

Colisões e leis de conservação - Parte I

Antônio Roque

Novembro 2021

Nesta aula, trataremos de alguns temas que fazem parte do coração da mecânica. Eles estão enraizados no fato fundamental de que são necessárias pelo menos duas partículas para formar um sistema dinâmico. Até agora temos ignorado este fato considerando apenas partículas individuais sujeitas a forças de diversos tipos. Por exemplo, o movimento de um planeta em torno do Sol ou de um elétron entre as placas metálicas de um defletor foi estudado como o problema de uma única partícula exposta a uma força exercida por algum corpo ou estrutura completamente imóvel. Mas esta é uma maneira muito específica de ver as coisas e, em geral, não é justificável.

É certo que o Sol atrai a Terra e produz nela uma aceleração, mas a lei da gravitação universal é completamente simétrica e a Terra exerce sobre o Sol uma força de atração de mesmo módulo e direção, mas sentido oposto. A conclusão é que o Sol também tem uma aceleração devida às forças exercidas sobre ele por todos os planetas do sistema solar e sua trajetória é a resultante do efeito combinado dessas acelerações. O que ocorre é que o Sol é muito mais massivo que todos os planetas do sistema solar somados e, em primeira aproximação, podemos considerá-lo como imóvel.

Isto, porém, é só um acidente devido à disparidade de massas dos constituintes do sistema solar. No caso geral de um sistema de partículas, suas massas não precisam ser tão diferentes e os movimentos de todas as partículas têm que ser considerados.

O sistema dinâmico mais simples é o formado por duas partículas e o estudo experimental desse tipo de sistema via colisões entre as partículas pode ser considerado como o ponto de partida da dinâmica. É interessante notar que até hoje, mais de 300 anos após seu início, o estudo de colisões entre partículas continua de extrema importância em física (um exemplo são os modernos aceleradores de partículas).

1 O problema da colisão

No início do século XVII houve o reaparecimento das ideias do *atomismo* na Europa. O atomismo foi uma corrente filosófica da Grécia antiga que alegava que a matéria é constituída de partículas minúsculas indestrutíveis, chamadas de *átomos*, que se movimentam constantemente no vácuo. As colisões entre os átomos seriam as responsáveis por todos os fenômenos macroscópicos observados e dariam aos corpos materiais as propriedades por nós observadas.

A concepção atomística da matéria retornou com força entre muitos filósofos e cientistas do século XVII e, por causa disso, tornou-se imperativo entender o comportamento de colisões entre partículas. Segundo a visão da época, as colisões eram a única maneira que os átomos teriam para interagir entre si e isto fez com que o chamado *problema da colisão* ganhasse relevância.

O problema da colisão entre dois corpos só foi resolvido de maneira satisfatória com Newton, mas antes dele vários cientistas e filósofos se dedicaram a estudá-lo, tanto do ponto de vista empírico como teórico.

Entre 1632 e 1633, o filósofo francês René Descartes (1596-1650) introduziu a noção de *conservação*, argumentando que, na criação do universo, Deus teria imbuído a matéria de uma certa *quantidade de movimento* que não poderia ser modificada posteriormente. Descartes usou seu princípio de conservação para chegar a sete leis para colisões, mas elas se mostraram inconsistentes com os resultados empíricos e o principal motivo disso é que Descartes não intuiu o caráter vetorial da quantidade de movimento, isto é, do momento linear.

Em 1688, a *Royal Society* de Londres¹, lançou uma chamada pedindo a submissão de trabalhos que explicassem o problema da colisão entre dois corpos. Houve três respostas à chamada, submetidas no mesmo ano pelo arquiteto Sir Christopher Wren (1632-1723), pelo matemático John Wallis (1616-1703) e pelo físico holandês Christiann Huygens (1629-1695). Os trabalhos submetidos pelos três descreviam seus resultados teóricos e experimentais e correspondiam apenas parcialmente à totalidade dos casos possíveis em uma colisão entre dois corpos. Uma revisão detalhada desses trabalhos é feita por Porto em artigo recente para a Revista Brasileira de Ensino de Física (Porto, C. M., A história do problema das colisões na física do século XVII ante-

¹A *Royal Society* é a mais antiga instituição científica nacional do mundo, tendo sido fundada em 1660 (a *Accademia del Cimento* (Academia do Experimento), fundada em Florença em 1657, é mais antiga, mas não teve caráter nacional). Veja mais detalhes acerca da história da *Royal Society* em https://en.wikipedia.org/wiki/Royal_Society.

rior a Newton. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 42:e202000004, 2020; <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0004>). Os estudantes interessados devem procurar maiores informações neste artigo; aqui será feito apenas um brevíssimo resumo no parágrafo seguinte.

O trabalho de Wren é correto para o que chamamos atualmente de colisões elásticas e o trabalho de Wallis para o que chamamos de colisões inelásticas. Os trabalhos dos dois também são importantes porque introduzem o uso de números negativos para representar o sentido das velocidades dos corpos, o que auxilia muito na análise. O trabalho de Huygens é o mais completo dos três e ele só não resolveu o problema geral porque se ateve à noção de quantidade de movimento escalar cartesiana, que ele posteriormente percebeu que estava errada. Huygens resolveu corretamente o problema de colisões elásticas e, para isto, introduziu (i) uma grandeza que hoje em dia chamamos de energia cinética, (ii) a noção do que hoje em dia chamamos de conservação de energia mecânica e (iii) utilizou com maestria o princípio da relatividade do movimento. Em suma, vários dos conceitos importantes utilizados atualmente para descrever colisões entre dois corpos foram intuídos por Wren, Wallis e Huygens.

Newton, que foi um excelente físico experimental além de teórico e matemático, refez os experimentos de colisões elásticas e inelásticas descritos por Wren, Wallis e Huygens e realizou novos experimentos em que estudou colisões de elasticidade intermediária. Nos *Principia*, ele conseguiu explicar todos os casos de colisões em termos do princípio da conservação do momento linear, que ele deduziu a partir de sua terceira lei (veja a seção 3 da Aula 8).

2 A conservação do momento linear

Um físico está sempre atento às quantidades que permanecem conservadas (isto é, invariantes) nos processos físicos. Depois que se descobre quais são essas quantidades, elas se convertem em poderosos instrumentos para a análise dos experimentos feitos e a previsão de novos fenômenos.

À medida que se percebe que um determinado tipo de quantidade é conservado em mais e mais situações, parecendo que a conservação se aplica a todos os fenômenos, eleva-se o *status* do enunciado da conservação da quantidade ao de uma *lei de conservação*.

Em alguns casos novos, a lei de conservação parece não se cumprir, mas a crença nela por parte de alguns cientistas é tão forte que vai-se em busca

da parte que está faltando. Caso ela seja encontrada, isto reforça ainda mais a lei de conservação.

Por exemplo, a lei de conservação da massa nas reações químicas é aceita como um guia para todas as medidas das massas dos materiais reagentes. Quando o balanço de massa foi inicialmente aplicado ao estudo das reações químicas, parecia que em alguns processos a massa aumentava e em outros diminuía, enquanto que em outros permanecia invariante. Porém, depois que o químico francês Antoine Lavoisier (1743-1794) provou, por numerosos exemplos, que a massa era simplesmente transferida e que em um sistema *isolado* ela se conservava, o esquema do conjunto se tornou claro. Os químicos puderam, a partir de então, explorar as aplicações da lei de conservação da massa. Por exemplo, eles podiam calcular com confiança a massa de um produto gasoso que escapa de um sistema aberto a partir da medida das massas dos reagentes líquidos ou sólidos.

Alguns dos aspectos mais poderosos da descrição física do universo feita pela ciência moderna estão associados a leis de conservação. Em mecânica, a lei de conservação do momento linear é uma dessas leis. Ela está baseada diretamente em experimentos envolvendo colisões entre duas partículas e pode ser enunciada como:

O momento linear total de um sistema de duas partículas que colidem permanece inalterado pela colisão, isto é, o momento linear total é uma quantidade conservada.

É importante ter em mente que a hipótese tácita por trás desse enunciado relativo à colisão entre duas partículas é a de que o sistema está *isolado*, isto é, as partículas interagem apenas entre si e com nada mais.

Newton e seus contemporâneos propuseram experimentos engenhosos para conseguir que dois corpos em colisão pudessem ser considerados como efetivamente isolados. Um exemplo é o de duas bolas suspensas por longos e finos fios de comprimentos iguais, de maneira que elas balançassem como pêndulos e sua colisão ocorresse quando elas estivessem nos pontos mais baixos de suas trajetórias (veja uma ilustração do experimento tirada dos *Principia* na Figura 1). Durante o breve instante do impacto entre as bolas, elas estão essencialmente livres de todas as forças *horizontais* com exceção daquelas que provocam sua interação mútua.

Nos instantes imediatamente antes e imediatamente depois do impacto entre as duas bolas, seu movimento pode ser considerado como unidimensional (isto é, não precisamos utilizar notação vetorial aqui). Vamos chamar as

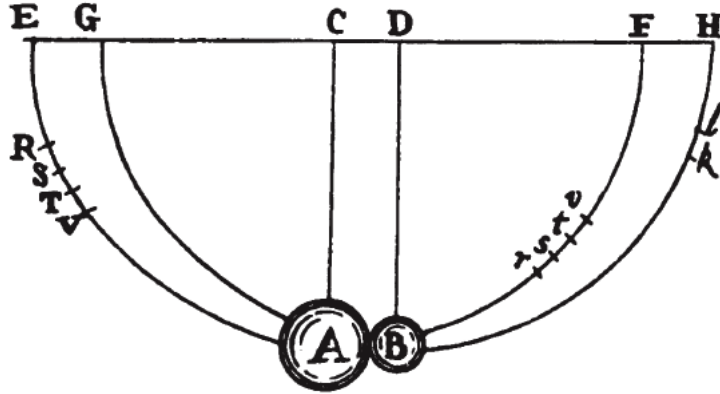


Figura 1: Experimento de colisão de Newton. Na edição brasileira dos *Principia* publicada pela Edusp (ver referência na Aula 8), esta figura está na página 63.

duas bolas de 1 e 2. Então, a lei de conservação do momento linear das duas bolas pode ser expressa matematicamente como,

$$p_1 + p_2 = \text{const.} \quad (1)$$

Esta expressão pode ser escrita em termos das massas e das velocidades das duas bolas. Representando suas massas por m_1 e m_2 e suas respectivas velocidades *antes* do impacto por u_1 e u_2 e *depois* do impacto por v_1 e v_2 , a lei da conservação do momento linear é

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (2)$$

Qualitativamente, uma colisão pode ser classificada em função de seu grau de *elasticidade*, como veremos em detalhe na seção seguinte.

3 Colisões em uma dimensão

Imagine dois carrinhos de massas diferentes (1 e 2) que podem deslizar sem atrito sobre um trilho horizontal longo. Os carrinhos são postos em movimento sobre o trilho com velocidades u_1 e u_2 como mostrado na Figura 2. Vamos supor que

$$u_1 > u_2,$$

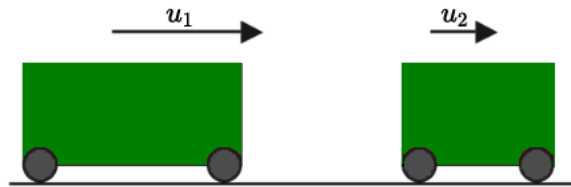


Figura 2: Dois carrinhos movimentando-se sem atrito sobre um trilho horizontal sem atrito. Como $u_1 > u_2$, eles irão colidir.

de maneira que os dois carrinhos irão colidir em algum momento.

Vamos chamar as velocidades dos dois carrinhos após a colisão de v_1 e v_2 . Ou seja, temos a seguinte convenção para as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão:

<u>Antes</u>		<u>Depois</u>	
u_1	u_2	v_1	v_2

Como estamos considerando movimentos em uma dimensão, não precisamos utilizar notação vetorial, mas note que os *sentidos* das velocidades importam. No desenho da Figura 2, as velocidades u_1 e u_2 foram representadas apontando para a direita apenas para evitar ter que desenhar todas as possíveis situações. Porém, você tem que ter em mente que as velocidades u e v têm sinais (positivo, indicando movimento para a direita, e negativo, indicando movimento para a esquerda). Para deixar isto claro, a Figura 3 ilustra todas as possibilidades e as condições para que haja colisão. Note que a condição para que haja uma colisão é sempre $u_1 > u_2$.

Exemplos de casos em que ocorre colisão são:

$$u_1 = +10 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad u_2 = +5 \text{ m/s} \quad (\text{desenho do topo na Figura 3})$$

$$u_1 = -5 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad u_2 = -10 \text{ m/s} \quad (\text{último desenho na Figura 3})$$

É conveniente representar as coisas do ponto de vista de um referencial preso a um dos carrinhos, por exemplo o carrinho 1. Do ponto de vista de um referencial preso ao carrinho 1, a situação corresponde ao que é mostrado na Figura 4.

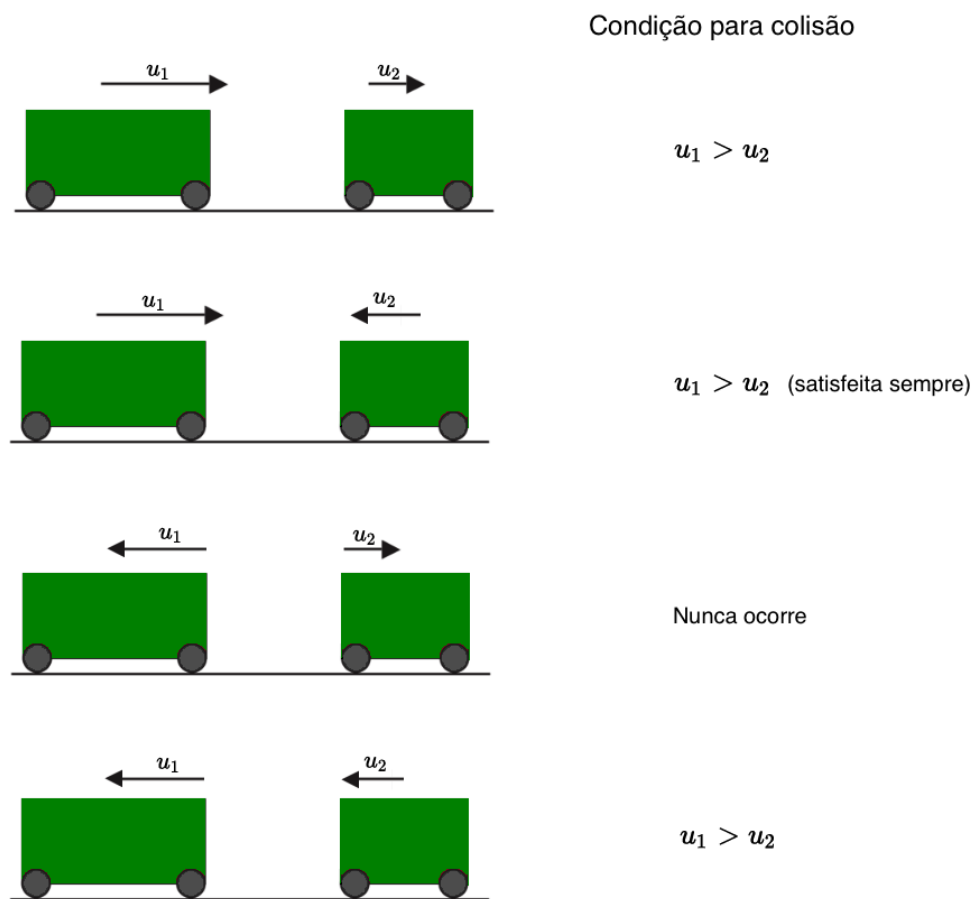


Figura 3: Ilustração de todas as possibilidades para os dois carrinhos, com as respectivas condições para que haja colisão.



Figura 4: Situação em que há colisão do ponto de vista de um referencial preso ao carrinho 1.

A velocidade do carrinho 2 em relação ao carrinho 1 antes da colisão é

$$u_r = u_2 - u_1.$$

Note que como $u_1 > u_2$, u_r é negativa. Isto quer dizer que, do ponto de vista do referencial preso ao carrinho 1, o carrinho 2 se move em direção a ele (vai para a esquerda) como mostrado na Figura 4.

Após a colisão, a velocidade do carrinho 2 em relação ao carrinho 1 será indicada por

$$v_r = v_2 - v_1.$$

Vamos supor que uma mola de massa desprezível está presa ao carrinho 2 como mostrado na Figura 5. Neste caso, quando os dois carrinhos colidirem a mola será comprimida e depois se esticará empurrando os carrinhos um para cada lado.

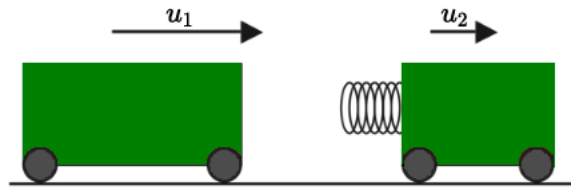


Figura 5: Dois carrinhos como os da Figura 2, só que agora uma mola de massa desprezível é presa ao carrinho 2.

A mola faz com que a colisão entre os carrinhos seja do tipo que chamamos de *elástica*, às vezes chamada enfaticamente de *perfeitamente elástica*. Por definição, em uma colisão elástica a velocidade relativa depois da colisão entre dois corpos é igual em módulo, mas tem sentido oposto ao da velocidade relativa antes da colisão:

$$v_r = v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1) = -u_r \quad (\text{colisão elástica}).$$

Em relação ao referencial preso ao carrinho 1, as situações antes e depois da colisão elástica são como as mostradas na Figura 6.

Se a mola for substituída por uma placa besuntada com cola superforte os dois carrinhos ficarão colados após a colisão e a velocidade relativa depois da colisão é zero. Por definição, uma colisão desse tipo é chamada de *totalmente inelástica*:

$$v_r = v_2 - v_1 = 0 \quad (\text{colisão totalmente inelástica}).$$

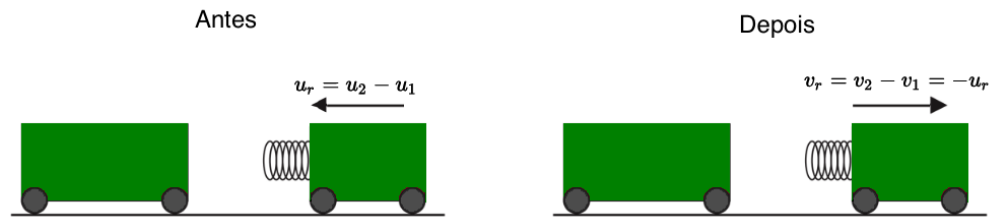


Figura 6: Colisão elástica entre os dois carrinhos do ponto de vista do referencial preso ao carrinho 1.

Do ponto de vista do referencial preso ao carrinho 1, uma colisão totalmente inelástica é como a mostrada na Figura 7.

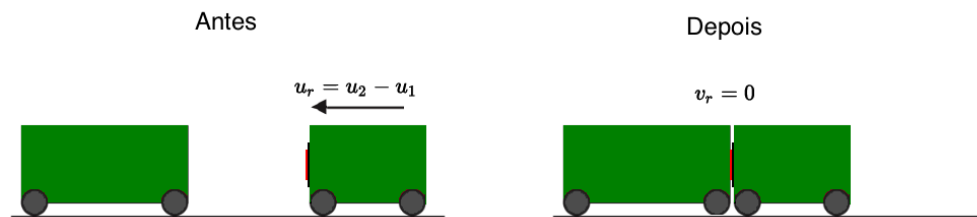


Figura 7: Colisão totalmente inelástica entre os dois carrinhos do ponto de vista do referencial preso ao carrinho 1.

Qualquer outra situação intermediária entre as colisões elástica e totalmente inelástica é chamada de colisão *inelástica* ou *parcialmente inelástica*. Colisões desse tipo podem ser provocadas em nosso exemplo dos carrinhos se não houver nenhum material entre eles ou se pregarmos no carrinho 2 placas com diferentes materiais, por exemplo, cortiça, algodão, etc.

Na maior parte dos casos, as colisões entre dois corpos são inelásticas, isto é, nem elásticas, nem totalmente inelásticas. Se depois de uma colisão os dois corpos ficam presos um ao outro, sabemos que a colisão foi totalmente inelástica, mas se os corpos ricocheteiam um no outro só é possível determinar se a colisão foi elástica ou inelástica empiricamente, medindo suas velocidades antes e depois da colisão.

Antes de terminar esta seção, vamos dar um exemplo numérico para mostrar a importância da lei da conservação do momento linear na resolução de problemas de colisões.

Vamos supor que se sabe que a colisão entre duas partículas é elástica e

se conhece as massas e as velocidades delas antes da colisão. Por exemplo,

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad u_1 = 10 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad m_2 = 1 \text{ kg} \quad u_2 = 5 \text{ m/s}.$$

Quais as velocidades, v_1 e v_2 das duas partículas após a colisão?

Como a colisão é elástica, sabemos que existe a seguinte relação entre as velocidades relativas no referencial da partícula 1 antes e depois da colisão:

$$u_r = u_2 - u_1 = 5 - 10 = -5 \text{ m/s},$$

$$v_r = v_2 - v_1 = -u_r = 5 \text{ m/s}.$$

A expressão acima nos dá uma equação envolvendo v_1 e v_2 , mas como temos duas incógnitas precisamos de *duas* equações para resolver completamente o sistema. A segunda equação é fornecida pela lei de conservação do momento linear:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Substituindo os valores numéricos nesta equação:

$$2 \times 10 + 1 \times 5 = 2v_1 + v_2 \Rightarrow$$

$$25 = 2v_1 + v_2.$$

Temos então duas equações:

$$v_2 - v_1 = 5 \tag{3}$$

e

$$2v_1 + v_2 = 25. \tag{4}$$

De (3):

$$v_2 = 5 + v_1. \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4):

$$2v_1 + 5 + v_1 = 25 \Rightarrow$$

$$3v_1 = 20 \Rightarrow$$

$$v_1 = 6,7 \text{ m/s}.$$

Substituindo v_1 em (3):

$$v_2 = 5 + 6,7 = 11,7 \text{ m/s}.$$

E se soubermos que a colisão é totalmente inelástica? Neste caso,

$$v_r = v_2 - v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1.$$

A equação para a conservação do momento linear continua a mesma (equação (4)). Substituindo $v_2 = v_1$ nela:

$$2v_1 + v_1 = 25 \Rightarrow v_1 = \frac{25}{3} = 8,3 \text{ m/s} = v_2.$$

4 O momento linear como grandeza vetorial

Os exemplos dados até agora se restringiram a colisões em uma dimensão. Porém, como já vimos antes (Aula 8), o momento linear de uma partícula é uma grandeza vetorial. Portanto, a expressão matemática da conservação do momento linear em uma colisão entre duas partículas deve, de fato, ser escrita como:

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}, \quad (6)$$

onde os subíndices i e f indicam os valores inicial e final (antes e depois da colisão) dos momentos lineares.

Pela equação vetorial (6) pode-se determinar o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos quatro vetores envolvidos se os outros três forem conhecidos. Em geral, para a resolução de problemas, é bastante conveniente escrever a equação (6) em termos das componentes dos vetores ao longo de três eixos mutuamente ortogonais, por exemplo (x, y, z) . Assim, por exemplo, se os dois corpos tiverem massas m_1 e m_2 e velocidades iniciais e finais $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, a equação (6) torna-se

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \quad (7)$$

a qual é constituída pelas seguintes três equações *independentes*:

$$\begin{aligned} m_1u_{1x} + m_2u_{2x} &= m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \\ m_1u_{1y} + m_2u_{2y} &= m_1v_{1y} + m_2v_{2y} \\ m_1u_{1z} + m_2u_{2z} &= m_1v_{1z} + m_2v_{2z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Para a realização de cálculos numéricos, a decomposição em termos de componentes dada pelas equações (8) será frequentemente necessária. Porém,

para manipulações envolvendo massas e velocidades desconhecidas será melhor utilizar as equações não decompostas (6) e (7), sem referência a qualquer sistema de coordenadas específico. Esta, aliás, é uma das principais vantagens da notação vetorial.

Vejam os um exemplo. Um corpo de massa 5 kg está se movendo sobre uma superfície horizontal sem atrito com velocidade de 16 m/s e se choca com um corpo em repouso de massa 3 kg. Depois da colisão, observa-se que o corpo de massa 5 kg tem velocidade cujo módulo é 12 m/s dirigida segundo uma trajetória que forma um ângulo de 30° com sua direção original, como mostrado na Figura 8. Qual é a velocidade final do corpo de 3 kg?

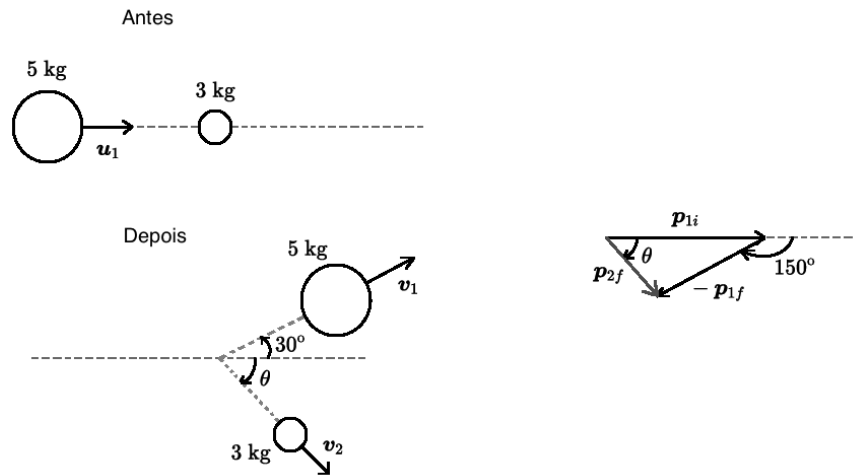


Figura 8: Colisão de um corpo em movimento com outro em repouso e conservação do vetor momento linear total.

Para resolver o problema, vamos representar os vetores momento linear dos corpos no plano xy , com o eixo x apontando na direção da velocidade inicial do corpo de 5 kg, que chamaremos de partícula 1 (o outro corpo será chamado de partícula 2).

Aplicando a equação (6) ao problema e usando a informação dada no enunciado de que $p_{2i} = 0$:

$$\mathbf{p}_{1i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \Rightarrow$$

$$\mathbf{p}_{2f} = \mathbf{p}_{1i} - \mathbf{p}_{1f}.$$

A parte da direita na Figura 8 mostra a construção vetorial de onde se pode obter graficamente $\mathbf{p}_{2f}$. Para isto, temos que os módulos dos vetores $\mathbf{p}_{1i}$ e $\mathbf{p}_{1f}$ são:

$$\mathbf{p}_{1i} = m_1 v_{1i} = 5 \times 16 = 80 \text{ kg m/s}$$

$$\mathbf{p}_{1f} = m_1 v_{1f} = 5 \times 12 = 60 \text{ kg m/s}$$

Se você fizer em casa o diagrama vetorial mostrado na figura representando esses módulos em escala e usando um transferidor para desenhar os ângulos, obterá o valor do módulo de $\mathbf{p}_{2f}$ e o ângulo θ que ele faz com a horizontal. Conhecendo o módulo de $\mathbf{p}_{2f}$, você pode calcular o módulo da velocidade v_{2f} como

$$v_{2f} = \frac{p_{2f}}{m_2}.$$

Alternativamente, podemos calcular o módulo de $\mathbf{v}_2$ e o ângulo θ algebricamente decompondo a equação vetorial nas suas componentes x e y , como na equação (8). Para isto, primeiramente é conveniente fazer uma lista das variáveis conhecidas:

$$m_1 = 5 \text{ kg} \quad m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$u_{1x} = 16 \text{ m/s} \quad u_{2x} = 0$$

$$u_{1y} = 0 \quad u_{2y} = 0$$

$$v_{1x} = 12 \cos 30^\circ = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$v_{1y} = 12 \sin 30^\circ = 12 \frac{1}{2} = 6 \text{ m/s}$$

Temos então:

$$\text{Direção } x: \quad 80 = 30\sqrt{3} + 3v_{2x}$$

$$\text{Direção } y: \quad 0 = 30 + 3v_{2y}$$

De onde obtemos

$$v_{2x} = \frac{80 - 30\sqrt{3}}{3} \approx 9,3 \text{ m/s}$$

$$v_{2y} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ m/s}$$

e

$$v_2 = [(9,3)^2 + (10)^2]^{1/2} \approx 13,6 \text{ m/s}.$$

A direção de $\mathbf{v}_2$ forma um ângulo θ com o eixo x tal que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{10}{9,3} \Rightarrow$$
$$\theta \approx -47^\circ.$$

Note que o resultado acima foi obtido com base apenas na conservação do momento linear; nenhum outro conhecimento acerca da interação entre os dois corpos foi necessário. Na próxima seção, vamos relacionar as mudanças nos momentos lineares das partículas envolvidas em uma colisão às forças que atuam durante a colisão.

5 Ação, reação e impulso

Nesta seção, faremos uma discussão do processo de colisão seguindo a abordagem que o próprio Newton utilizou nos *Principia*. Uma das coisas que faremos aqui será mostrar que a terceira lei de Newton pode ser deduzida a partir da lei de conservação do momento linear. Espero que isto seja instrutivo para vocês.

Uma colisão é um processo que envolve dois corpos, sendo que cada um deles exerce uma força sobre o outro. O corpo 1 exerce uma força $\mathbf{F}_{12}$ sobre o corpo 2 e o corpo 2 exerce uma força $\mathbf{F}_{21}$ sobre o corpo 1 (Figura 9).

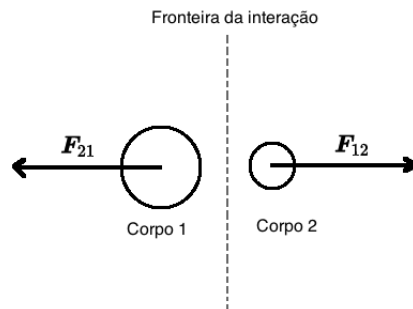


Figura 9: Esquema genérico de uma colisão entre dois corpos mostrando as forças que cada um faz sobre o outro.

Não faremos nenhuma hipótese a respeito da relação entre as forças, exceto que elas atuam durante o mesmo tempo. Esta é uma hipótese razoável,

pois sabemos que as forças aparecem como resultado da colisão e, seguramente, ela deve ter a mesma duração para os dois corpos.

Aplicando a cada corpo separadamente a equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, obtemos:

$$\mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{12} = m_2\mathbf{a}_2,$$

de onde tiramos as acelerações,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2}.$$

Vamos supor, para simplificar nossa linha de raciocínio presente, que cada força permanece constante por toda a colisão e que a duração da colisão é Δt . Então, usando a mesma notação adotada anteriormente de representar a velocidade antes da colisão por $\mathbf{u}$ e a velocidade depois da colisão por $\mathbf{v}$, podemos escrever:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2}{\Delta t}.$$

Igualando as expressões acima para as acelerações,

$$\frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2},$$

de onde podemos escrever as velocidades dos dois corpos depois da colisão como:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t = \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1}\Delta t \quad (9)$$

e

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{a}_2\Delta t = \mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2}\Delta t. \quad (10)$$

Multiplicando (9) por m_1 e (10) por m_2 :

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{F}_{21}\Delta t \quad (11)$$

e

$$m_2\mathbf{v}_2 = m_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{F}_{12}\Delta t. \quad (12)$$

Somando (11) e (12), obtemos:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12})\Delta t. \quad (13)$$

Vamos assumir como um fato *experimental* que a lei de conservação do momento linear (equação (7)) é válida. Portanto, decorre da equação (13) que,

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

ou seja,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (14)$$

Esta é a terceira lei de Newton (*ação e reação são iguais e opostas*), deduzida aqui a partir da lei de conservação do momento linear tomada como um fato experimental.

Newton, ao discutir situações dinâmicas em que as forças mudam de momento para momento, deixou bem claro nos *Principia* que ele considerava a terceira lei (equação (14)) como uma *inferência* a partir das observações.

Retornando às equações (11) e (12), podemos reescrevê-las em termos das variações dos momentos lineares dos dois corpos que colidem:

$$m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{u}_1 = \Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{21} \Delta t$$

e

$$m_2 \mathbf{v}_2 - m_2 \mathbf{u}_2 = \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{12} \Delta t.$$

Quando falamos da segunda lei na Aula 8, mencionamos que Newton a escreveu em termos da variação no momento linear ($\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$) ao invés de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Também definimos o *impulso* de uma força $\mathbf{F}$ em um tempo Δt pelo produto $\mathbf{F}\Delta t$. Se a força $\mathbf{F}$ variar em módulo e/ou direção durante o período Δt , podemos tomar o limite das equações acima para tempos infinitesimalmente pequenos e obter a equação:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (15)$$

A equação (15), escrita sob a hipótese de que $\mathbf{F}$ é a força total que atua sobre uma partícula, é a equação fundamental da dinâmica newtoniana.

Em certo sentido, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ possui um escopo mais amplo que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ou pelo menos tem uma formulação mais eficiente. Por exemplo, uma dada força $\mathbf{F}$ aplicada sucessivamente a corpos de massas diferentes produzirá em todos a mesma taxa de variação do momento linear (pois $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ para todos), mas não a mesma aceleração (pois a aceleração de cada um dependerá da massa como $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$).

Em resumo, podemos concluir que o momento linear é uma quantidade de importância singular em mecânica. De fato, a conservação do momento linear para um sistema isolado de partículas é uma das propriedades básicas para o estudo de partículas interagentes.

Na discussão feita acima, tomamos as forças de interação entre os dois corpos como constantes ao longo do tempo. Em geral, esta não é uma hipótese realista. Porém, isto não invalida os resultados obtidos, pois pode-se obter a variação total do momento linear causada por uma força variável no tempo pela integração da equação (15).

Vamos supor que a força $\mathbf{F}$ sobre uma partícula durante a colisão varie de alguma maneira arbitrária com o tempo entre $t = 0$ e $t = \Delta t$. Então, a variação no momento linear da partícula provocada pela força é,

$$\Delta \mathbf{p} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt. \quad (16)$$

Em uma colisão entre dois corpos de duração Δt , tudo o que observamos é que o momento linear total antes da colisão é igual ao momento linear total depois da colisão. Isto pode ser expresso como:

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \Rightarrow \mathbf{p}_{1f} - \mathbf{p}_{1i} = -(\mathbf{p}_{2f} - \mathbf{p}_{2i}) \Rightarrow \Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2.$$

Substituindo (16) na igualdade acima:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{21}(t) dt = - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12}(t) dt. \quad (17)$$

Em princípio, nada impede que as variações temporais de $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{21}$ sejam completamente descorrelacionadas ao longo do tempo Δt , desde que as integrais em (17) sejam iguais. Porém, parece razoável assumir que elas são iguais e opostas a cada instante. Por exemplo, em uma colisão unidimensional é razoável assumir que os gráficos de F_{12} e F_{21} em função do tempo são imagens especulares um do outro, como ilustrado na Figura 10.

É importante que fique claro, no entanto, que isto é um postulado e que ele *nem sempre é verdadeiro*. Para forças de contato como as que ocorrem em uma colisão, ele provavelmente é sempre válido. Porém, em situações em que os dois corpos influenciam um ao outro à distância, como ocorre quando

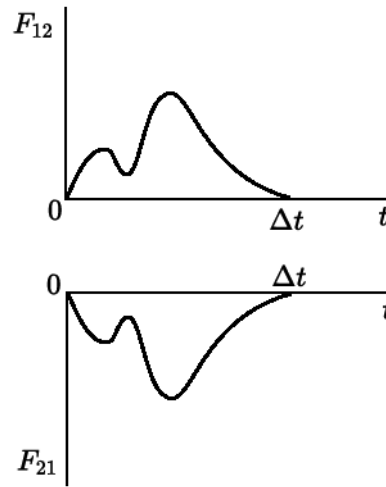


Figura 10: Variações temporais das forças de ação e reação durante o transcurso de uma colisão.

eles interagem entre si por forças de longo alcance como a gravitacional e a eletromagnética, a terceira lei de Newton pode deixar de ser aplicável.

Se a interação não é transmitida instantaneamente e se o tempo de propagação não pode ser ignorado em comparação com a escala de tempo dos movimentos dos corpos, o conceito de ação e reação instantâneas não pode mais ser utilizado.

Um modelo mecânico simples serve para ilustrar isso (Figura 11). Considere um carrinho, A , equipado com uma metralhadora que dispara um feixe de balas, cada uma com velocidade V . A uma distância L do carrinho está um segundo carrinho, B , em que há um bloco onde as balas ficam incrustadas quando o atingem. Suponha que o momento linear de cada bala seja bem grande devido ao alto valor de V , mas que a massa individual de cada uma seja muito pequena. Então, quando uma bala disparada por A atinge B , a transferência de momento linear de A para B é grande, mas a transferência de massa é desprezível. Suponha também que as balas disparadas sejam invisíveis a um observador a uma certa distância (e que ele não possa ouvir os sons dos disparos porque a metralhadora está equipada com um silenciador).

Então, se uma breve rajada de balas é disparada por A , o observador distante verá um recuo do carrinho A , aparentemente espontâneo, sem perceber nenhum movimento no carrinho B . Apenas após um tempo $t = L/V$ o observador verá o movimento de B na direção oposta à do recuo de A .

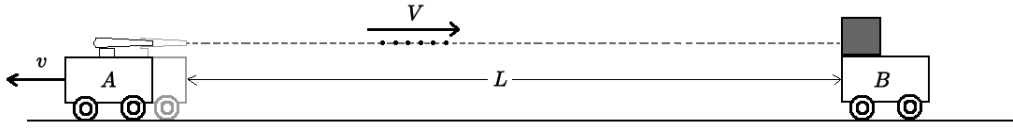


Figura 11: Exemplo de interação com atraso temporal. O atraso é devido ao tempo $t = L/V$ que as balas disparadas por A levam para chegar a B .

Há, efetivamente, uma quebra da igualdade entre ação e reação neste caso. Após o término da interação entre os dois carrinhos, quando todas as balas disparadas por A tiverem sido absorvidas por B , o observador reconhecerá que o momento linear foi, de fato, conservado. Porém, durante os disparos, como o observador enxerga apenas os carrinhos, o momento linear não parecerá ser conservado, instante a instante, durante a interação.

Este exemplo pode parecer artificial, pois pode-se constatar que o princípio de ação e reação continua, no fundo, válido observando-se os carrinhos mais de perto a ponto de enxergar as balas disparadas. Apesar disso, ele possui um paralelo interessante com as chamadas interações retardadas no eletromagnetismo. Sabemos que a interação entre duas partículas carregadas separadas por uma certa distância se dá através do campo eletromagnético produzido por elas, e que a propagação desse campo ocorre com a velocidade da luz, a qual, embora muito alta, é finita.

Imagine que as duas cargas estão inicialmente paradas, mas de repente uma se move. A alteração no campo produzida pelo movimento da carga levará um tempo até chegar à outra carga e, portanto, esta reagirá com atraso ao movimento da primeira. Uma observadora, que só enxerga as partículas mas não o campo, verá uma súbita alteração no momento linear da primeira partícula sem que haja, ao mesmo tempo, uma mudança igual e oposta no momento linear da segunda partícula. Parecerá à observadora que há uma quebra da lei da conservação do momento linear, instante a instante, a menos que a observadora associe um certo valor de momento linear ao campo eletromagnético que carrega a interação entre as cargas. É precisamente isto que faz a teoria do eletromagnetismo!

A analogia com o exemplo mecânico dos carrinhos dado acima torna-se ainda mais vívida quando se introduz a quantização do campo eletromagnético, o que permite a descrição da interação eletromagnética como sendo carregada pelos quanta do campo, os fótons. Ao associarmos um certo valor de momento linear e de energia a cada fóton individual, teremos uma des-

crição da interação eletromagnética entre duas partículas carregadas muito próxima da do modelo mecânico dos carrinhos que interagem por meio de balas disparadas de um para o outro.