética: o trabalho feito por uma força $\boldsymbol{F}$ quando um corpo de desloca ao longo de uma dada trajetória entre um ponto incial e um ponto final é igual à variação da energia cinética do corpo entre esses dois pontos:

$$W = \Delta K = K_f - K_i. \tag{14}$$

A equação (13) apresenta a propriedade mais importante do trabalho e da energia: são grandezas escalares. Um corpo que se move verticalmente com velocidade constante v tem exatamente a mesma energia cinética que teria se se movimentasse horizontalmente ou em qualquer outra direção. Já o seu momento linear depende da direção em que ele se move (pois é um vetor).

3 Unidades

Esta aula trata de trabalho, energia e também de potência. Portanto, antes de seguir adiante vamos dar as unidades destas grandezas físicas e definir potência, que ainda não foi definida.

Da equação (14) fica claro que trabalho e energia devem ter a mesma unidade. No S.I., como já mencionado na seção 6 da Aula 8, a unidade de energia e trabalho é o joule:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Nm} = 1\ \mathrm{kg\ m^2/s^2}.$$

Uma grandeza importante quando se fala de energia, principalmente em aplicações práticas, é a *potência*. Potencia é definida como a taxa com que trabalho é feito:

$$\text{potência} = P = \frac{dW}{dt}.$$

Para um sistema mecânico, podemos substituir (12) na definição acima, obtendo:

$$P = \frac{\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}.$$

Potência é uma grandeza física de grande importância prática, pois o tempo que leva para se realizar algum trabalho dado pode ser vital para uma dada situação. Por exemplo, um pequeno motor elétrico pode ser capaz de içar um objeto muito pesado, mas o tempo que ele levaria para fazer isto pode ser inaceitavelmente longo.

A unidade de potência no S.I. é o watt (W), em homenagem ao inventor e engenheiro escocês James Watt (1736-1819), que aperfeiçoou a máquina a vapor criada originalmente pelo inventor inglês Thomas Newcomen (1664-1729) e que propiciou a Revolução Industrial:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}.$$

O watt é mais comumente utilizado em eletricidade do que em mecânica. Por exemplo, nas contas de energia elétrica a energia consumida é dada em kilowatts hora (kWh) ao invés de joules. Portanto, é importante saber converter de kWh para J:

$$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ J}.$$

Como a energia aparece em diversas formas com usos e aplicações em diferentes áreas do conhecimento, ela costuma ser medida em unidades diferentes do joule. As mais comuns dessas unidades "alternativas" são:

- Caloria (cal), muito usada em química e nutrição. A caloria é definida como a quantidade de energia necessária para elevar a temperatura de 1 g de água de 14,5℃ para 15,5℃:

$$1 \text{ cal} = 4{,}1868 \text{ J},$$

- Elétron-volt (eV), muito usada em física atômica e nuclear, principalmente na forma de seus múltiplos keV (10^3), MeV (10^6) e GeV (10^9). O elétron volt é a quantidade de energia cinética ganha por um elétron ao ser acelerado por uma diferença de potencial elétrico de 1 volt, no vácuo:

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Finalmente, é importante também mencionar que, por causa da famosa equação de Einstein $E = mc^2$, comprovada experimentalmente de inúmeras formas, há uma equivalência entre aquilo que normalmente chamamos de energia e aquilo que normalmente chamamos de massa. Na física clássica massa e energia são conceitos completamente diferentes e é assim que os consideraremos neste curso. Porém, apenas para completar esta seção de unidades, damos abaixo a relação de conversão entre massa e energia:

$$1 \text{ kg} \approx 9 \times 10^{16} \text{ J}.$$

4 Energia potencial gravitacional e conservação da energia mecânica

Vamos agora introduzir a outra forma básica em que energia aparece em mecânica clássica e a lei da conservação da energia mecânica, começando com um exemplo familiar a vocês.

Suponha que um corpo de massa m tenha sido lançado verticalmente para cima e que ele se move sob a ação da força da gravidade, perdendo velocidade à medida que sobe em sua trajetória. Vamos tomar o eixo y como positivo para cima e vamos supor que quando o corpo estava na altura $y = y_1$ ele tinha velocidade v_1 e quando estava na altura $y = y_2$ ele tinha velocidade v_2, como mostrado na Figura 5.

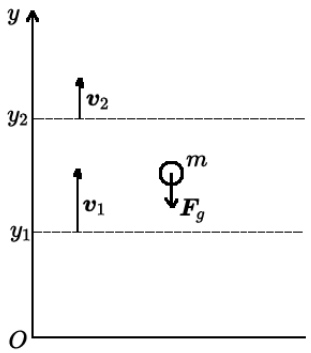


Figura 5: Corpo movendo-se verticalmente para cima, sob a ação da força da gravidade.

Como a única força que atua sobre o corpo é a força gravitacional, sua aceleração é constante,

$$a = -g,$$

onde o sinal negativo indica que a aceleração aponta para baixo. O movimento do corpo é uniformemente variado e, pela equação de Torricelli, as velocidades v_1 e v_2 estão relacionadas às alturas y_1 e y_2 por,

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g(y_2 - y_1).$$

Vamos agora considerar o problema em termos de energia. A variação da energia cinética do corpo entre y_1 e y_2 é dada por,

$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Substituindo a expressão cinemática para $v_2^2 - v_1^2$ nesta equação,

$$K_2 - K_1 = -mg(y_2 - y_1).$$

Até aqui, nada de novo. O termo $-mg$ na equação acima é a força gravitacional F_g atuando sobre o corpo e $y_2 - y_1$ é a distância percorrida pelo corpo entre os dois pontos considerados, de maneira que o termo do lado direito da equação acima é o trabalho feito pela força gravitacional quando o corpo vai de y_1 para y_2. A equação acima é apenas uma instância da relação geral entre trabalho e energia cinética deduzida na seção 2:

$$K_2 - K_1 = W_{y_1 \to y_2} = F_g(y_2 - y_1).$$

Vamos agora reescrever a equação acima de uma forma diferente, com as quantidades que se referem à posição y_1 do corpo de um lado da igualdade e as quantidades que se referem à posição y_2 do corpo do outro lado da igualdade:

$$K_2 + (-F_g y_2) = K_1 + (-F_g y_1)\,.$$

Notem que o que fizemos acima foi deliberadamente "armar" a equação matemática de maneira que de cada lado da igualdade aparece a *soma* das mesmas duas quantidades calculadas em duas posições diferentes. Do lado esquerdo temos a energia cinética K e a quantidade $-F_g y$ calculadas na posição y_2 e, do lado direito, temos essas mesmas duas quantidades calculadas na posiçào y_1. O importante é notar que a soma das duas quantidades é *igual* para as duas posições. Quando algo deste tipo acontece, a soma das quantidades é *conservada*:

$$K(y) + (-F_g y) = \text{ const.}$$

Vamos *definir* a *energia potencial gravitacional* $U(y)$ do corpo em qualquer posição y como:

$$U(y) = -F_g y. \tag{15}$$

Note que, com esta definição, $U = 0$ para $y = 0$. Note ainda, e especialmente, que $U(y)$ é o *negativo* do trabalho feito pela força gravitacional quando o corpo sai de $y = 0$ e vai para y:

$$U(y) = -W_{0 \to y} = -F_g y.$$

Em termos da definição de energia potencial gravitacional, podemos escrever a equação de conservação como

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 = E, \tag{16}$$

onde E é a *energia mecânica total* do corpo.

Substituindo $F_g = -mg$ em (15), temos o resultado conhecido por vocês do ensino médio:

$$U(y) = -F_g y = -(-mg)y \Rightarrow$$
$$U(h) = mgh, \tag{17}$$

onde h indica a altura do corpo em relação ao solo (ou qualquer outro nível horizontal escolhido para ser a origem do sistema de coordenadas).

Para este caso, podemos representar a conservação da energia mecânica graficamente como mostrado na Figura 6.

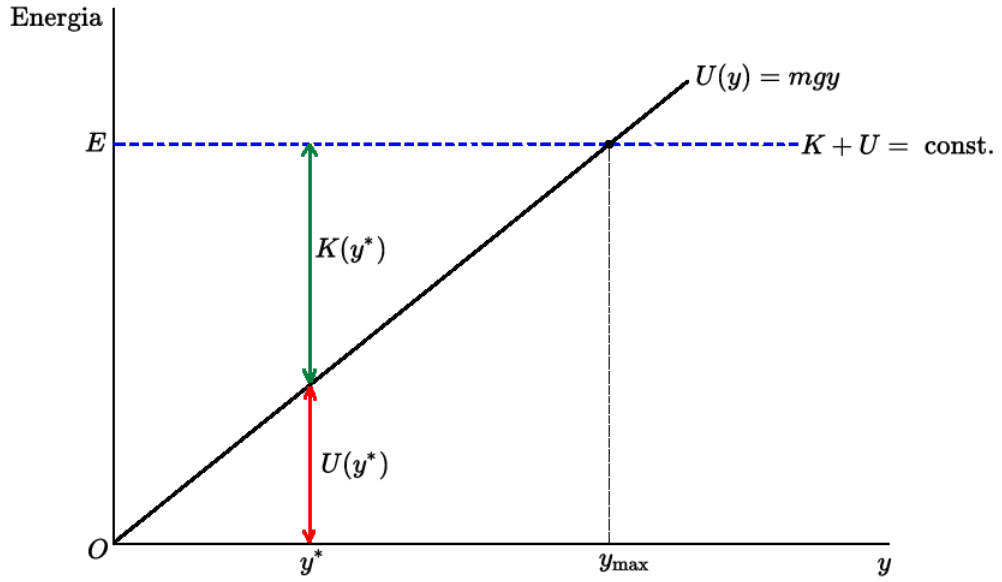


Figura 6: Diagrama de energia para o movimento vertical de um corpo acima da superfície.

Neste gráfico, denominado *diagrama de energia*, o eixo das ordenadas representa energia e o eixo das abscissas representa a distância y em relação ao solo. A energia mecânica total (constante) está representada por uma linha horizontal em azul e a função linear $U(y) = mgy$ que dá a energia potencial em função de y por uma linha reta em preto. Para uma altura qualquer y^*, o valor da energia potencial gravitacional correspondente, $U(y^*)$, está indicado em vermelho e o valor da energia cinética (simplesmente o que falta para chegar ao valor constante E) está indicado em verde.

Note que a energia cinética é máxima (e igual a E) quando $y = 0$ e, correspondentemente, a energia potencial gravitacional é zero neste ponto.

Por outro lado, quando $y = y_{\max}$ a energia potencial é máxima e igual a E e a energia cinética é nula neste ponto. A altura $y_{\max}$ é a altura máxima que o corpo pode atingir, pois para chegar a alturas maiores ele teria que ter energia mecânica total maior que o valor de E dado.

Outra maneira de interpretar a energia potencial gravitacional $U(h)$ dada acima é a seguinte: $U(h)$ representa exatamente a quantidade de trabalho que devemos fazer para elevar o corpo a uma altura h sem dar-lhe nenhuma energia cinética. Para fazer isto, devemos aplicar uma *força externa* $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ ao corpo cujo módulo, durante um breve tempo δt, seja apenas "um suspiro" maior que mg e, em seguida, mudar o módulo de $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ para que ele seja exatamente igual a mg durante praticamente todo o percurso de subida. Fazendo isso, o corpo adquirirá no início uma velocidade infinitesimalmente pequena ($\boldsymbol{v} \approx 0$) para cima que será mantida constante porque as duas forças atuando sobre ele se cancelam ($\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{F}_g = 0$). Então, um breve tempo δt antes do corpo chegar à altura desejada h revertemos o processo e mudamos novamente o módulo de $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ para que ela seja um suspiro menor que mg. Isso fará o corpo parar em h (veja a Figura 7). Como $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ é oposta a $\boldsymbol{F}_g$, o trabalho feito por ela durante a subida até h com velocidade $\boldsymbol{v} \approx 0$ é o negativo do trabalho feito por $\boldsymbol{F}_g$ neste percurso. Se eliminarmos a força externa $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ depois que o corpo chegar a h, ele cairá sob a ação única da força gravitacional $\boldsymbol{F}_g$. O trabalho feito por $\boldsymbol{F}_g$ para levar o corpo ao solo será igual à energia cinética que o corpo terá quando bater no solo. Bate-estacas funcionam desta maneira.

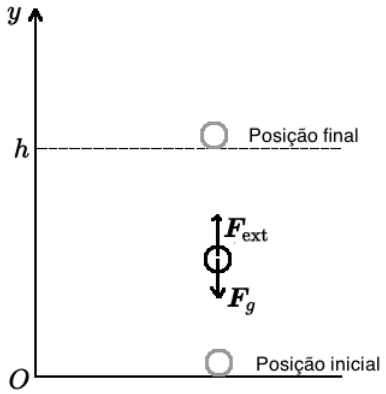


Figura 7: Corpo subindo sob a ação de uma força externa igual e de sentido oposto ao da força gravitacional sobre ele.

5 Energia em movimentos unidimensionais

Ainda temos mais a dizer a respeito de energia e sua conservação e, para que possamos nos concentrar nos conceitos fundamentais, é melhor nos restringirmos a movimentos unidimensionais.

A equação (16) é uma expressão compacta da conservação da energia mecânica total em qualquer problema unidimensional para o qual a força que atua sobre um corpo depende apenas da posição do corpo. Ela foi obtida a partir do exemplo de um corpo jogado verticalmente para cima. Para deduzir o resultado da conservação da energia de maneira mais geral, vamos considerar uma força $F(x)$ qualquer atuando sobre um corpo. Vamos supor que a força $F(x)$ varie com a posição x de forma arbitrária, mas o seu valor é único para qualquer valor dado de x.

O trabalho feito por esta força quando o corpo se move de x_1 para x_2 é dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx.$$

Igualando este trabalho à variação da energia cinética, temos

$$K_2 - K_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \tag{18}$$

Para colocar este resultado na forma de uma equação de conservação, vamos introduzir um ponto de referência arbitrário x_0 e expressar a integral do trabalho como a seguir:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_0} F(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx.$$

Lembrando da seguinte propriedade de integrais definidas,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

podemos reescrever a igualdade acima como

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = -\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx.$$

Substituindo este resultado em (18), temos

$$K_2 - K_1 = -\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx \Rightarrow$$

$$K_2 + \left[-\int_{x_0}^{x_2} F(x)dx \right] = K_1 + \left[-\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx \right].$$

Vamos definir a energia potencial $U(x)$ em qualquer ponto x pela seguinte equação:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx, \tag{19}$$

de maneira que podemos escrever a equação de conservação desejada:

$$K_2 + U(x_2) = K_1 + U(x_1). \tag{20}$$

Note novamente o sinal de menos multiplicando a integral de definição da energia potencial. A energia potencial em qualquer ponto, com relação ao ponto de referência, é sempre definida como o negativo do trabalho feito pela força quando o corpo se move do ponto de referência para o ponto considerado.

O valor da energia potencial no ponto de referência, $U(x_0)$, pode ser definido como zero se quisermos, pois em qualquer problema real precisaremos apenas de *diferenças* de energia potencial entre um ponto e outro e das variações de energia cinética correspondentes.

Vamos agora novamente utilizar um resultado do cálculo, mais especificamente o teorema fundamental do cálculo. Este teorema nos diz que se

$$F(x) = \int_a^x f(x')dx',$$

então

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Tomemos a derivada em relação a x de (19),

$$\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} F(x)dx \right],$$

pois $U(x_0)$ é uma constante ($dU(x_0)/dx = 0$). Então, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{dU(x)}{dx} = -F(x),$$

ou, como é mais comum escrever:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{21}$$

O resultado da equação (21) parece não acrescentar nada de novo. Por causa disso, vamos discuti-lo um pouco.

A energia potencial $U(x)$ foi definida pela equação (19) em termos da força $F(x)$. É assim que ocorreu historicamente em física. Chegou-se primeiro ao conceito de força, com as leis de Newton, etc, e muito tempo depois obteve-se conceitos derivados, como o de energia potencial por exemplo. Com o tempo, porém, explorações *formais* das equações da mecânica levaram a resultados como o da equação (21). Nesta equação, a energia potencial $U(x)$ faz o papel da quantidade primária e a força $F(x)$ faz o papel da quantidade secundária, isto é, aquela que é obtida a partir da quantidade primária.

Desenvolvimentos formais das equações da mecânica feitos depois de Newton revelaram maneiras alternativas de formular a mecânica clássica bastante diferentes da formulação original newtoniana[1]. Essas formulações colocam ênfase no conceito de energia e o conceito de força passa a ser secundário, como na equação (21).

A inversão de papéis entre força e energia não tem importância apenas formal (embora os aspectos puramente formais tenham se mostrado importantíssimos para o desenvolvimento da mecânica quântica), pois há muitas situações físicas em que as únicas medidas que se pode fazer são de diferenças de energia entre dois estados distintos e não se tem conhecimento direto das forças envolvidas. Um exemplo é o da energia de dissociação de uma molécula, que é a energia necessária para separar seus átomos por uma distância infinita a partir de uma configuração inicial. Não é possível saber com precisão como a força sobre um dos átomos varia de ponto a ponto e ela tem que ser obtida a partir da energia potencial.

Voltando à equação da conservação da energia mecânica, em geral vamos escrever a energia cinética explicitamente em termos da massa m e da velocidade v da partícula; portanto, vamos escrever esta equação em uma dimensão como

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E. \tag{22}$$

A equação (22) vale para todos os pontos da trajetória do corpo entre as posições inicial e final. Seja um ponto x qualquer dessa trajetória. A

[1] Esses desenvolvimentos formais da mecânica estão associados aos nomes de alguns dos mais importantes matemáticos e físicos teóricos dos sécs. XVIII, XIX e XX, dentre os quais o suíço Leonhard Euler (1707-1783), os franceses Jean d'Alembert (1717-1783), Joseph Lagrange (1736-1813) e Siméon Poisson (1781-1840), o irlandês William Hamilton (1805-1865) e a alemã Emmy Noether (1882-1935).

velocidade $v(x)$ da partícula neste ponto deve satisfazer, então

$$v^2(x) = \frac{2\,[E - U(x)]}{m},$$

de maneira que há duas velocidades possíveis (as duas raízes da equação acima):

$$v(x) = \pm\left(\frac{2\,[E - U(x)]}{m}\right). \tag{23}$$

Como interpretar este resultado? Novamente, vamos utilizar o exemplo do movimento vertical de um corpo sob a ação da força gravitacional para entendê-lo.

Imaginando que o corpo é jogado para cima no vácuo, de maneira que podemos desprezar a resistência do ar, em algum momento o veremos passar por um certo ponto y com velocidade v para cima e, algum tempo depois, o veremos passar novamente pelo mesmo ponto y com velocidade v para baixo, isto é $-v$. Estes são os dois valores de $v(y)$ dados por (23): $\pm v$.

Neste exemplo do corpo movendo-se no vácuo, as duas velocidades em y têm sentidos opostos, mas o mesmo módulo. Portanto, a energia cinética do corpo em y é a mesma. Em um caso deste tipo dizemos que a força atuando sobre o corpo é *conservativa*. No caso deste exemplo, a força conservativa é a gravitacional.

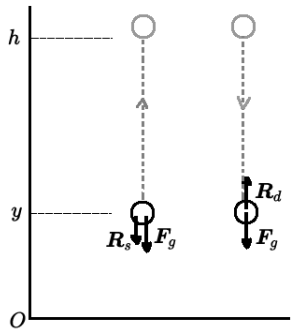
O movimento vertical para cima e depois para baixo de uma partícula jogada para cima no vácuo não é o único caso de força conservativa em uma dimensão. Como veremos mais para a frente, há casos assim para movimentos horizontais (em que a posição da partícula é indicada por x).

Observando a equação (23), vemos que a condição para que o módulo de $v(x)$ seja o mesmo quando a partícula está passando por x indo numa direção ou na outra é que $U(x)$ seja uma função única de x. Isto quer dizer que, se num dado instante de tempo quando a partícula estiver na posição x ela tiver energia potencial $U(x)$, não importa por onde ela passe depois ou quanto tempo demore, mas sempre que ela voltar à posição x ela terá o mesmo valor $U(x)$. E como o módulo de $v(x)$ é o mesmo, a partícula terá também sempre a mesma energia cinética a cada vez que passe por x. Este é o significado de uma força conservativa.

Quais são as condições para que uma força seja conservativa?

Certamente, uma força não é conservativa se $F(x)$ depender do sentido do movimento do corpo quando ele passar por x. Considere novamente o

exemplo do corpo lançado verticalmente para cima, só que agora não no vácuo mas ao ar livre. Neste caso, a resistência do ar não pode ser desprezada. Então, quando o corpo estiver indo para cima quando passar por y, a força total atuando sobre ele (para baixo) terá módulo *maior* que F_g, pois à força gravitacional soma-se a força de resistência do ar. Por outro lado, quando o corpo estiver indo para baixo quando passar por y, a força total sobre ele (novamente para baixo) terá módulo *menor* que F_g, pois subtrai-se a força de resistência do ar da força gravitacional. Portanto, o trabalho total *negativo* feito sobre o corpo quando ele sobe é numericamente maior que que o trabalho total *positivo* feito sobre o corpo quando ele desce. Como o trabalho é a variação da energia cinética, a energia cinética do corpo quando ele passa por y na descida é menor que a sua energia cinética quando ele passa por y subindo (veja a Figura 8).



(a)

Subida

$$W_s = \int_y^h -(F_g + R_s)dy$$
$$= -(F_g + R_s)(h - y) < 0$$

Descida

$$W_d = \int_h^y -(F_g - R_d)dy$$
$$= -(F_g - R_d)(y - h)$$
$$= (F_g - R_d)(h - y) > 0$$

$$|W_s| > |W_d| \Rightarrow$$
$$|K(h) - K_s(y)| > |K_d(y) - K(h)| \Rightarrow$$
$$K_s(y) > K_d(y)$$

(b)

Figura 8: (a) Corpo lançado verticalmente para cima numa situação em que a resistência do ar não pode ser desprezada. O corpo sobre até uma altura h e depois cai. A força de resistência do ar quando o corpo passa por y subindo é indicada por $\boldsymbol{R}_s$ e quando ele passa descendo por $\boldsymbol{R}_d$. (b) Cálculos simplificados para mostrar que a energia cinética do corpo quando ele passa por y subindo é maior que quando ele passa descendo.

A propriedade essencial para que uma força seja conservativa é que o trabalho total feito pela força para qualquer percurso que comece e acabe no mesmo ponto x deve ser zero. Somente se esta condição for satisfeita é possível definir uma função energia potencial.

Esta condição permanece válida para movimentos em duas e três dimensões: a condição para que uma força $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ seja conservativa é que o trabalho

total feito pela força para qualquer trajetória *fechada* seja nulo.

6 O método do diagrama de energia para movimentos unidimensionais

O uso de diagramas de energia, tais como o da Figura 6, nos oferece uma excelente maneira de termos uma apreciação completa, embora qualitativa, dos possíveis movimentos de um sistema unidimensional.

Frequentemente, a informação assim obtida é suficiente para se ter uma compreensão física de situações para as quais as soluções analíticas são difíceis ou impossíveis de se obter. Ademais, mesmo quando soluções analíticas podem ser obtidas, mas expressas em termos de funções complicadas, elas são, em geral, de pouca ajuda para revelar as características físicas essenciais do movimento.

O esquema geral para a construção de um diagrama de energia é o seguinte: faça o gráfico de $U(x)$ em função de x e, no mesmo gráfico, faça o desenho de linhas horizontais representando diferentes valores possíveis da energia mecânica total. Para cada uma delas você pode determinar a energia cinética correspondente, dada por $K = (E - U)$, e isto indica o tipo de movimento que o sistema tem para a energia total dada. Um exemplo está mostrado na Figura 9.

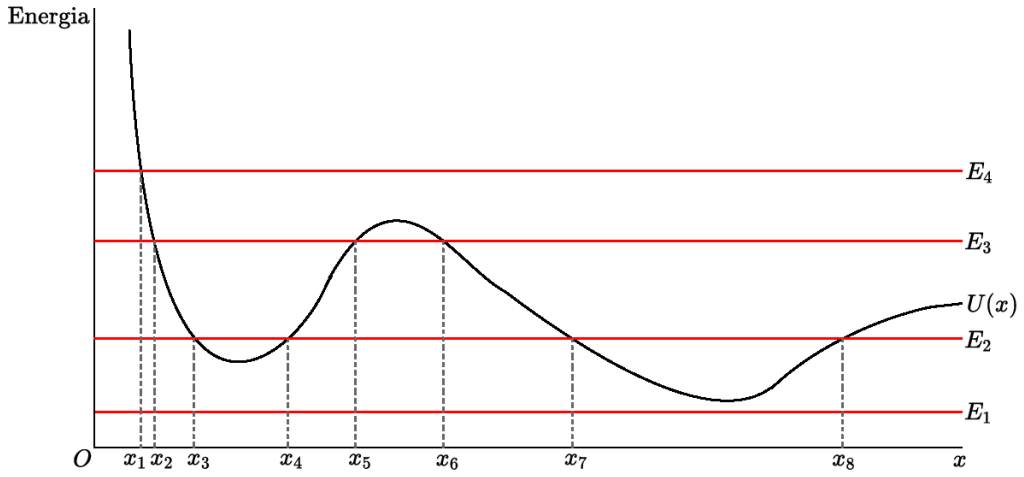


Figura 9: Exemplo de diagrama de energia para um sistema unidimensional.

Para uma energia total abaixo de $U(x)$ para todos os valores de x, como a energia E_1 da Figura 9, todos os valores de K são negativos. Isto implica valores imaginários de v, que não têm significado físico na mecânica clássica (embora na mecânica quântica eles possam ter, mas isto não será considerado aqui). Desta forma, não há movimento possível quando $E_{\text{total}} = E_1$.

Para uma energia total um pouco mais alta, como E_2, o movimento pode ocorrer em duas regiões: entre x_3 e x_4 e entre x_7 e x_8. Isto representa duas situações bastante distintas, pois a partícula não pode escapar de uma região para a outra (para isto, ela teria que ter energia total maior que E_2). Vamos analisar o tipo de movimento da partícula quando ela está na região entre x_3 e x_4. Vamos supor que, em um dado instante, a partícula está na posição x_3. A sua energia potencial $U(x_3)$ neste ponto é igual à energia total E, de maneira que a partícula tem energia cinética nula; ela está instanteneamente em repouso. Porém, pela equação (21), uma força atua sobre ela,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

No ponto x_3, dU/dx é negativa (veja a inclinação da curva de $U(x)$ neste ponto) e, portanto, $F(x_3)$ é positiva. Esta força positiva acelera a partícula para a direita. À medida que a partícula se move para a direita, a força $F(x)$ sobre ela ainda aponta para a direita mas vai diminuindo de valor, pois a inclinação da curva $U(x)$ diminui. A inclinação de $U(x)$ chega a zero em um ponto intermediário entre x_3 e x_4. Neste ponto, a força sobre a partícula é nula, mas a velocidade da partícula é máxima, pois a energia cinética é máxima. Então, neste ponto intermediário a partícula se move para a direita com velocidade máxima e a força sobre ela é instanteneamente nula. Depois que a partícula passa por este ponto, a força sobre ela passa a ser negativa (pois dU/dx torna-se positiva) e a partícula passa a ser desacelerada. No entanto, ela continua a se movimentar para a direita, com velocidade cada vez menor (pois K diminui) até chegar ao ponto x_4. Em x_4 a velocidade da partícula é zero (pois $K = 0$), mas continua a haver uma força $F(x)$ sobre ela apontando para a esquerda. O que acontece então? A partícula passa a ganhar velocidade para a esquerda e se move em direção a x_3. No percurso, a velocidade para a esquerda vai aumentando até atingir o valor máximo no mesmo ponto intermediário de antes, onde a força $F(x)$ volta a trocar de sentido novamente, e, em seguida, a partícula continua movendo-se para a esquerda sendo freiada até parar novamente em x_3. A partir daí, todo o ciclo recomeça, exatamente igual como descrito acima.

Enquanto a energia total da partícula estiver fixada em E_2 e ela estiver na região entre x_3 e x_4, ela ficará repetindo o movimento cíclico descrito no parágrafo anterior. Este é um movimento *periódico*, pois o tempo que a partícula leva para completar um ciclo, saindo de x_3 e voltando novamente para x_3 é sempre o mesmo.

Espero que vocês tenham percebido o poder de se analisar o movimento usando um diagrama de energia. Sem resolver uma única equação, apenas olhando para o diagrama, fomos capazes de descrever as principais características do movimento da partícula. O movimento da partícula na região entre x_7 e x_8 é do mesmo tipo, também periódico, embora possamos ver que a amplitude (isto é, a distância entre x_7 e x_8) é maior.

Para uma energia total ainda maior, como E_3, o movimento da partícula pode ocorrer em duas regiões distintas. Entre x_2 e x_5, em cujo caso o movimento é periódico do mesmo tipo que o descrito anteriormente; e entre x_6 e, em princípio, $x = \infty$ (ou o ponto em que $U(x)$ cruzar a linha de E_3, que, de toda forma, está bem longe da origem). Imagine, neste caso, que a partícula está vindo de $x = +\infty$ em direção a x_6, isto é, movendo-se para a esquerda. Inicialmente, a força $F(x)$ sobre a partícula aponta para a esquerda e sua velecidade cresce até atingir o valor máximo no ponto em que a inclinação de $U(x)$ torna-se zero. Deste ponto em diante, a partícula continua a se mover para a esquerda, mas sua aceleração é para a direita; a partícula vai freiando até parar no ponto x_6. Em x_6 a velocidade da partícula é instantaneamente zero e a força sobre ela aponta para a direita. A partícula passa a se mover para a direita sem parar (dizemos que o movimeno é *ilimitado*), com velocidade que cresce e depois vai diminuindo à medida que $x \to +\infty$.

Finalmente, para uma energia total E_4, ainda maior que as anteriores, vemos que não há mais movimento periódico possível e o movimento da partícula é ilimitado. Ao vir de $x = +\infty$ em direção à origem, a partícula é inicialmente acelerada, depois desacelera, volta a acelerar novamente e desacelera uma vez mais até parar instanteneamente em x_1. Em x_1, o sentido de movimento da partícula é invertido e ela passa a se mover para a direita, passando novamente por períodos de aceleração e desaceleração e se dirigindo inexoravelmente a $x \to \infty$.

Para cada um dos movimentos descritos qualitativamente acima, as velocidades em cada ponto podem ser determinadas quantitativamente de maneira gráfica. Para isto, deve-se medir a distância entre a linha reta de E e a curva $U(x)$ em cada ponto, o que dá $K(x)$ no ponto, e então determinar $v(x)$ a partir de $K(x)$ (as duas soluções possíveis correspondem aos movimentos

da partícula para a direita ou para a esquerda). Também é possível graficamente determinar quantitativamente a força $F(x)$ sobre a partícula em cada ponto. Para isto, deve-se medir a inclinação de $U(x)$ no ponto.

Uma última palavra a respeito do exemplo dado. Lembre-se que o movimento descrito é *unidimensional*. Ou seja, em todos os momentos a partícula se move sempre ao longo de uma linha reta. O diagrama de energia tem sobes e desces, como uma montanha russa, mas o eixo vertical do diagrama mede energia e não posição.

7 Bola quicando: um exemplo do método do diagrama de energia

Suponhamos que uma bola que se move ao longo de uma linha vertical quica sucessivas vezes sobre uma superfície horizontal. Para simplificar, vamos supor que não há dissipação (perda) de energia mecânica, de maneira que a energia total permanece constante com valor E.

Vamos representar o movimento da bola pelo movimento do seu centro de gravidade CG e vamos definir a origem do eixo vertical y como sendo a posição do CG quando a bola está parada sobre o solo, ou no exato instante em que a bola toca o solo quando cai (veja a Figura 10(a)).

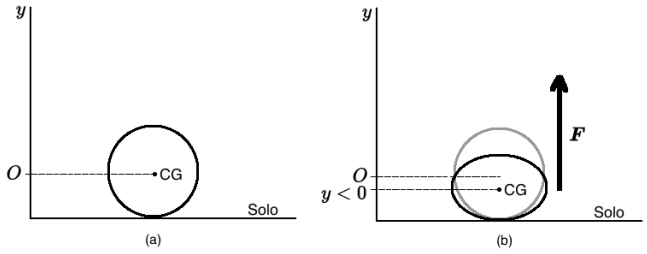


Figura 10: (a) Bola parada ou no exato instante em que ela toca o solo. A origem de y coincide com a posição do CG nesta situação (b) Bola um curto tempo depois de bater no solo. A bola é deformada e seu CG está abaixo de $y = 0$. A força de reação $\boldsymbol{F}$ feita pelo solo sobre a bola é muito grande (bem maior que o peso da bola).

Vamos supor que a configuração da bolsa no exato instante em que ela toca o solo corresponde à energia potencial $U = 0$. Para $y > 0$, a energia

potencial da bola é a energia potencial gravitacional, dada por

$$U(y) = mgy \quad (y > 0).$$

O que faz a bola quicar quando bate no solo é a força feita pelo solo sobre a bola em reação à força que a bola faz sobre o solo. No exato instante em que a bola toca o solo ao cair, ela ainda não fez nenhuma força sobre o solo e este, portanto, ainda não fez nenhuma força sobre a bola. Nos instantes subsequentes, quando a bola avança sobre o solo, ela faz uma força sobre as moléculas do material do qual é feito o solo e as comprime um pouco. A força de reação do solo sobre a bola também provoca uma deformação na bola, pois ela não é uma estrutura perfeitamente rígida. Uma ilustração da compressão da bola durante o curto intervalo de tempo em que ela está em contato com o solo pode ser vista na Figura 10(b). O importante é notar que o centro de gravidade da bola se desloca um pouco para baixo da origem do eixo y, assumindo valores negativos ($y < 0$).

Qual o tipo de força exercida pelo solo sobre a bola neste curto intervalo de tempo? É uma força para cima (positiva) que aumenta rapidamente à medida que y fica mais negativa, atingindo um valor muito grande na configuração de maior deformação da bola. Ao crescer desta maneira, a força F supera em muito a força gravitacional sobre a bola (que existe, é claro, para qualquer valor de y).

Como podemos descrever esta força F feita pelo solo sobre a bola em termos de uma energia potencial? Note, antes de tudo, que podemos definir uma energia potencial para descrever a força F porque estamos supondo que não há perda de energia durante o contato da bola com o solo. Temos que

$$F(y) = -\frac{dU}{dy},$$

onde U existe apenas para valores negativos de y. Como F é positiva,

$$\frac{dU}{dy} < 0,$$

ou seja, a inclinação de U deve ser negativa. Como F cresce abruptamente à medida que y torna-se mais e mais negativa, a inclinação de $U(y)$ deve também aumentar rapidamente (indo em direção a $-\infty$) à medida que y torna-se mais negativa. Isto está ilustrado na Figura 11(a). Podemos chamar a energia potencial $U(y)$ para $y < 0$ de energia potencial *elástica*.

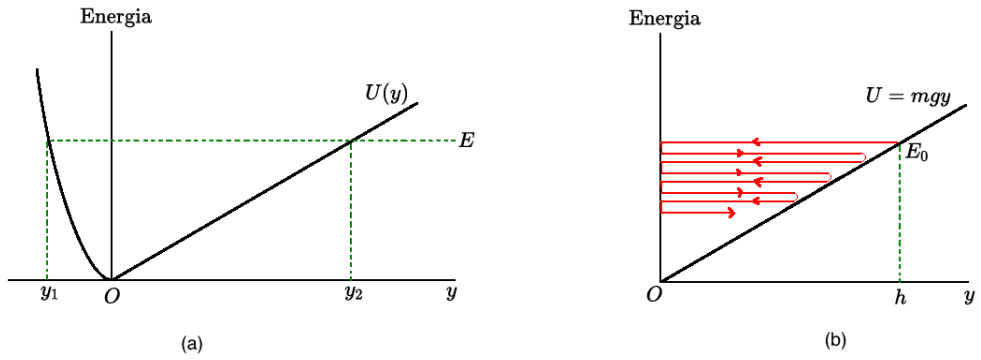


Figura 11: (a) Diagrama de energia para uma bola quicando verticalmente sem perda de energia (b) Idealização de (a) para o caso de uma bola pereitamente rígida, mas com perda de energia a cada quique.

Dado um valor para a energia total E da bola quicando, podemos determinar o tipo de movimento da bola usando o método do diagrama de energia descrito na seção 6. Isto está ilustrado na Figura 11(a). Vemos que o CG da bola oscila entre os pontos y_1 (negativo) e y_2 (positivo). O ponto y_2 dá a altura máxima que o CG (e, portanto, a bola) atinge enquanto quica. O movimento é periódico, ou seja, existe um tempo bem definido T entre duas repetições da *mesma* configuração da bola (por exemplo, bola na altura y subindo).

A parte para $y < 0$ no desenho da Figura 11(a) está exagerada. Na prática, o intervalo de valores negativos de y é muito menor que o de valores positivos. Por exemplo, para uma bola de aço quicando sobre uma lâmina de vidro o valor típico de y_1 é da ordem de 0,001 cm e o valor típico de y_2 é da ordem de 10 cm.

Portanto, para a maioria dos propósitos práticos podemos aproximar a parte "elástica" de $U(y)$ por uma linha vertical coincidindo com o eixo de energia (veja a Figura 11(b)). Isto representa a propriedade física *irreal* de rigidez perfeita (ou força elástica infinita).

Embora irreal, este modelo permite uma descrição quantitativa simples da situação. O movimento está confinado à região $y \geq 0$ e sua energia total (conservada) é dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E.$$

A altura máxima h da bola é obtida fazendo $v = 0$ nesta equação:

$$h = \frac{E}{mg}.$$

Para encontrar o período T do movimento cíclico, podemos calcular o tempo que leva para a bola ir de $y = 0$ a $y = h$ e depois dobrá-lo. Vamos chamar o tempo que leva para a bola ir de $y = 0$ a $y = h$ de t^* Para calcular t^*, vamos usar a definição de velocidade,

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Isto implica que,

$$dt = \frac{dy}{v} \Rightarrow \int_0^{t^*} dt = \int_{y=0}^{h} \frac{dy}{v} \Rightarrow t^* = \int_{y=0}^{h} \frac{dy}{v}.$$

Note que v tem que ser mantida dentro do sinal de integração porque ela varia com a posição. Temos então:

$$T = 2t^* = 2\int_{y=0}^{h} \frac{dy}{v}.$$

Da equação da conservação da energia, temos:

$$v = \pm\left[\frac{2(E - mgy)}{m}\right]^{1/2}.$$

Tomando a raíz positiva, que corresponde ao movimento para cima, e substituindo na equação para T:

$$\begin{aligned} T &= 2\int_0^h \left[\frac{m}{2(E - mgy)}\right]^{1/2} dy \\ &= 2\int_0^h \left[\frac{\cancel{m}}{2\cancel{m}g[(E/mg) - y]}\right]^{1/2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dy}{[(E/mg) - y]^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^h \frac{dy}{[(E/mg) - y]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Podemos simplificar este equação notando que E/mg é a altura máxima h (veja algumas equações acima). Então,

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^h \frac{dy}{(h-y)^{1/2}}.$$

A integral que aparece acima pode ser resolvida fazendo a mudança de variável $u = h - y$, como mostrado abaixo:

$$u = h - y \Rightarrow dy = -du \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{(h-y)^{1/2}} = -\int \frac{du}{u^{1/2}} = -2u^{1/2} = -2(h-y)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\int_0^h \frac{dy}{(h-y)^{1/2}} = \left[-2(h-y)^{1/2}\Big|_0^h\right] = 2\sqrt{h}.$$

O período do movimento da bola é, então:

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Você poderia argumentar que este mesmo resultado poderia ter sido obtido de forma muito mais simples usando as fórmulas para o movimento uniformemente variado. Basta calcular o tempo que leva para um corpo cair de uma altura h até atingir o solo quando ele se move com aceleração constante $-g$ e depois multiplicar este tempo por 2. Você poderia então dizer que este é mais um desses casos em que o professor usa um canhão para matar uma mosca. Minha resposta é que a ênfase deste exercício não está no resultado obtido, mas no *método* utilizado. E que é mais fácil entender um método novo se o aplicarmos a um problema familiar.

Você deve ter em mente que na maioria dos casos os movimentos dos corpos ocorrem com acelerações *variáveis* e que, portanto, as equações do movimento retilíneo uniformemente variado não são aplicáveis. Porém, a equação que obtivemos acima para T em termos da integral de $1/v$, com v definida para qualquer posição y pela equação da conservação da energia, é válida para *qualquer* tipo de movimento unidimensional e pode ser integrada numericamente se necessário.

Antes de terminar com este exemplo, vamos usá-lo para ilustrar outra propriedade instrutiva do diagrama de energia. Sabemos que, na realidade,

a energia mecânica total de uma bola quicando não se mantém constante, mas decresce rapidamente com o tempo. Enquanto a bola está no ar, a perda de energia mecânica é pequena, mas nos curtos períodos em que ela quica a perda é bastante grande. Isto está ilustrado na Figura 11(b) com o uso do diagrama de energia. Começando da altura h com energia mecânica total E_0, a história do movimento da bola pode ser descrita pela linha vermelha na figura. A cada quique há uma perda considerável de energia mecânica e a altura máxima que a bola consegue atingir em seguida é cada vez menor que a anterior, até que o movimento termine em $y = 0$.