

Colisões e leis de conservação - Parte II

Antônio Roque

Novembro 2021

Nesta aula, continuaremos nosso estudo de colisões e leis de conservação utilizando alguns exemplos escolhidos para ilustrar não apenas aplicações práticas importantes, mas também aspectos conceituais úteis para entender melhor a física por trás das colisões entre corpos.

1 Força exercida por um feixe de partículas

O primeiro exemplo que consideraremos é o de um feixe de partículas incidindo sobre um bloco em uma superfície lisa sem atrito, como mostrado na Figura 1. Vamos supor que as partículas são idênticas e que cada uma delas tem massa m e velocidade v . Vamos também supor que o bloco tem massa $M_0 \gg m$ e que todas as partículas que o atingem ficam incrustadas nele.

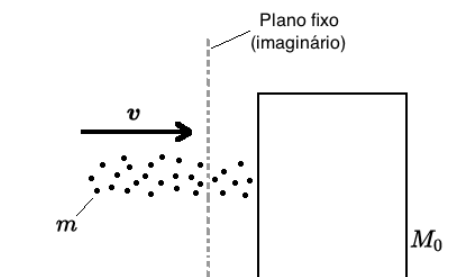


Figura 1: Feixe de partículas incidindo sobre um bloco.

Antes de começar a tratar este problema matematicamente, vamos usar nossa intuição física para tentar imaginar o que acontecerá com o bloco¹ ao

¹Por “bloco” aqui, vamos nos referir ao conjunto formado pelo bloco de massa M_0 mais as partículas que ficam incrustadas nele ao longo do tempo.

longo do tempo. De maneira geral, o que deve acontecer é que o feixe de partículas acabará empurrando o bloco e este deslizará sobre a superfície sem atrito para a direita. A razão para isto é que cada partícula, ao colidir de maneira totalmente inelástica com o bloco, transfere seu momento linear mv para o bloco e este se move um pouco para a direita. Como o feixe de partículas é *estacionário*, isto é, as partículas atingem o bloco a uma taxa (partículas por segundo) constante, o movimento do bloco parecerá ser, a um observador externo, contínuo e com uma velocidade que crescerá a uma taxa temporal constante enquanto durar o feixe.

Nossa intuição física também nos diz que, como as massas das partículas são muito pequenas, de maneira que o momento linear de cada uma delas também é pequeno, nos instantes iniciais logo após o feixe ser “ligado” o bloco parecerá não se mover e levará um certo tempo até que um observador possa notar que o bloco está se movimentando para a direita.

Finalmente, nossa intuição física ainda nos diz que se pudéssemos medir a massa do bloco, nos instantes iniciais ela pareceria não aumentar, pois cada partícula que fica incrustada nele acrescenta apenas uma pequena quantidade m à sua massa. Porém, com o tempo, o aumento de massa do bloco devido ao acúmulo de partículas incrustadas nele passaria a ser mensurável e se poderia notar que a massa aumenta com o tempo à medida que mais e mais partículas atingem o bloco.

Vamos agora passar para a descrição matemática do problema.

A discussão acima nos sugere que há duas quantidades dependentes do tempo que podem ser usadas para caracterizar o comportamento do bloco: sua velocidade e sua massa (neste caso, considerando que a massa cresce com o acúmulo de partículas incrustadas nele). Vamos denotar essas duas quantidades por u e M (para diferenciar de v , a velocidade de cada partícula antes da colisão, e M_0 , a massa do bloco sem nenhuma partícula incrustada nele).

Também vamos precisar de uma quantidade que descreva a taxa (partículas por segundo) com que as partículas do feixe atingem o bloco. Para isto, vamos imaginar um plano fixo e normal à direção do feixe como o indicado na Figura 1. Como o feixe é supostamente estacionário, a cada unidade de tempo Δt a quantidade de partículas que passa pelo plano é uma constante ΔN . Vamos então definir a taxa com que as partículas passam pelo plano imaginário como

$$R = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Vamos supor que o bloco está parado antes das partículas chegarem a ele. Após um certo tempo curto Δt , o número ΔN de partículas que atingiram o bloco é $\Delta N = R\Delta t$ e cada uma delas tinha momento linear mv antes da colisão com o bloco. Se o feixe for interrompido nesse instante, o bloco terá sido acelerado desde o repouso até uma velocidade Δu e passará a se movimentar com essa velocidade constante a partir daí (pois não há atrito nem qualquer outra força que se oponha ao movimento do bloco).

Antes da colisão das ΔN partículas com o bloco, o momento linear total do conjunto bloco + partículas é o momento linear das ΔN partículas,

$$\Delta Nmv = Rmv\Delta t.$$

Depois das colisões das ΔN partículas com o bloco, o momento linear total do conjunto é

$$(M_0 + \Delta M)\Delta u,$$

onde

$$\Delta M = \Delta Nm = Rm\Delta t$$

é a massa das ΔN partículas que atingiram o bloco no tempo Δt . A conservação do momento linear nos dá, então:

$$Rmv\Delta t = (M_0 + \Delta M)\Delta u = M\Delta u,$$

onde passamos a denotar a massa do conjunto bloco + partículas incrustadas nele por M .

Dividindo por Δt as duas últimas equações, temos:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = Rm \equiv \mu$$

e

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{Rmv}{M},$$

onde definiu-se μ como a massa média transportada pelo feixe num intervalo de tempo Δt .

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ nas duas equações acima, obtemos:

$$\frac{dM}{dt} = \mu \tag{1}$$

e

$$\frac{du}{dt} = \frac{Rmv}{M} = \frac{\mu v}{M}. \tag{2}$$

Note que (1) e (2) são equações diferenciais justamente para as duas quantidades que julgamos importantes para a descrição do comportamento do bloco em nossa análise física do problema: a equação (1) nos dá a taxa de aumento de massa do bloco e a equação (2) nos dá a taxa de variação da velocidade u do bloco, isto é, sua aceleração.

Como (2) nos dá a aceleração do bloco, a segunda lei de Newton nos diz que a força F exercida sobre o bloco pelo feixe de partículas deve ser Mdu/dt , ou:

$$F = M \frac{du}{dt} = Rmv = \mu v. \quad (3)$$

Vamos analisar o significado da equação (3). Ela nos diz que o feixe de partículas exerce sobre o bloco uma força *média* F . Por que chamamos a força F de “média”?

Em nossos cálculos matemáticos, tratamos o feixe de partículas como algo *contínuo*, pois fizemos $\Delta t \rightarrow 0$ para obter as equações diferenciais. Esta foi, porém, apenas uma passagem matemática que não corresponde à realidade física. A força é produzida pelo impacto de partículas individuais discretas e, se observarmos o movimento do bloco em uma escala de tempo suficientemente curta, deveremos detectar isso.

Para tentar descrever o movimento do bloco em uma escala de tempo curta, podemos usar o seguinte modelo simples. Suponha que cada partícula individual, ao atingir o bloco, sofra uma desaceleração constante que a leva ao repouso em um certo tempo T (Figura 2).

A força f constante mostrada na Figura 2 é a força que o bloco exerce sobre a partícula. Pela terceira lei de Newton (ação e reação), a partícula exerce sobre o bloco uma força igual e de sentido oposto (uma força de módulo f apontando para a direita):

$$f = \frac{mv}{T}.$$

Esta força é temporária. Ela começa a existir quando a partícula atinge a superfície do bloco e termina de existir um tempo T após isso. Podemos representar graficamente a força f por um retângulo de altura f e comprimento T , como o retângulo pintado de cinza na Figura 3.

As partículas atingem o bloco em sequência, uma após outra, a partir da primeira. Os intervalos entre as chegadas das partículas não são sempre iguais, mas, na média, a cada intervalo Δt chegam ΔN partículas. Cada nova partícula que chega adiciona uma contribuição f à força total feita pelo feixe sobre o bloco. No início, a força total é como a mostrada na Figura 3.

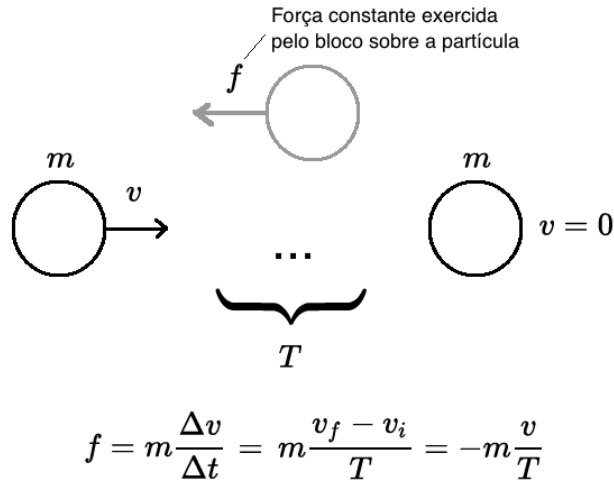


Figura 2: Modelo simples para descrever a desaceleração de uma partícula depois que ela atinge o bloco.

Ela cresce a cada novo impacto de uma partícula com o bloco. Porém, após um tempo T , a contribuição feita pela primeira partícula que atingiu o bloco deixa de existir. A força total cai por um valor f após esse tempo. Logo em seguida, porém, a força total volta a subir por f devido à chegada de outra partícula. E uma outra que vem em seguida provoca outro aumento de f ; mas, então, a contribuição da segunda partícula que atingiu o bloco deixa de existir e a força cai novamente por f . Logo em seguida, a contribuição da terceira partícula também deixa de existir e há nova queda de f ; mas chega então outra partícula e, logo em seguida, mais outra, aumentando novamente a força total.

O resultado disso é que a força total feita pelo feixe sobre o bloco atinge um patamar estável, indicado por $F_{\text{média}}$ na Figura 3. Na realidade, a força não permanece sempre igual a $F_{\text{média}}$, mas flutua em torno deste valor devido à chegada de novas partículas e ao término das forças feitas pelas partículas que chegaram há mais tempo. Chamamos essas flutuações de *flutuações estatísticas*, pois elas são imprevisíveis. Apesar disso, se observarmos o bloco por um longo tempo, a força total feita pelo feixe sobre ele manterá o valor médio $F_{\text{média}}$ enquanto o feixe durar. Isto ocorre porque o tempo médio entre a chegada de partículas sucessivas é bem menor que o tempo T que leva para que o efeito de uma partícula deixe de existir (veja isto na Figura 3).

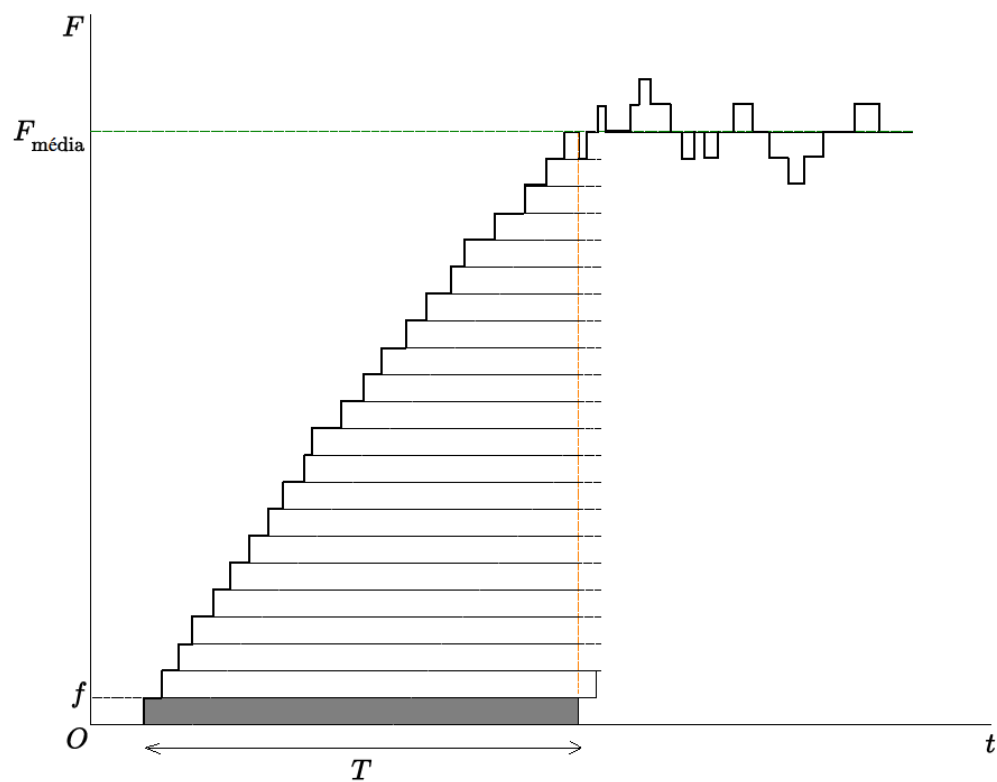


Figura 3: Ilustração da fase inicial de subida da força média constante produzida pelo feixe de partículas sobre o bloco.

Podemos utilizar o modelo microscópico mostrado acima para deduzir novamente a força F feita pelo feixe sobre o bloco. A força F é dada pela força f por partícula multiplicada pelo número de partículas que são efetivas em um dado instante. Este número é igual ao número total de partículas que chegam durante o tempo T em que a força de uma partícula existe (observe novamente a Figura 3 para entender isso). Como a taxa de chegada de partículas é R , este número é simplesmente RT . Portanto,

$$F_{\text{média}} = (RT)f = RT \frac{mv}{T},$$

ou seja,

$$F_{\text{média}} = F = Rmv$$

como na equação (3).

Note que a força média que o feixe faz sobre o bloco (e, portanto, a força média que o bloco faz sobre o feixe) é independente da magnitude f da força que cada partícula faz sobre o bloco (ou que o bloco faz sobre cada partícula). A força média é simplesmente igual à taxa de transferência do momento linear do feixe para o bloco.

O modelo acima e a força F calculada por ele foi utilizado em 1948 pelos físicos alemães W. Paul e G. Wessel para medir a velocidade média de um feixe de átomos de prata². Um feixe de átomos, evaporados de um “forno”, era direcionado para baixo para atingir o prato de uma balança de quartzo muito sensível (Figura 4(a)). Pode-se mostrar por outros métodos que praticamente todos os átomos que atingem o prato ficam aderidos à sua superfície. Portanto, o modelo do exemplo acima em que as partículas do feixe ficam incrustadas no bloco pode ser aplicado ao feixe de átomos caindo sobre o prato da balança.

A força exercida pelos átomos sobre a balança é composta de duas partes: uma é a força média F dada pela equação (3); a outra é a força-peso feita pela quantidade de átomos que ficam aderidos à balança. Esta última aumenta linearmente com o tempo, pois a massa M do prato aumenta no tempo conforme a equação (1):

$$\frac{dM}{dt} = \mu \Rightarrow dM = \mu dt \Rightarrow$$

²O artigo original de Paul e Wessel está em alemão (Paul, W., Wessel, G. Messung von Dichte und mittlerer Molekular-geschwindigkeit in einem Atomstrahl, *Zeitschrift für Physik* 124:691–699, 1948), mas uma descrição em inglês do método utilizado por eles pode ser vista no seguinte artigo: Wehner, G. K. Velocities of sputtered atoms, *Physical Review* 114:1270-1272, 1959.

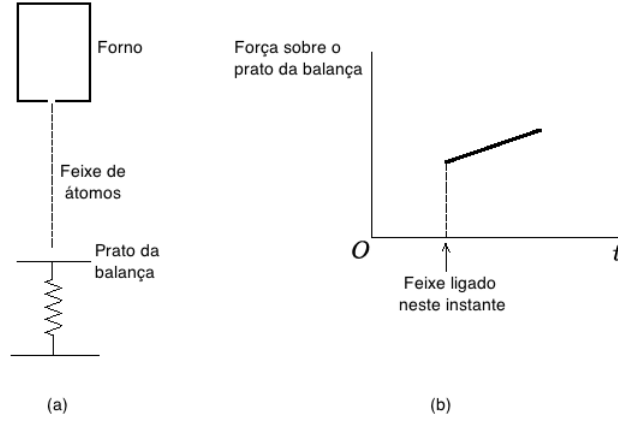


Figura 4: (a) Esquema simplificado do experimento de Paul e Wessel. O sistema como um todo está inserido em um ambiente a alto vácuo. (b) Dependência temporal da força total exercida pelo feixe de átomos sobre o prato da balança.

$$\int_{M_0}^M dM = \mu \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$M(t) = M_0 + \mu t.$$

Descontando o peso $M_0 g$ do prato sem átomos nele, a força total exercida pelos átomos sobre o prato da balança é, então (veja a Figura 4(b)),

$$F_{\text{total}} = \mu v + \mu g t.$$

Os valores medidos experimentalmente para átomos ejetados de um forno à temperatura de 1363 K (= 1090°C) foram, aproximadamente,

$$\mu v = 3,4 \times 10^{-7} \text{ N} \quad \text{e} \quad \mu = 5,6 \times 10^{-10} \text{ kg/s}.$$

Com estes valores, Paul e Wessel obtiveram o seguinte valor para a velocidade média v dos átomos de prata a 1363 K:

$$v \approx 600 \text{ m/s}.$$

Este foi o primeiro método confiável de medição da velocidade média de átomos ejetados pelo processo conhecido como *sputtering*, com inúmeras aplicações em física, química e engenharia³.

³Para saber mais sobre *sputtering*, veja a página da Wikipédia: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sputtering>.

2 Motores a jato

Quando um jato de matéria é lançado para fora de um equipamento com uma certa velocidade, o equipamento que produz o jato exerce uma força sobre os átomos do material que constitui o jato para ejetá-los. Portanto, pela terceira lei de Newton, os átomos ejetados devem exercer uma força de reação igual e oposta sobre o equipamento.

Um exemplo simples que pode ser testado em casa é o de uma mangueira de jardim quando a torneira é ligada. Deixe a mangueira solta sobre o chão e ligue a torneira d'água; você deverá observar o “coice” para trás que a mangueira leva quando o jato é ligado.

O próprio Newton foi o primeiro a teorizar que este princípio poderia ser utilizado para movimentar uma máquina. A ideia dele era a de que no interior da máquina poderia ser produzida uma explosão tão forte a ponto de expelir matéria para fora dela por sua parte traseira com momento linear bastante grande. Então, a força de reação exercida pela matéria expelida sobre a máquina empurraria esta para a frente com um momento linear igualmente alto.

A ideia de Newton foi posta em prática séculos mais tarde pelos desenvolvedores dos motores a jato que equipam os aviões modernos. Veja um breve histórico do desenvolvimento do motor a jato, assim como descrições dos diferentes tipos existentes, no seguinte site da NASA: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/UEET/StudentSite/engines.html>.

Independentemente do tipo, o funcionamento de um motor a jato é basicamente o mesmo para todos eles. Ele está representado de maneira esquemática na Figura 5.

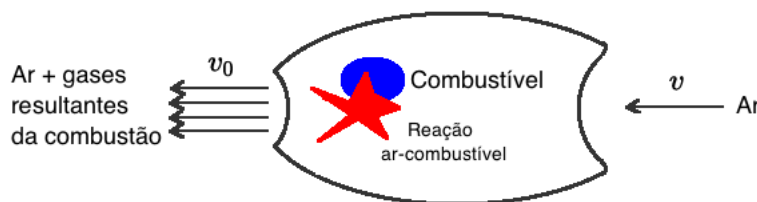


Figura 5: Esquema básico de um motor a jato.

Vamos supor que o avião se move para a direita com velocidade v . Então, o ar entra pela parte da frente do motor com velocidade v para a esquerda. No interior do motor, o ar reage com o combustível e uma forte explosão é

produzida. A explosão ejeta o ar e os gases resultantes dela pela traseira do motor com uma velocidade bem grande. Vamos chamar a velocidade de expulsão em relação ao referencial preso ao motor de v_0 ($v_0 > v$). Em reação à sua expulsão para trás, o ar e os gases expelidos fazem uma força F sobre o motor, impulsionando-o para a frente (direita no desenho) juntamente com o avião. No jargão da aeronáutica, a força F é chamada de *empuxo* (*thrust* em inglês).

Podemos modelar a força F usando a equação (3) deduzida na seção anterior. Naquele caso, a força F era a força que um feixe de partículas movendo-se com velocidade v exercia sobre um bloco ao colidir com ele; no caso presente, basta inverter o raciocínio e imaginar que o bloco, no caso o motor, expelle um feixe de partículas (o ar e os gases) com velocidade v_0 . A força F feita pelo motor sobre as partículas de gás para ejeta-las para trás é a mesma que as partículas fazem sobre o motor para impulsioná-lo para a frente.

Como há duas massas materiais ejetadas pelo motor, o ar e os gases resultantes da combustão, e o material que constitui os gases estava em repouso antes da ejeção, mas o ar movia-se com velocidade v , devemos reescrever a equação (3) para a força F da seguinte maneira:

$$F = \mu_{\text{comb}}v_0 + \mu_{\text{ar}}(v_0 - v), \quad (4)$$

onde μ_{comb} é a taxa com que a massa de combustível é queimada e μ_{ar} é a taxa com que o ar passa pelo motor, ambas em kg/s.

O termo $(v_0 - v)$ na equação (4) é devido ao fato de que a massa de ar que passa pelo motor sofre uma mudança de velocidade (de v para v_0) ao passar pelo motor. Portanto, o momento linear transferido por ela ao motor é proporcional à sua variação de velocidade.

Exemplo. Um avião a jato está viajando em altitude de cruzeiro a uma velocidade de 250 m/s. Nessa situação, cada um dos seus motores consome 100 m^3 de ar por segundo, correspondendo a uma massa de 50 kg de ar por segundo. O ar é usado para queimar 3 kg de combustível por segundo e todos os gases que saem da câmara de combustão são ejetados a uma velocidade de 500 m/s com relação ao avião. Qual é a força de cada motor? Substituindo os valores dados diretamente na equação (4), temos:

$$F = 3 \times 500 + 50(500 - 250) = 1,4 \times 10^4 \text{ N}.$$

Este valor não está distante do valor típico da força feita por um motor a

jato, como pode ser verificado no site da Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Jet_engine.

3 Propulsão de foguetes

Outra aplicação importante parecida com a vista acima é a de propulsão de foguetes. Neste caso, novamente independentemente do tipo de foguete, o princípio físico que rege o movimento é o mesmo: a lei de conservação do momento linear aplicada ao foguete e ao combustível ejetado por ele.

Para simplificar, vamos supor que o foguete está se movendo em uma região do espaço em que os efeitos da gravidade são suficientemente pequenos para que possam ser desprezados em primeira aproximação. Então, podemos considerar que a única força que atua sobre o foguete é a força F exercida sobre ele pelo combustível ejetado. Vamos supor que entre t e $t + \Delta t$ uma massa Δm de combustível é queimada e ejetada para trás pelo foguete com velocidade v_0 em relação ao foguete. As situações nos tempos t e $t + \Delta t$ estão ilustradas na Figura 6.

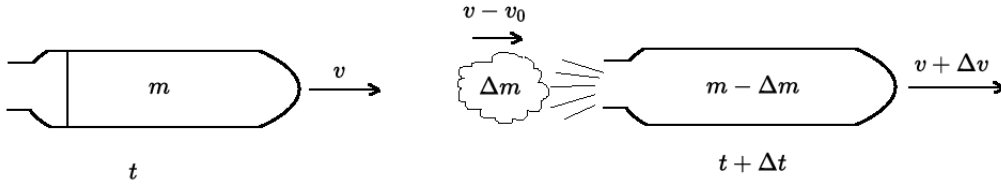


Figura 6: Situações antes e depois da ejeção de uma quantidade de massa Δm pelo foguete.

No instante t , quando o foguete movia-se com velocidade v , sua massa era m . O foguete então expelle a quantidade de matéria Δm para trás com velocidade v_0 (no seu referencial). Para o referencial de um observador externo, a velocidade da matéria expelida é, então, $v - v_0$ (pois v aponta para a direita e v_0 para a esquerda). Depois que a matéria Δm é expelida, no instante $t + \Delta t$, a massa do foguete é reduzida para $m - \Delta m$ e sua velocidade é aumentada para $v + \Delta v$.

A lei da conservação do momento linear nos dá, então:

$$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_0).$$

Por conveniência matemática, é melhor reescrever a equação acima representando a variação da massa do foguete no tempo Δt como uma quantidade negativa, deixando explícito que $m(t + \Delta t) < m(t)$. Isto pode ser feito definindo Δm como uma quantidade negativa e reescrevendo a equação acima como:

$$mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta m(v - v_0) \quad (\Delta m < 0).$$

Desenvolvendo os produtos na equação acima,

$$mv = mv + m\Delta v + v\Delta m + \Delta m\Delta v - v\Delta m + v_0\Delta m \Rightarrow$$

$$m\Delta v + \Delta m\Delta v = -v_0\Delta m.$$

Vamos supor que o intervalo Δt é infinitesimal ($\Delta t \rightarrow 0$), de maneira que as quantidades Δm e Δv também são infinitesimais (vamos representá-las por dm e dv). Você pode entender isso fisicamente imaginando que o foguete expela matéria molécula após molécula e que cada molécula expelida provoca um incremento infinitesimal na velocidade do foguete. Então, o produto $dm dv$ é muito menor que mdv ou $v_0 dm$. Desta forma, desprezando termos infinitesimais de segunda ordem podemos aproximar a equação acima por

$$mdv = -v_0 dm, \quad (5)$$

ou

$$dv = -v_0 \frac{dm}{m}. \quad (6)$$

A equação (6) pode ser usada para calcular a velocidade final alcançada pelo foguete após queimar todo o seu combustível. Vamos supor que, no instante inicial, a massa total do foguete mais todo o combustível que ele tem para gastar é m_i e que a cada intervalo de tempo infinitesimal dt ele queima uma quantidade dm infinitesimal de combustível. Vamos chamar a massa final do foguete depois que todo o combustível foi queimado de m_f . Então, chamando as velocidades final e inicial do foguete de v_f e v_i , a equação (6) pode ser integrada para nos dar:

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_0 \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$v_f - v_i = -v_0 \left[\ln m \right]_{m_i}^{m_f} = -v_0 (\ln m_f - \ln m_i) = -v_0 \ln \frac{m_f}{m_i},$$

ou

$$\Delta v = v_f - v_i = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f}. \quad (7)$$

A equação (7) é chamada de *equação do foguete ideal* ou *equação de Tsiolkovski* em homenagem ao físico russo Konstantin Tsiolkovski (1857-1935), que foi o primeiro a deduzi-la e aplicá-la ao problema do movimento de foguetes. Ela nos dá, sob condições ideais em que a gravidade é desprezível, a variação de velocidade que um foguete pode conseguir se queimar todo o seu combustível (chamado de *ganho* de velocidade).

Pela equação (7), vemos que o ganho de velocidade de um foguete em relação à sua velocidade inicial depende de dois parâmetros: a velocidade com que os gases são expelidos v_0 , e a razão entre a massa do foguete carregado de combustível e sua massa sem combustível m_i/m_f . Vamos comentar um pouco acerca desses dois parâmetros a seguir.

A equação (7) nos diz que o ganho de velocidade do foguete é diretamente proporcional à velocidade de expulsão v_0 . Portanto, é importante fazer v_0 tão grande quanto possível. Os maiores valores de v_0 alcançáveis através de processos de combustão química são da ordem de 5000 m/s e, na prática, devido a combustão incompleta e outros tipos de perda, dificilmente se atinge mais de 50% do valor teórico ideal para um dado tipo de combustível. Por exemplo, a mistura de oxigênio líquido (LOX) e querosene utilizada no primeiro estágio do foguete Saturno V da NASA, responsável pelo lançamento das espaçonaves do projeto Apolo que levou o ser humano à Lua, conseguia produzir velocidades de expulsão de cerca de 2500 m/s.

O segundo parâmetro importante para determinar o ganho de velocidade é a razão entre as massas do foguete carregado e descarregado de combustível, isto é, com o “tanque cheio” e com o tanque completamente vazio. Pela equação (7), o ganho de velocidade depende logaritmicamente desta razão de massas. Isto implica que para se atingir ganhos de velocidade cada vez maiores, é necessário que a fração da carga total correspondente a combustível cresça de maneira muito rápida (veja a Figura 7).

Para entender isto melhor, é conveniente reescrever a equação do foguete ideal da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta v = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} &\Rightarrow \frac{\Delta v}{v_0} = \ln \frac{m_i}{m_f} \Rightarrow \\ e^{\Delta v/v_0} &= \frac{m_i}{m_f} \Rightarrow \end{aligned}$$

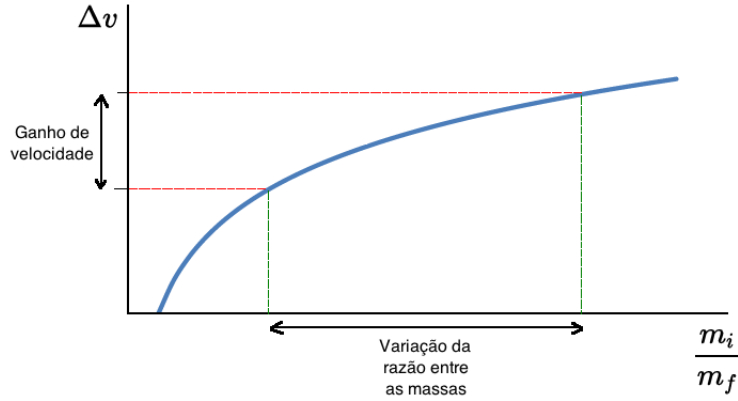


Figura 7: Relação logarítmica entre o ganho de velocidade e a razão entre as massas do foguete com “tanque cheio” e com “tanque vazio”.

$$e^{-\Delta v/v_0} = \frac{m_f}{m_i}.$$

A massa final do foguete é a massa total inicial menos a massa de combustível que ele carregava no início,

$$m_f = m_i - m_c,$$

onde m_c denota a massa de combustível no início. Então, podemos escrever

$$\frac{m_f}{m_i} = \frac{m_i - m_c}{m_i} = 1 - \frac{m_c}{m_i}.$$

Substituindo na equação do foguete:

$$e^{-\Delta v/v_0} = 1 - \frac{m_c}{m_i}.$$

Com esta equação, podemos calcular qual deve ser a quantidade de combustível que o foguete leva no início (dada em termos da fração de sua massa total) para que ele atinja um determinado ganho de velocidade.

Por exemplo, vamos parametrizar o ganho de velocidade em termos da velocidade de expulsão v_0 . Podemos então montar uma tabela como a Tabela 1.

O resultado mostrado na Tabela 1 impõe severas limitações ao projeto de foguetes, pois é impraticável construir um foguete tal que 90% ou mais de sua massa total seja de combustível e apenas 10% ou menos fique reservado

Δv	m_i/m_f	$m_c\%$
v_0	$e = 2,7$	63
$2v_0$	$e^2 = 7,4$	86,5
$3v_0$	$e^3 = 20,1$	95
$4v_0$	$e^4 = 54,6$	98

Tabela 1: Porcentagem da massa total do foguete na forma de combustível ($m_c\%$) necessária para se obter um ganho de velocidade Δv representado como múltiplo da velocidade de expulsão v_0 .

para todo o resto (estrutura física do foguete). É por isso que os foguetes lançadores são compostos de vários estágios, cada um levando uma certa quantidade de combustível.

A equação do foguete ideal discutida acima funciona bem para descrever o movimento de um foguete no espaço, livre da ação de campos gravitacionais e em condição de vácuo. Se quisermos obter uma equação para um foguete sendo lançado da superfície da Terra, porém, devemos levar em conta a força da gravidade terrestre e a força de resistência do ar. Neste caso, também é importante levar em consideração o tempo que a velocidade do foguete leva para atingir o valor final v_f , pois um foguete que queime seu combustível muito lentamente não consegue gerar uma força suficiente para vencer as forças da gravidade e da resistência do ar.

Não vamos desenvolver a equação do foguete para o caso geral aqui, mas para você ter uma ideia da importância da taxa de variação da velocidade para o lançamento de um foguete a partir de uma plataforma na Terra, divida os termos da equação (5) por dt :

$$m \frac{dv}{dt} = -v_0 \frac{dm}{dt} \Rightarrow$$

$$F = -v_0 \frac{dm}{dt}.$$

Esta é a equação para a força responsável por mover um motor a jato para a frente (equação (4), por sua vez obtida da equação (3)) sem o termo do ar que entra pela frente do motor e passa por ele. Isto porque um foguete não tem uma abertura frontal por onde ar pode entrar, pois o seu mecanismo de combustão é diferente do de um motor a jato.

Portanto, no caso do lançamento de um foguete a partir de uma plataforma terrestre, não basta apenas ter uma alta razão entre as massas de

combustível e total do foguete para que o ganho de velocidade seja alto, mas também é necessário que a taxa de consumo de combustível multiplicada pela velocidade de expulsão seja suficientemente alta para que a força de *empuxo* feita pela queima de combustível supere as forças da gravidade e da resistência do ar, contrárias à subida do foguete.

Mais detalhes acerca da equação do foguete podem ser vistos em:

- <https://web.mit.edu/16.unified/www/SPRING/propulsion/notes/note103.html>;
- <https://www.planetary.org/articles/20170428-the-rocket-equation-part-1>;
- <https://www.planetary.org/articles/20170505-the-rocket-equation-part-2>.

Uma apresentação interessante acerca das limitações impostas pela equação do foguete ao projeto de foguetes é a TEDx do astronauta estadunidense Donald Pettit, *The tyranny of the rocket equation*, disponível no endereço <https://youtu.be/uWjdnvYok4I>.

4 Energia cinética em colisões

Vamos agora voltar ao tema de colisões elásticas unidimensionais visto na Aula 12. O esquema genérico que consideraremos é o mostrado na Figura (8). Os dois corpos que colidem têm massas m_1 e m_2 e suas velocidades antes da colisão são u_1 e u_2 e depois da colisão são v_1 e v_2 (a mesma convenção adotada na Aula 12).

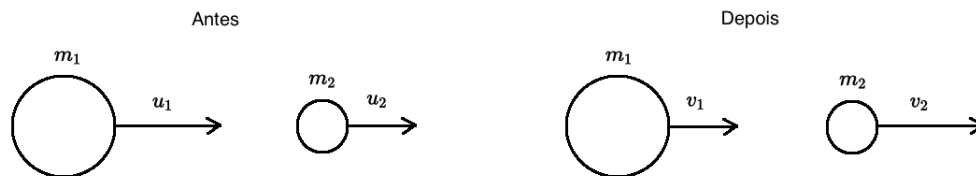


Figura 8: Colisão unidimensional genérica entre dois corpos.

Considerando que o sistema está efetivamente livre de forças externas, temos a conservação do momento linear:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (8)$$

Vamos supor que a colisão é *elástica*. Portanto, segundo a definição feita na Aula 12 (veja o texto na página 8 daquela aula), a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1),$$

ou

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1. \quad (9)$$

De (8) e (9) podemos obter expressões para as velocidades finais v_1 e v_2 em termos apenas de u_1 e u_2 (e das massas m_1 e m_2) da seguinte maneira (as passagens abaixo são puramente algébricas e você não precisa segui-las para acompanhar o texto):

Isole v_1 em (8):

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 - m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = u_1 + \frac{m_2}{m_1} u_2 - \frac{m_2}{m_1} v_2.$$

Substitua a expressão obtida para v_1 em (9):

$$v_2 - u_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2 + \frac{m_2}{m_1} v_2 = u_1 - u_2 \Rightarrow$$

$$v_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = u_1 - u_2 + u_1 + \frac{m_2}{m_1} u_2 \Rightarrow$$

$$v_2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) = 2u_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right) u_2 = 2u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1} \right) u_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) u_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2. \quad (10)$$

Substitua agora esta expressão para v_2 em (9):

$$v_1 = v_2 - u_1 + u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2 - u_1 + u_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \left(\frac{2m_1 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2. \quad (11)$$

As expressões para v_1 e v_2 em (11) e (10) possuem uma forte similaridade. Note que se trocarmos ($1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$) os subíndices das velocidades e da massa que aparece no numerador multiplicada por 2 em uma das equações, obtemos a outra e vice-versa. Esta é uma propriedade de *simetria* e sugere que deve ser possível encontrar uma expressão combinando v_1 e v_2 que possa ser simplificada de alguma forma. Quando isso acontece em física, vale a pena quebrar um pouco a cabeça para tentar encontrar a expressão simplificada, pois ela pode revelar algum aspecto ou propriedade nova e interessante de ser explorada.

O resultado que será mostrado a seguir é um bom exemplo disso.

Vamos fazer o seguinte com as expressões para v_1 e v_2 em (11) e (10). Eleve cada uma delas ao quadrado:

$$v_1^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_2^2 + 2 \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 u_2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_2^2 - 2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 u_2$$

Note que os termos cruzados (isto é, que envolvem o produto de u_1 por u_2) se cancelam se multiplicarmos v_1^2 por m_1 e v_2^2 por m_2 e somarmos as duas. Vamos então fazer isto:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 + m_1 \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_2^2$$

$$+ m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 + m_2 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_2^2.$$

Agrupando os termos que multiplicam u_1^2 e u_2^2 e desenvolvendo:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = \left[\frac{m_1(m_1 - m_2)^2 + 4m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] u_1^2 + \left[\frac{m_2(m_1 - m_2)^2 + 4m_2^2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} \right] u_2^2$$

$$= m_1 \left[\frac{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] u_1^2 + m_2 \left[\frac{(m_1 - m_2)^2 + 4m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} \right] u_2^2$$

$$\begin{aligned}
m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= \left[\frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 + 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] m_1 u_1^2 \\
&\quad + \left[\frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 + 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] m_2 u_2^2 \\
m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= \left[\frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] m_1 u_1^2 \\
&\quad + \left[\frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] m_2 u_2^2 \\
m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} m_1 u_1^2 + \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} m_2 u_2^2 \\
m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \tag{12}
\end{aligned}$$

Este é um resultado notável, que foi obtido pela primeira vez por Huygens. A soma, para os corpos envolvidos na colisão elástica, do produto de suas massas pelo quadrado de suas velocidades permanece constante, antes e depois da colisão. Ou seja, a soma total de mv^2 para os corpos que participam da colisão elástica é conservada.

Você deve estar reconhecendo a quantidade mv^2 . Ela nada mais é que a energia cinética sem o fator $1/2$. Ou seja, o resultado obtido acima nos diz que a energia cinética total dos corpos permanece constante antes e depois de uma colisão elástica entre eles:

$$K_{\text{inicial}} = K_{\text{final}}, \tag{13}$$

ou, explicitamente

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Note que a dedução da conservação da energia cinética em uma colisão elástica feita acima se inspirou apenas em considerações de simetria e não envolveu nenhuma referência à conservação do momento linear ou às forças entre os corpos. Ou seja, a conservação da energia cinética é *independente* da conservação do momento linear.

O termo mv^2 foi chamado de *vis viva* (“força viva” em latim) pelo polímata alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)⁴, que defendeu o seu uso

⁴Dentre as suas muitas realizações, Leibniz inventou o Cálculo na mesma época e independentemente de Newton.

em mecânica. Posteriormente, alguns físicos e matemáticos do séc. XVIII utilizaram a *vis viva* em seus estudos, mas com o desenvolvimento do conceito de energia no séc. XIX a energia cinética (com o fator $1/2$ multiplicando mv^2) passou a ser adotada universalmente e a *vis viva* caiu em desuso. Para saber mais acerca da história da *vis viva*, veja a página da Wikipédia https://en.wikipedia.org/wiki/Vis_viva.

Vejam agora um exemplo de aplicação da conservação da energia cinética em colisões elásticas. O exemplo é o mesmo dado na Aula 12. Duas partículas colidem elasticamente. Suas massas são conhecidas e se conhece suas velocidades antes da colisão:

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad u_1 = 10 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad m_2 = 1 \text{ kg} \quad u_2 = 5 \text{ m/s}.$$

Quais as velocidades v_1 e v_2 das duas partículas após a colisão?

Como há duas incógnitas, precisamos de duas equações para obtê-las. Na Aula 12, utilizamos a lei de conservação do momento linear e a relação entre as velocidades relativas no referencial da partícula 1 para obter o resultado. Aqui, usaremos a conservação do momento linear e a conservação da energia cinética para colisão elásticas para obter o mesmo resultado.

As equações são:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Substituindo os dados numéricos nestas equações:

$$2 \times 10 + 1 \times 5 = 2v_1 + v_2 \Rightarrow$$

$$25 = 2v_1 + v_2$$

e

$$2 \times 10^2 + 1 \times 5^2 = 2v_1^2 + v_2^2 \Rightarrow$$

$$225 = 2v_1^2 + v_2^2.$$

Isolando v_2 na primeira equação:

$$v_2 = 25 - 2v_1.$$

Substituindo na segunda:

$$225 = 2v_1^2 + (25 - 2v_1)^2 = 2v_1^2 + 625 + 4v_1^2 - 100v_1 \Rightarrow$$

$$6v_1^2 - 100v_1 + 400 = 0$$

Resolvendo esta equação de 2º grau:

$$v_1 = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9600}}{12} = \frac{100 \pm 20}{12}.$$

As duas soluções possíveis para v_1 são

$$v_1 = 10 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad v_1 = 6,7 \text{ m/s}.$$

Para $v_1 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 25 - 20 = 5 \text{ m/s}$.

Para $v_1 = 6,7 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 25 - 13,4 = 11,7 \text{ m/s}$.

O primeiro resultado deve ser descartado, pois ele implica que os dois corpos continuam a se movimentar com as mesmas velocidades de antes da colisão, como se nada tivesse acontecido. Portanto, o resultado desejado é o do segundo resultado: $v_1 = 6,7 \text{ m/s}$ e $v_2 = 11,7 \text{ m/s}$. Comparando com a solução obtida na Aula 12, vemos que elas são idênticas.

Agora que vimos que a energia cinética pode ser utilizada em problemas de colisões elásticas, vamos deduzir um resultado importante que vale mesmo quando ela não é conservada.

Suponha que a Figura 8 represente uma colisão unidimensional arbitrária (elástica ou não) observada de um sistema de referência que chamaremos de S . Vamos considerar a mesma colisão do ponto de vista de outro sistema de referência, que chamaremos de S' , o qual se move com velocidade constante v em relação a S .

Os dois sistemas de referência estão então relacionados pela transformação de Galileu (veja a seção 7 da Aula 8) e podemos escrever

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 - v & u'_2 &= u_2 - v \\ v'_1 &= v_1 - v & v'_2 &= v_2 - v, \end{aligned}$$

onde o superscrito “linha” indica as velocidades medidas no referencial S' .

Demonstraremos agora que a *variação* da energia cinética entre os estados inicial e final é o que se chama em física de uma *invariante* – isto é, ela tem o mesmo valor em ambos sistemas de referência.

Em S :

$$\begin{aligned}
 K_{\text{inicial}} &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \\
 K_{\text{final}} &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
 \Delta K &= K_f - K_i = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \right).
 \end{aligned}$$

Em S' :

$$\begin{aligned}
 K'_{\text{inicial}} &= \frac{1}{2}m_1(u_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2 - v)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_1(u_1^2 + v^2 - 2u_1v) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 + v^2 - 2u_2v) \\
 K'_{\text{final}} &= \frac{1}{2}m_1(v_1 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - v)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_1(v_1^2 + v^2 - 2v_1v) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 + v^2 - 2v_2v) \\
 \Delta K' &= K'_f - K'_i = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \right) \\
 &\quad - v[(m_1v_1 + m_2v_2) - (m_1u_1 + m_2u_2)].
 \end{aligned}$$

A lei da conservação do momento linear vale para qualquer tipo de colisão (elástica, inelástica ou totalmente inelástica). Por esta lei, temos que

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Isto implica que o último termo na expressão para a variação da energia cinética no referencial S' acima é identicamente nulo. Logo,

$$\Delta K' = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \right) = \Delta K.$$

Portanto, se a variação da energia cinética para um dado processo de colisão for conhecida em um sistema de referência, ela terá o mesmo valor

em todos os sistemas de referência. Disto decorre que se conhecermos o valor de ΔK em um sistema de referência e usarmos o fato de que o momento linear se conserva, podemos prever os valores de v_1 e v_2 para qualquer colisão unidimensional desde que se conheçam as velocidades iniciais u_1 e u_2 .

O valor de ΔK pode ser positivo, negativo ou nulo. No primeiro caso, temos um processo explosivo em que uma energia cinética extra é dada às partículas que se separam como resultado da interação. O segundo caso corresponde a uma colisão inelástica, pois o sistema perde energia cinética no processo, e o terceiro, como vimos acima, corresponde a uma colisão elástica.

5 O referencial do centro de massa

O momento linear de uma partícula ou de um sistema de partículas não é um invariante; ele depende do sistema de referência de onde se observa o movimento. No entanto, se forem comparadas as descrições do movimento feitas em dois sistemas de referência inerciais, relacionados por uma velocidade constante, a diferença entre os valores medidos para o momento linear de uma partícula será sempre um vetor constante de módulo $m\mathbf{v}$, onde m é a massa da partícula e $\mathbf{v}$ é a velocidade de um sistema em relação ao outro.

Podemos sempre encontrar um sistema de referência para o qual o momento linear total de qualquer partícula se anule. Evidentemente, este é o sistema no qual a partícula está instantaneamente em repouso no momento em que se faz a medida do seu momento linear.

Da mesma forma, pode-se sempre encontrar um sistema de referência para o qual o momento linear total de qualquer sistema de partículas seja zero. Vamos chamar este sistema de referência de *sistema de referência de momento linear zero*. O sistema de referência de momento linear zero é de grande importância, não apenas para a descrição de colisões e interações entre partículas em geral, mas, como veremos mais adiante, por suas implicações *dinâmicas*.

Para mostrar como identificar este sistema de referência, vamos começar com um exemplo simples. Duas partículas, m_1 e m_2 , se movem ao longo do eixo x com velocidades constantes v_1 e v_2 em relação ao sistema de referência S (veja a Figura 9). Seja um segundo sistema de referência S' movendo-se com velocidade constante $\bar{v}$ em relação a S (indicado em vermelho na Figura 9). Qual deve ser o valor de $\bar{v}$ para que o momento linear total das duas partículas no referencial S' , $m_1v'_1 + m_2v'_2$, seja nulo?

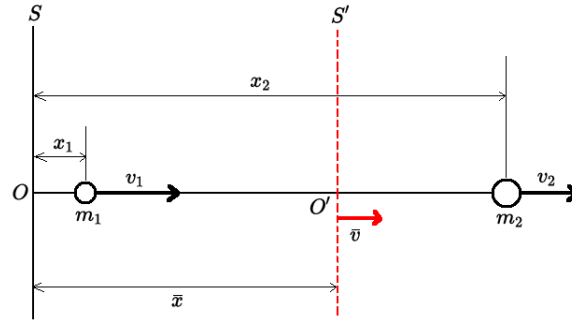


Figura 9: Duas partículas de massas m_1 e m_2 movendo-se com velocidades v_1 e v_2 em relação ao sistema de referência S . Um segundo sistema de referência S' (em vermelho) move-se com velocidade constante $\bar{v}$ em relação a S .

Pela Figura 9, vemos que as velocidades de m_1 e m_2 em relação a S' são

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 - \bar{v} \\ v'_2 &= v_2 - \bar{v}. \end{aligned}$$

Então, o momento linear total das duas partículas no sistema S' é

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 - m_1 \bar{v} + m_2 v_2 - m_2 \bar{v}.$$

Para que esta quantidade seja zero, devemos ter

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) \bar{v} &= 0 \Rightarrow \\ (m_1 + m_2) \bar{v} &= m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{aligned} \quad (14)$$

A equação (14) nos dá a velocidade $\bar{v}$ do referencial de momento linear zero em relação a S , mas ela pode nos dizer mais. Ela pode nos dizer qual a posição da origem O' do sistema de referência de momento linear zero em relação às coordenadas x_1 e x_2 das duas partículas no sistema S .

Para ver isto, vamos reescrever a equação (14) como

$$(m_1 + m_2) \frac{d\bar{x}}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt},$$

ou, melhor ainda, como

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \bar{x}] = \frac{d}{dt} [m_1 x_1 + m_2 x_2].$$

A condição acima é satisfeita se

$$(m_1 + m_2)\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2 + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Vamos escolher o caso mais simples, em que $C = 0$, e então temos que a posição da origem O' do sistema de referência de momento linear zero em relação a S é:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M}, \quad (15)$$

onde $M = m_1 + m_2$.

A origem do sistema de referência de momento linear zero escolhida desta maneira é chamada de *centro de massa* das duas partículas.

Você pode ter notado que a equação (15) define também aquilo que costuma-se chamar de *centro de gravidade* de dois corpos de massas m_1 e m_2 (veja a Figura 10).

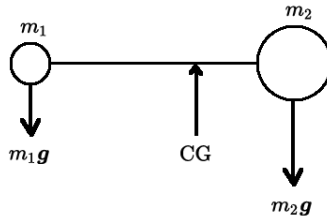


Figura 10: Centro de gravidade (CG) de dois corpos.

Em princípio, porém, o centro de massa (CM) e o centro de gravidade (CG) não precisam coincidir. O centro de gravidade de um sistema de dois corpos é definido como o ponto em torno do qual a soma dos torques das forças gravitacionais sobre os dois corpos se anula (lembre da Aula 6), de maneira que uma força $\mathbf{F}$ de módulo igual à soma dos pesos das duas partículas aplicada sobre o CG pode equilibrar o sistema.

Se os valores de g nas posições dos dois corpos não forem exatamente iguais, então as posições do centro de gravidade e do centro de massa não serão as mesmas. Na maior parte das situações nas vizinhanças da superfície da Terra, em que o campo gravitacional é aproximadamente uniforme, a diferença entre o centro de gravidade e o centro de massa é desprezível e, efetivamente, os dois coincidem. Deve-se reconhecer, porém, que o centro

de massa definido por (15) não faz nenhuma referência à uniformidade do campo gravitacional ou mesmo à existência de forças gravitacionais.

A partir de agora, chamaremos o sistema de referência de momento linear zero de referencial do centro de massa (CM).

Note que no caso de apenas duas partículas como o do exemplo dado, o centro de massa localiza-se em algum ponto sobre a linha que une as duas partículas. Se as partículas tiverem massas iguais, o CM estará exatamente no ponto médio da linha, mas se as massas forem diferentes o CM estará mais próximo da partícula mais massiva.

O conceito de centro de massa pode ser generalizado para um sistema de N partículas em três dimensões. Seja um sistema de N partículas em três dimensões com a massa da i -ésima partícula dada por m_i e seu vetor posição em relação à origem O do sistema de coordenadas S dado (em coordenadas cartesianas) por

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}.$$

Então, o vetor posição $\mathbf{r}_{\text{CM}}$ do centro de massa das N partículas é dado por uma generalização direta da equação (15):

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (16)$$

onde M é a soma das massas das N partículas,

$$M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Em termos das componentes, as coordenadas de $\mathbf{r}_{\text{CM}}$ são:

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i.$$

O referencial do CM é extremamente útil para analisar a dinâmica de um sistema de partículas. Para ilustrar as ideias essenciais da maneira mais simples possível, vamos novamente considerar um sistema unidimensional de duas partículas. No referencial S (vamos supor que este é o referencial do nosso laboratório) as partículas têm velocidades v_1 e v_2 . No referencial do CM (S') elas têm velocidades v'_1 e v'_2 dadas por

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 - \bar{v} \\v'_2 &= v_2 - \bar{v},\end{aligned}$$

com $\bar{v}$ definido por (14).

Podemos reescrever $\bar{v}$ como

$$\bar{v} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{P}{M}, \quad (17)$$

onde $M = m_1 + m_2$ e P é o momento linear total, que sabemos que permanece constante em qualquer processo de colisão:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const.} \quad (18)$$

Vamos agora escrever a energia cinética K , medida no referencial do laboratório, em função da velocidade do centro de massa $\bar{v}$ e das velocidades v'_1 e v'_2 das partículas em relação ao CM.

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\&= \frac{1}{2}m_1 (v'_1 + \bar{v})^2 + \frac{1}{2}m_2 (v'_2 + \bar{v})^2 \\&= \left(\frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 \right) + (m_1 v'_1 + m_2 v'_2) \bar{v} \\&\quad + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \bar{v}^2.\end{aligned} \quad (19)$$

Como o referencial do CM é o referencial de momento linear zero,

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0.$$

Isto faz com o termo do meio na equação (19) seja nulo. O primeiro termo é a energia cinética total K' das duas partículas em relação ao CM; e o terceiro

termo é a energia cinética de uma única partícula de massa M movendo-se com a velocidade $\bar{v}$ do CM.

Portanto, podemos escrever:

$$K = K' + \frac{1}{2}M\bar{v}^2. \quad (20)$$

Este é um resultado tão importante que vamos expressá-lo em palavras também:

A energia cinética de um sistema de duas partículas é igual à energia cinética das partículas em relação ao centro de massa do sistema (energia cinética interna) mais a energia cinética de uma única partícula de massa igual à massa total do sistema se movimentando junto com o centro de massa.

A grande importância desta separação da energia cinética em duas partes é que ela nos dá a possibilidade de analisar o movimento interno de um sistema de partículas (em relação ao CM) sem nenhuma referência ao movimento corporal do sistema como um todo. Este resultado não é válido apenas para um sistema de duas partículas, mas para um sistema geral de N partículas em três dimensões.

Pense, por exemplo, em uma molécula deslocando-se no espaço. Além do movimento da molécula como um todo pelo espaço, os átomos que constituem a molécula se movem em seu interior. O resultado acima nos diz que a energia cinética total da molécula pode ser separada em duas partes: a energia cinética do movimento da molécula como um todo, que pode ser descrita como o movimento do centro de massa dos átomos que constituem a molécula, e a energia cinética dos movimentos dos átomos no interior da molécula em relação ao CM (energia interna da molécula).

Uma das implicações da equação (20) é que uma certa quantidade da energia cinética está “amarrada” ao movimento do centro de massa. Imagine uma colisão entre duas partículas. Na ausência de forças externas sobre o sistema, a velocidade $\bar{v}$ do CM permanece constante durante um processo de colisão (equação (18)), implicando que a energia cinética $\frac{1}{2}M\bar{v}^2$ também permanece constante.

Isto significa que em uma colisão entre dois corpos apenas uma parte de sua energia cinética total, medida no referencial do laboratório, está disponível para ser convertida para outras finalidades. A quantidade dessa energia cinética disponível é K' , a energia cinética interna do sistema.

Podemos calcular o valor de K' da seguinte maneira. De (20) temos

$$\begin{aligned} K' &= K - \frac{1}{2}M\bar{v}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\bar{v}^2. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\bar{v}$ dado em (17),

$$\begin{aligned} K' &= \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2)}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\cancel{\frac{1}{2}m_1^2v_1^2} + \frac{1}{2}m_1m_2v_1^2 + \frac{1}{2}m_1m_2v_2^2 + \cancel{\frac{1}{2}m_2^2v_2^2} - \cancel{\frac{1}{2}m_1^2v_1^2} - \cancel{\frac{1}{2}m_2^2v_2^2} - m_1m_2v_1v_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 - v_1v_2\right) = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2. \end{aligned}$$

Para nosso propósito, é mais conveniente escrever a equação acima como

$$K' = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_{\text{rel}}^2, \quad (21)$$

onde $v_{\text{rel}} = (v_2 - v_1) = (v'_2 - v'_1)$ é a velocidade da partícula 2 em relação à partícula 1.

Note que o termo $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ tem dimensão de massa. Vamos então definir uma nova quantidade, chamada de *massa reduzida* do sistema de duas partículas, dada por

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Em termos da massa reduzida, a equação (21) é escrita como:

$$K' = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2. \quad (22)$$

Exemplo. Imagine uma colisão entre duas partículas de massas $m_1 = 2$ unidades e $m_2 = 1$ unidade e que, antes da colisão, no referencial do laboratório a partícula 1 tem velocidade $u_1 = u$ e a partícula 2 está parada ($u_2 = 0$). A

energia cinética total do sistema antes da colisão no referencial do laboratório é, pela equação (20),

$$K = K' + \frac{1}{2}M\bar{v}^2.$$

Os valores dos dois termos que compõem K podem ser calculados usando as fórmulas dadas acima:

$$M = m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3 \text{ unidades}$$

$$\bar{v} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{M} = \frac{2u}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\bar{v}^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{2u}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}u^2.$$

e

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{2}{3}$$

$$u_{\text{rel}} = u_2 - u_1 = -u \Rightarrow$$

$$K' = \frac{1}{2}\mu u_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} (-u)^2 = \frac{u^2}{3}.$$

Portanto, a energia cinética do sistema antes da colisão é

$$K = \frac{u^2}{3} + \frac{2}{3}u^2 = u^2$$

e dois terços dela são empregados no movimento do centro de massa (que permanece o mesmo depois da colisão, pois não há forças externas ao sistema). Desta forma, apenas um terço da energia cinética total, correspondendo à energia cinética interna, está disponível para produzir deformações ou algo similar quando os dois corpos colidirem.