

Aplicações das leis de Newton - Parte II

Antônio Roque

Outubro 2021

Nesta aula, continuaremos a ver exemplos de aplicações das leis de Newton.

1 Movimento circular

Consideremos inicialmente o caso mais simples de movimento circular, aquele em que um corpo de massa m se move em uma trajetória circular de raio r com velocidade de módulo constante v . Podemos imaginar uma situação como esta considerando um corpo com a forma de disco sobre uma mesa de ar, de maneira que o atrito torna-se desprezível. O corpo é preso a um fio que está fixado em sua outra extremidade a um pino e, com o fio esticado, imprime-se ao corpo uma velocidade arbitrária numa direção que forma um ângulo reto com o fio (veja a Figura 1).

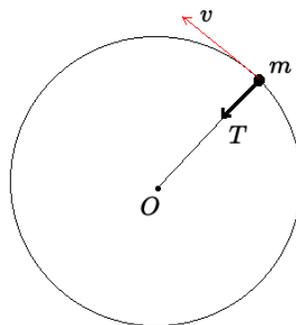


Figura 1: Esquema básico de uma partícula movendo-se em uma trajetória circular com velocidade constante em módulo.

Neste caso, como visto na Aula 5, a aceleração do corpo está dirigida para o centro do círculo e seu módulo é v^2/r . Chamamos esta aceleração de *aceleração centrípeta*. Pela segunda lei de Newton, a existência da aceleração centrípeta implica na existência de uma força correspondente, cujo módulo vale

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}. \quad (1)$$

No caso simples que estamos considerando, ilustrado na Figura 1, a única força atuando sobre o corpo é a tensão \mathbf{T} feita pelo fio esticado. Logo, a força centrípeta neste caso é a tensão do fio.

Se o fio não for suficientemente forte para proporcionar uma força com a magnitude necessária, ele se romperá e o corpo, estando agora livre de forças (pelo menos no plano de movimento), seguirá adiante sem fazer a curva. Ele “sairá pela tangente”.

Um exemplo de importância prática desse tipo de movimento é o de um carro fazendo uma curva. Suponha que uma curva em uma estrada tenha raio de curvatura r , medida no plano horizontal como mostrado na Figura 2(a).

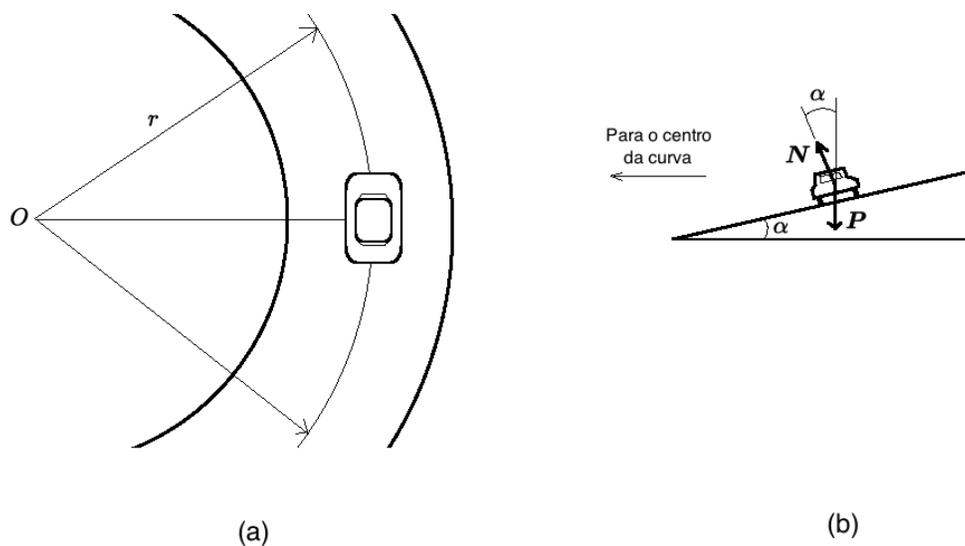


Figura 2: Carro fazendo uma curva em uma estrada. (a) Vista de cima. (b) Vista de um ponto à frente do carro. O diagrama de forças no caso (b) supõe que não há atrito entre os pneus do carro e a pista.

Antes de entrarmos na discussão deste problema prático, é importante

que vocês entendam o que faz um carro andar por uma estrada a partir do repouso. Vocês podem responder dizendo que é o motor do carro e, em parte, estarão certos. Mas o motor faz apenas as rodas do carro girarem. O que faz com que, de fato, o carro se mova é o *atrito* entre seus pneus e o asfalto da pista. Se não houvesse atrito, as rodas do carro girariam sobre o asfalto sem impulsionar o carro. Veja a Figura 3 e o texto na legenda.

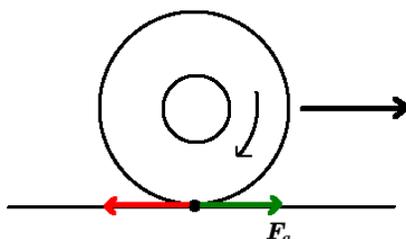


Figura 3: Ilustração de um pneu de um carro quando este anda para a frente a partir do repouso em uma estrada. O motor faz a roda girar no sentido horário como indicado. No ponto de contato entre o pneu e a pista, o pneu faz uma força sobre a pista indicada em vermelho e a pista faz uma força de reação sobre o pneu (e todo o carro) indicada em verde. Esta é a força de atrito F_a entre o pneu e a pista e é ela que impulsiona o carro para a frente.

Voltemos agora ao estudo do problema de um carro fazendo uma curva em uma estrada. Se o carro faz a curva com uma certa velocidade constante v , ele tem aceleração centrípeta v^2/r .

Consideremos inicialmente o caso em que a pista é plana, isto é, não possui inclinação. Para que o carro faça a curva, o motorista deve girar a direção fazendo as rodas se alinharem com a tangente à curva em cada ponto dela. O que faz com que o carro faça a curva neste caso? Novamente é o atrito entre os pneus e a pista. Se não houvesse atrito, por exemplo, se a pista estivesse coberta de gelo, por mais que o motorista girasse a direção o carro não faria a curva e continuaria em linha reta. Isto seria uma derrapagem.

Quando há atrito, por causa da força de contato entre os pneus e o piso a mudança na orientação das rodas do carro é eficaz em produzir uma alteração na direção da velocidade do carro. Como vimos na Aula 5 (veja a discussão associada à Figura 12 daquela aula), a alteração Δv na direção da velocidade de um corpo que se move em trajetória circular aponta na direção do centro (é a aceleração centrípeta). A força que provoca esta mudança Δv na velocidade

do carro é a força de atrito. As outras forças atuando sobre o carro, a normal \mathbf{N} e a força peso \mathbf{P} , são puramente verticais e não influenciam o movimento do carro no plano. Como a força centrípeta é a força de atrito, podemos escrever

$$F_a = F_{cp} = \frac{mv^2}{r}. \quad (2)$$

A direção desta força é radial e o seu sentido aponta para o centro O do círculo indicado na Figura 2(a).

Note uma coisa importante aqui. O papel da força de atrito quando o carro faz a curva não é mover o carro adiante como no exemplo da Figura 3. Quando o carro entra na curva, ele já está em movimento com velocidade v e sua tendência, pela primeira lei de Newton, é continuar seu movimento em linha reta. O papel da força de atrito neste caso (que é o papel da força centrípeta) é o de mudar a direção da velocidade do carro a cada instante. Embora ela aponte na direção radial, ela não faz o carro se mover nessa direção.

Como o carro não se move na direção radial quando faz a curva, a força de atrito que tem que ser considerada neste caso é a força de atrito estático. Vimos na Aula 7 que o valor máximo dessa força é proporcional ao módulo da força normal N ,

$$F_a = F_{e,\max} = \mu_e N.$$

Substituindo esta expressão em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_e N = \frac{mv^2}{r} &\Rightarrow \mu_e mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \\ v &= \sqrt{rg\mu_e}. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta é a máxima velocidade com a qual um carro consegue fazer a curva em uma estrada plana sem derrapar.

Note que a velocidade v não depende da massa m do carro. Ela depende do produto de três grandezas: a aceleração da gravidade g , o raio de curvatura r da curva e o coeficiente de atrito estático μ_e entre os pneus e o asfalto. A aceleração da gravidade não pode ser alterada, mas o raio r e o coeficiente de atrito μ_e sim.

Por exemplo, para um raio de curvatura r fixo, se o coeficiente de atrito μ_e for reduzido, por exemplo numa situação de chuva, a velocidade máxima tem que ser reduzida. Por outro lado, para um coeficiente de atrito μ_e fixo, uma curva com raio de curvatura grande (curva aberta) permite uma velocidade

mais alta que uma curva com raio de curvatura pequeno (curva fechada). Veja um exemplo deste último caso na Figura 4.

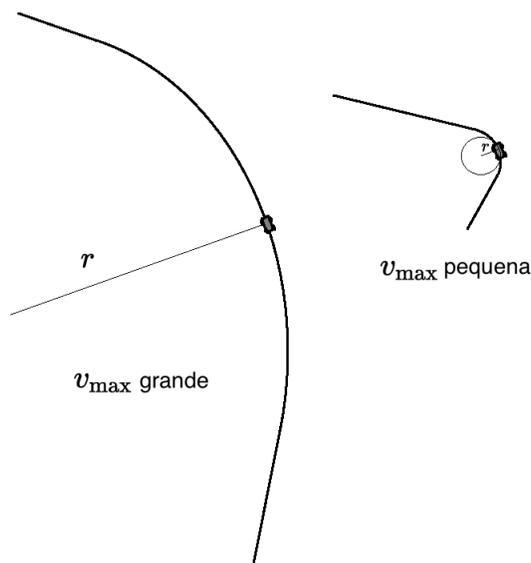


Figura 4: Carro fazendo duas curvas em uma pista plana. A curva da esquerda tem raio de curvatura grande e a curva da direita tem raio de curvatura pequeno. A velocidade máxima com a qual o carro pode fazer a curva sem derrapar é maior para a curva da esquerda do que para a curva da direita.

Vamos considerar agora o caso em que a curva tem inclinação de um ângulo α , como na Figura 2(b). O propósito de inclinar a curva é tornar desnecessária a existência de atrito entre os pneus do carro e a pista para que o carro faça a curva. Neste caso, mesmo que não haja atrito, a força normal exercida pela pista sobre o carro tem uma componente apontando para o centro. Esta é a força centrípeta quando não há atrito e ela permite que o carro faça a curva a uma velocidade específica v sem que o motorista precise girar a direção.

Vamos calcular o valor da velocidade v com a qual o carro pode fazer a curva no caso sem atrito (caso ideal) mostrado na Figura 2(b). Separando as forças nas suas componentes vertical e horizontal e aplicando a segunda lei de Newton, obtemos:

$$\begin{aligned} N \sin \alpha &= \frac{mv^2}{r} \\ N \cos \alpha - P &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo P por mg e isolando α , obtemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}. \quad (5)$$

Com esta equação, pode-se determinar o ângulo de inclinação α que permita ao carro fazer uma curva de raio r com uma velocidade v dada. Alternativamente, dados o raio de curvatura r e o ângulo de inclinação α , a equação (4) determina a velocidade v com a qual o carro deve fazer a curva:

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg}\alpha}. \quad (6)$$

Note que, assim como na equação (3), as equações (5) e (6) não dependem da massa m do carro. Ou seja, elas valem para qualquer tipo de veículo.

É importante entender o significado da equação (6), lembrando que ela foi obtida para o caso ideal sem atrito. Dada uma curva com raio de curvatura r e inclinação α , numa situação sem atrito, por exemplo, se a pista estiver coberta de gelo, o carro precisa estar *exatamente* com a velocidade v dada em (6) para fazer a curva. Parece estranho que um carro consiga fazer uma curva em uma pista sem atrito, mas se ele estiver exatamente com a velocidade especificada em (6) ele a fará, pois a componente horizontal da força normal fornecerá a força centrípeta necessária.

Vamos chamar v dada por (6) de v_{ideal} . O que acontece quando o carro tenta fazer a curva com v maior ou menor que v_{ideal} ?

Se $v > v_{\text{ideal}}$, a componente horizontal da força normal é *menor* que a força centrípeta requerida para manter o carro na trajetória curva. Veja novamente as equações (4): como a massa do carro e o ângulo de inclinação não mudam, $N \operatorname{sen}\alpha$ permanece com o mesmo valor que tinha antes ($\frac{mv_{\text{ideal}}^2}{r}$). Como $v > v_{\text{ideal}}$, este valor é menor que o que seria necessário ($\frac{mv^2}{r}$) para manter o carro na trajetória curva. O resultado é uma derrapagem em que o carro subirá pela pista inclinada.

Se $v < v_{\text{ideal}}$, a componente horizontal da força normal é *maior* que a força centrípeta requerida para manter o carro na trajetória curva: $N \operatorname{sen}\alpha = \frac{mv_{\text{ideal}}^2}{r} > \frac{mv^2}{r}$. O excesso de força na direção horizontal para dentro faz com que o carro derrape novamente, só que neste caso descendo pela pista inclinada.

No caso real (não ideal), o que faz com que o carro não derrape pela pista inclinada quando faz a curva com velocidade maior ou menor que v_{ideal} é o atrito que existe entre a pista e os pneus. Quando $v > v_{\text{ideal}}$, o carro tende a

deslizar subindo pela pista; portanto, ele adquire uma componente de velocidade radial apontando para a parte superior da pista. Para contrabalançar essa tendência de movimento para cima, surge uma força de atrito apontando para baixo como mostrado na Figura 5(a). Por outro lado, quando $v < v_{\text{ideal}}$, o carro tende a deslizar descendo pela pista; ele adquire uma componente de velocidade radial apontando para baixo. A força de atrito que surge neste caso para contrabalançar o deslizamento do carro para baixo aponta para cima da pista, como mostrado na Figura 5(b).

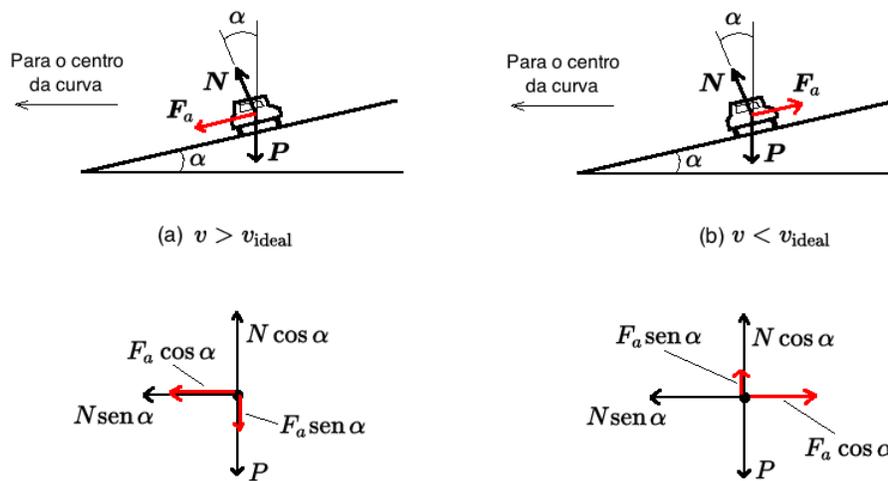


Figura 5: Carro fazendo a curva no caso em que há atrito entre os pneus e a pista. (a) $v > v_{\text{ideal}}$. (b) $v < v_{\text{ideal}}$. As figuras na parte de baixo mostram os diagramas de forças para os dois casos.

Vamos analisar os dois casos separadamente:

(a) $v > v_{\text{ideal}}$.

Pelo diagrama de forças na parte de baixo da Figura 5(a), temos:

$$F_a \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha = \frac{mv^2}{r}$$

$$N \cos \alpha - P - F_a \operatorname{sen} \alpha = 0.$$

Substituindo $P = mg$ e $F_a = F_{a,\text{max}} = \mu_e N$, que é a expressão para a força de atrito estático máxima (pois, se o carro não derrapa, ele não se move para

cima ou para baixo da pista):

$$\begin{aligned}\mu_e N \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha &= \frac{mv^2}{r} \\ N \cos \alpha - mg - \mu_e N \operatorname{sen} \alpha &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

A segunda das equações (7) nos dá,

$$N(\cos \alpha - \mu_e \operatorname{sen} \alpha) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu_e \operatorname{sen} \alpha}.\tag{8}$$

A primeira coisa que a equação (8) nos diz é que há um valor máximo para o ângulo α , dependente do coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto da pista. Para que o denominador na equação (8) seja positivo, devemos ter

$$\cos \alpha - \mu_e \operatorname{sen} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\mu_e}.$$

Por exemplo, pesquisando na internet vemos que o coeficiente de atrito estático entre a borracha e o asfalto seco é $\mu_e = 0,68$. Então,

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{0,68} = 1,47 \Rightarrow \alpha < 55,8^\circ.$$

Na prática, os ângulos de inclinação das curvas em estradas e pistas de corrida são bem menores que este. Por exemplo, o maior ângulo de inclinação das pistas de NASCAR (competições de corrida de stock-cars nos Estados Unidos) é o do circuito oval de Talladega no Alabama, cujo valor é $\alpha = 36^\circ$.

A segunda coisa que a equação (8) nos diz é que a força normal N é maior no caso com atrito do que no caso sem atrito (em que $\mu_e = 0$). Podemos entender isto olhando para o diagrama de forças na parte inferior da Figura 5(a). Existem duas forças apontando na direção negativa do eixo y : a força peso P e a componente $F_a \operatorname{sen} \alpha$ da força de atrito. Portanto, a normal N tem que ser maior do que no caso sem atrito para equilibrar essas duas forças.

Substituindo (8) na primeira das equações (7), obtemos:

$$\begin{aligned}mg \frac{(\mu_e \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{(\cos \alpha - \mu_e \operatorname{sen} \alpha)} &= \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \\ v^2 &= rg \frac{(\mu_e \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{(\cos \alpha - \mu_e \operatorname{sen} \alpha)} = rg \frac{(\mu_e \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha (1 - \mu_e \operatorname{tg} \alpha)} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{rg \left(\frac{\mu_e + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu_e \operatorname{tg}\alpha} \right)}. \quad (9)$$

Esta é a velocidade máxima com a qual um carro pode passar por uma pista inclinada com atrito sem derrapar para a parte de cima da pista.

Como exemplo de aplicação de (9), consideremos o caso da curva de maior inclinação do circuito de Talladega mencionado acima. Qual a máxima velocidade com que um carro pode correr pela curva sem derrapar para cima? Pesquisando na internet, vemos que o raio de curvatura da curva de Talladega é $r = 335,3$ m. Substituindo este valor, juntamente com $\alpha = 36^\circ$, $\mu_e = 0,68$ e $g = 9,8$ m/s² na equação (9), obtemos

$$v = 95,5 \text{ m/s} = 343,8 \text{ km/h} = 213,6 \text{ mi/h}.$$

Consultando informações na internet, vemos que é comum carros de corrida andarem com velocidades acima de 200 mi/h no circuito de Talladega. Na realidade, vemos que o recorde de velocidade na curva é de 216,309 mi/h, um pouco acima do valor calculado. Isto sugere que o coeficiente de atrito μ_e entre os pneus do carro que estabeleceu o recorde e a pista era maior que 0,68 (pois v cresce com μ_e como pode ser visto em (9)).

(b) $v < v_{\text{ideal}}$.

Pelo diagrama de forças na parte de baixo da Figura 5(b), temos:

$$\begin{aligned} N \operatorname{sen}\alpha - F_a \cos\alpha &= \frac{mv^2}{r} \\ N \cos\alpha + F_a \operatorname{sen}\alpha &= P. \end{aligned}$$

Substituindo $P = mg$ e $F_a = F_{a,\max} = \mu_e N$ nestas equações:

$$\begin{aligned} N(\operatorname{sen}\alpha - \mu_e \cos\alpha) &= \frac{mv^2}{r} \\ N(\cos\alpha + \mu_e \operatorname{sen}\alpha) &= mg. \end{aligned} \quad (10)$$

A segunda das equações (10) nos dá o valor da normal N para este caso,

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu_e \operatorname{sen}\alpha}. \quad (11)$$

Note que agora N é menor do que no caso sem atrito e isto pode ser entendido observando o diagrama de forças na parte inferior da Figura 5(b).

Como existe uma componente da força de atrito atuando ao longo da direção positiva do eixo y , a normal N não precisa ser tão grande quanto no caso sem atrito para equilibrar a força peso P .

Substituindo (11) na primeira das equações (10), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}g \frac{\operatorname{sen}\alpha - \mu_e \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_e \operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\mathcal{M}v^2}{r} \Rightarrow \\ g \frac{\operatorname{sen}\alpha - \mu_e \cos\alpha}{\cos\alpha(1 + \mu_e \operatorname{tg}\alpha)} &= \frac{v^2}{r} \Rightarrow g \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu_e}{1 + \mu_e \operatorname{tg}\alpha} \right) = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \\ v &= \sqrt{rg \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu_e}{1 + \mu_e \operatorname{tg}\alpha} \right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Esta é a velocidade mínima com a qual um carro pode passar por uma curva inclinada com atrito sem derrapar para a parte de baixo da curva.

Tomando novamente como exemplo prático o circuito de Talladega, com sua curva de inclinação 36° e raio de curvatura $r = 335,3$ m, e usando $\mu_e = 0,68$ e $g = 9,8$ m/s², temos que a velocidade mínima com que um carro pode passar pela curva sem deslizar para baixo é

$$v = 10,5 \text{ m/s} = 37,5 \text{ km/h} = 23,5 \text{ mi/h}.$$

Note que para ângulos de inclinação α tais que $\operatorname{tg}\alpha < \mu_e$ o termo dentro da raiz quadrada no lado direito da equação (12) torna-se negativo, levando a um resultado sem significado físico. Isto significa que quando $\operatorname{tg}\alpha < \mu_e$ não há limite inferior para a velocidade com a qual um carro pode fazer a curva sem derrapar. Mesmo que a velocidade seja infinitesimalmente baixa ($v \rightarrow 0$), o carro consegue fazer a curva sem deslizar para baixo. Por exemplo, se $\mu_e = 0,68$ um carro consegue fazer a curva com velocidade próxima de zero em qualquer curva com ângulo de inclinação igual ou menor que $34,2^\circ$. Já se $\mu_e = 0,4$ (um caso hipotético imaginando asfalto molhado e pneus gastos), o menor ângulo de inclinação para que $v \rightarrow 0$ cai para $21,8^\circ$.

2 Movimento curvilíneo com velocidade variável

Se a velocidade de uma partícula muda enquanto ela se move em uma trajetória circular, a partícula tem, além da aceleração centrípeta dirigida para o

centro do círculo, uma componente de aceleração tangente à trajetória. Essa componente tangencial da aceleração representa a variação do *módulo* do vetor velocidade da partícula. A componente centrípeta da aceleração, por outro lado, representa a taxa de variação da *direção* do vetor velocidade.

As equações relevantes para a descrição desse tipo de movimento foram deduzidas na Aula 5 (veja as equações (47)–(51)). Em particular, a equação (50) daquela aula nos dá a expressão para o vetor aceleração da partícula:

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (13)$$

onde o sinal de menos que multiplica o termo v^2/r indica que a componente radial da aceleração aponta para o centro da trajetória circular. É por isso que ela é chamada de aceleração centrípeta. Já a outra componente da aceleração, que aponta na direção tangente ao círculo, é chamada de aceleração tangencial. Lembrando da Aula 5, as componentes a_r e a_θ constituem também as componentes do vetor \mathbf{a} em coordenadas polares. A Figura 6 mostra esses vetores.

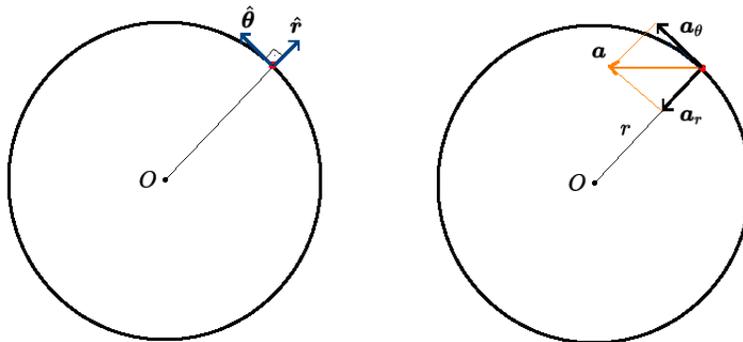


Figura 6: Movimento circular de uma partícula com velocidade variável. A figura da esquerda mostra os vetores unitários do sistema de coordenadas polares. Note que eles se movem junto com a partícula. A figura da direita mostra os vetores aceleração radial (\mathbf{a}_r) e tangencial (\mathbf{a}_θ) da partícula, assim como o vetor resultante da soma vetorial desses dois vetores, que é o vetor aceleração \mathbf{a} (em laranja).

A situação pode ser tratada mais facilmente se considerarmos as componentes radial e transversal da aceleração separadamente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Componente radial da} \\ \text{aceleração (perpendicular} \\ \text{à trajetória)} \end{array} \right\} = a_r = -\frac{v^2}{r} \quad (r \text{ é o raio do círculo})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Componente tangencial} \\ \text{da aceleração (tangente} \\ \text{à trajetória)} \end{array} \right\} = a_\theta = \frac{dv}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{(corresponde somente} \\ \text{à variação do módulo} \\ \text{da velocidade)} \end{array}$$

Com apenas algumas pequenas reinterpretações, podemos usar esses resultados para descrever o movimento de uma partícula ao longo de qualquer trajetória curvilínea arbitrária. Para cada ponto dessa trajetória, podemos associar um centro e um raio de curvatura como mostrado na Figura 7 (os quais variam à medida que a partícula se desloca pela trajetória).

Desde que interpretemos os símbolos r e v como representando os valores *instantâneos* do raio de curvatura e do módulo da velocidade da partícula, as expressões acima para um movimento circular continuam sendo válidas para um movimento curvilíneo arbitrário. Elas nos dão as componentes instantâneas da aceleração – tangente e normal à trajetória – de um movimento curvilíneo geral. Neste caso, normalmente as duas componentes da aceleração da partícula são chamadas de *aceleração tangencial*, \mathbf{a}_t , e *aceleração normal*, \mathbf{a}_n , como indicado na Figura 8.

Esta notação é em tudo equivalente àquela usada para uma partícula cuja trajetória é um círculo. O vetor aceleração da partícula é dado por,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad (14)$$

com as direções e sentidos de \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_n como mostradas na Figura 8 e seus módulos dados por, respectivamente,

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (15)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (16)$$

onde r é o raio de curvatura da trajetória curvilínea no ponto em que a partícula está. O módulo da aceleração da partícula é

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (17)$$

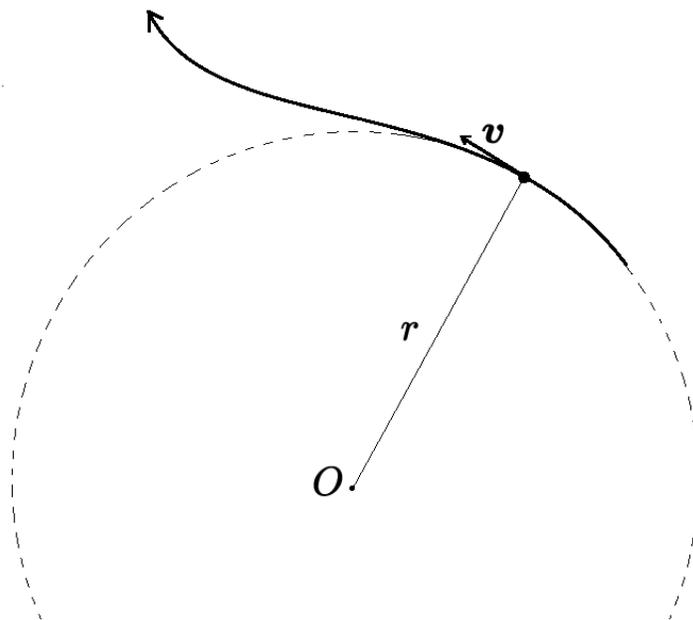


Figura 7: Partícula descrevendo uma trajetória curvilínea arbitrária. Para cada ponto da trajetória, pode-se fazer passar pela trajetória um círculo de raio r centrado em um ponto O . O ponto O é chamado de *centro de curvatura* e o raio r é chamado de *raio de curvatura* da trajetória no ponto em questão. Em geral, O e r variam de ponto a ponto.

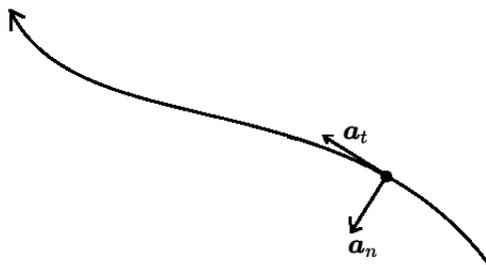


Figura 8: Componentes da aceleração de uma partícula que descreve uma trajetória curvilínea arbitrária.

Um exemplo simples para ajudar você a visualizar um movimento curvilíneo com velocidade variável é o seguinte. Imagine uma partícula de pó sobre um disco de vinil em uma vitrola¹. A partícula tem massa m e está a uma distância r do centro do disco. Quando a vitrola é ligada e o disco começa a girar, há um intervalo de tempo entre a saída do repouso e o instante em que o disco passa a girar com velocidade angular constante, que indicaremos por $\bar{\omega}$. A duração desse intervalo é tão curta que o disco não chega a completar uma volta inteira antes de entrar no regime estacionário. Portanto, durante este breve intervalo de tempo a trajetória descrita pela partícula de pó é um arco de circunferência de raio r e a sua velocidade varia no percurso, desde zero até $v_{final} = \bar{\omega}r$.

O vetor aceleração da partícula de pó é como o mostrado na parte da direita da Figura 6 (vetor \mathbf{a} em laranja). O módulo da aceleração é $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ e, pela segunda lei, a força correspondente tem módulo

$$ma = m\sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Qual a origem desta força? Mais uma vez, é o atrito estático entre o disco e a partícula de pó, pois a partícula não se move em relação ao disco. Caso o atrito entre o disco e a partícula de pó não seja capaz de fornecer uma força com esse módulo, o movimento circular da partícula de pó não é possível e ela desliza sobre a superfície do disco.

Vamos analisar com um pouco mais de detalhe este problema. Para simplificar, vamos supor que a aceleração tangencial a_t da partícula é constante. A aceleração normal (que é a centrípeta) não é constante. Ela é dada por

$$a_n = \frac{v^2(t)}{r} = \omega^2(t)r.$$

Note que escrevemos explicitamente $v(t)$ e $\omega(t)$ para deixar claro que estamos considerando o intervalo de tempo antes de o disco entrar em rotação com velocidade angular constante $\bar{\omega}$. Para estudar este problema, é mais conveniente usar a expressão para a_n em termos da velocidade angular $\omega(t)$ do disco. Em termos dela, o módulo da força de atrito estático necessária para manter a partícula de pó sem deslizar sobre o disco enquanto o disco se movimenta é,

$$F_a = m\sqrt{a_t^2 + \omega^4(t)r^2}.$$

¹O uso do termo “vitrola” aqui indica a idade do professor.

Como esta é a força de atrito estático, sabemos que seu valor máximo é dado por

$$F_{a,\max} = \mu_e N = \mu_e mg.$$

Igualando as duas expressões:

$$\mu_e mg = m \sqrt{a_t^2 + \omega^4(t)r^2} \Rightarrow$$

$$\mu_e = \frac{1}{g} \sqrt{a_t^2 + \omega^4(t)r^2}.$$

Note que para um valor de r fixo, o lado direito da igualdade acima cresce com o aumento da velocidade angular $\omega(t)$ (o crescimento é rápido, pois vai com ω^4). Já o lado esquerdo é fixo; é o coeficiente de atrito estático entre a partícula de pó e o disco de vinil. Portanto, existe um valor limite para $\omega(t)$ acima do qual o atrito entre a partícula e o disco não consegue mais manter a partícula fixa na sua posição relativa em relação ao disco. Se este valor limite for menor ou igual ao valor estacionário $\bar{\omega}$, em algum momento antes de o disco atingir a velocidade angular uniforme $\bar{\omega}$ a partícula deslizará para fora do disco. Se o valor limite for maior, a partícula permanecerá na sua posição em relação ao disco depois que ele começar a girar com $\omega = \bar{\omega}$. Note também que quanto maior r , isto é, quanto mais próximo da borda do disco estiver a partícula, maior tem que ser o valor de μ_e para manter a partícula fixa em relação ao disco. Portanto, partículas distantes do centro do disco deslizam mais facilmente para fora dele do que partículas próximas ao centro.

Para uma demonstração desse efeito, veja os vídeos <https://youtu.be/WdcfWf07UIg> e <https://youtu.be/1G76HUvGyDE>, mas cuidado: a explicação dada para o fenômeno nos vídeos está incompleta, pois não menciona a componente tangencial da aceleração.

Supondo que a partícula de pó não deslizou para fora do disco enquanto a velocidade angular do disco variava, depois que o disco (e a partícula junto com ele) entra no regime de rotação estacionária a velocidade v da partícula torna-se constante. Consequentemente, a aceleração tangencial a_t da partícula desaparece e ela fica somente com a aceleração centrípeta. Enquanto o disco girar com velocidade angular constante ω , a partícula só terá aceleração centrípeta.

Outro exemplo interessante de movimento circular com velocidade variável é o da modalidade olímpica “lançamento de martelo”. Neste caso, um peso está preso a uma corda e um atleta a segura em sua outra extremidade

e a faz girar a partir do repouso com velocidade crescente até o momento de soltura. A corda cumpre duas funções aqui: (1) fornece a força tangencial necessária para aumentar a velocidade do corpo; e (2) fornece a força centrípeta de módulo $\frac{mv^2}{r}$ apontando para o centro da trajetória, necessária para que o corpo gire. Para cumprir esta dupla missão, o puxão feito pela corda deve “se adiantar” ao corpo, de forma que a tensão devida a ela tenha uma componente tangencial, como mostrado na Figura 9.

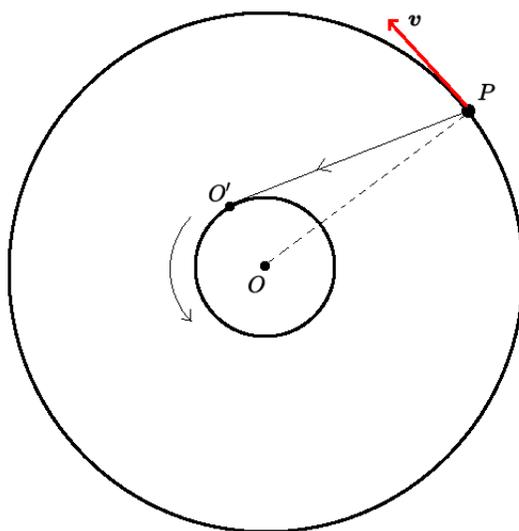


Figura 9: Esquema de um lançamento de martelo. A pessoa que lança o martelo está no ponto O . Com seu braço esticado, ela segura a corda em O' e começa a girar. A corda esticada está presa ao corpo em P e produz uma força sobre o corpo que tem componentes tangencial e centrípeta, fazendo o corpo rodar em torno de O .

3 Trajetórias circulares de partículas carregadas em campos magnéticos uniformes

Um dos exemplos mais importantes de movimento circular é o de partículas com carga elétrica em campos magnéticos. Você estudará campos magnéticos e sua interação com partículas carregadas em grande detalhe no curso de Física III. Para nossos propósitos aqui, precisamos apenas saber (é um fato

experimental) que quando uma partícula com carga q (positiva ou negativa) se move com velocidade \mathbf{v} em um campo magnético uniforme \mathbf{B} , a força que o campo magnético exerce sobre ela pode ser expressa matematicamente como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (18)$$

Quando falo que a força magnética sobre a partícula pode ser expressa “matematicamente” pela expressão (18), quero dizer que esta expressão matemática sintetiza todas as evidências experimentais que se têm a respeito dessa força, ilustradas na Figura 10.

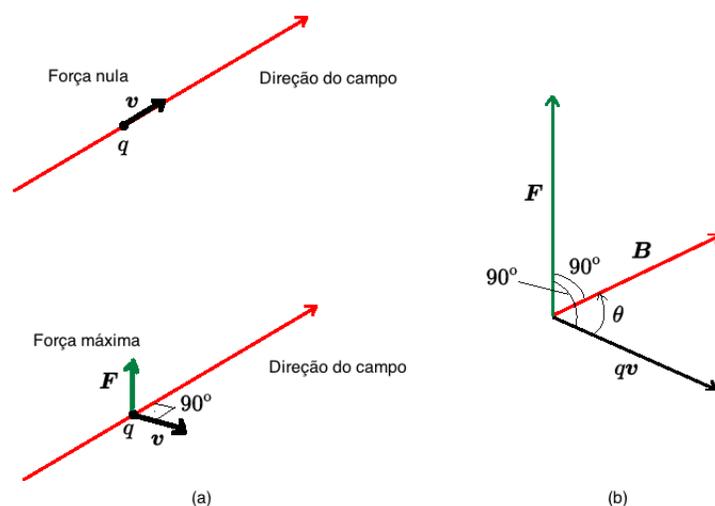


Figura 10: (a) Situações em que a força magnética sobre a partícula é nula e máxima. (b) Relações vetoriais genéricas entre a velocidade, o campo magnético e a força magnética.

Essas evidências experimentais são as seguintes:

1. A força é sempre perpendicular à direção da velocidade \mathbf{v} da partícula. Se o sentido da velocidade é invertido, o sentido da força também é invertido.
2. A força é proporcional ao valor da carga q da partícula. Se o sinal da carga é trocado, o sentido da força é invertido.
3. Para um valor de q e uma direção de \mathbf{v} dados, o valor da força é proporcional ao módulo de \mathbf{v} .

4. Se o movimento da partícula for paralelo à direção do campo magnético, a força é nula.
5. Para qualquer outra direção de movimento da partícula, a direção da força é perpendicular ao plano formado por \mathbf{v} e a direção do campo magnético \mathbf{B} .
6. Para valores dados de q e \mathbf{v} e para um campo magnético \mathbf{B} fixo, o valor da força é proporcional ao seno do menor ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{B} .

Com base na equação (18) pode-se definir quantitativamente uma medida para o campo magnético \mathbf{B} . Um campo magnético de valor unitário, aplicado normalmente ($\sin\theta = 1$) a uma carga de 1 C movendo-se com velocidade de 1 m/s, exerce sobre a partícula uma força de 1 N. A unidade de \mathbf{B} no S.I. é o tesla, em homenagem ao inventor e engenheiro sérvio-estadunidense Nikola Tesla (1856-1943).

Imaginemos agora uma partícula carregada, com carga q positiva, movendo-se no plano desta página (ou da tela do computador) e vamos supor que o campo magnético na região em que a partícula se move é perpendicular a esse plano e aponta para dentro dele. A situação está ilustrada na Figura 11(a). Na figura, usamos a representação “ \times ” para indicar que o campo magnético está entrando no plano da tela; se ele estivesse saindo do plano, usaríamos o símbolo “ \odot ”.

Qual é o tipo de movimento descrito pela partícula?

Pela equação (18), a força magnética \mathbf{F} sobre a partícula é perpendicular ao plano definido pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{B} . Imagine que o plano da tela é a superfície de um queijo e você corta essa superfície perpendicularmente com uma faca passando sobre a linha do vetor \mathbf{v} na Figura 11(a). O plano da lâmina da faca é o plano definido pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{B} . Como q é positiva, o sentido da força aponta para o lado esquerdo da lâmina. Você pode verificar isso usando a regra da mão direita: coloque a sua mão direita espalmada com o dedão aberto e os outros quatro dedos apontando na direção de \mathbf{v} . Faça a mão estar paralela ao plano da tela com a palma voltada para a tela. Gire os quatro dedos no sentido de \mathbf{B} . O dedão aponta para a esquerda e esta é a direção de \mathbf{F} . Se q fosse negativa, você teria que inverter o sentido de \mathbf{F} e, então, a força apontaria para a direita. Se o campo magnético estivesse *saindo* do plano da tela, você teria que colocar sua mão com a palma voltada para você e aí o dedão apontaria para a direita se $q > 0$ e para a esquerda se $q < 0$.

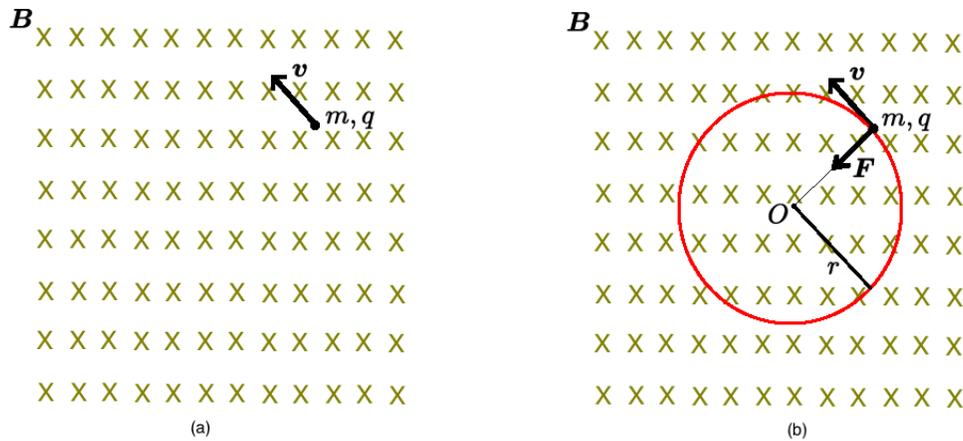


Figura 11: (a) Partícula de carga q positiva e massa m movendo-se com velocidade \mathbf{v} no plano da tela em uma região em que o campo magnético é uniforme, perpendicular ao plano da tela e aponta para dentro (a direção e o sentido são representados pelo símbolo X). (b) A força magnética sobre a partícula em (a) é perpendicular a \mathbf{v} e \mathbf{B} e a partícula descreve um movimento circular uniforme sobre uma circunferência de raio r indicada em vermelho.

O sentido da força magnética \mathbf{F} para este caso é como o mostrado na Figura 11(b). O módulo da força, pela equação (18), é

$$F = qvB. \quad (19)$$

Note que a força é puramente perpendicular à velocidade \mathbf{v} (não tem componente tangencial ao movimento). Portanto, ela não pode alterar o módulo de \mathbf{v} , apenas sua direção. Temos então um caso em que a força atuando sobre a partícula é perpendicular à sua velocidade e de módulo constante (pois q , v e B são constantes; v é constante porque \mathbf{F} não pode alterá-la). Esta é a característica definidora de um movimento circular uniforme.

Desta forma, embora não exista um centro de forças no sentido usual, a partícula descreve uma trajetória circular de raio r e centro O como mostrado na Figura 11(b). O módulo da aceleração da partícula, pela segunda lei de Newton, é

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m}, \quad (20)$$

onde m é a massa da partícula. Como o movimento é circular uniforme, esta

é a aceleração centrípeta $a = v^2/r$, de onde obtemos

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{qvB}{m} \Rightarrow \\ r &= \frac{mv}{qB}.\end{aligned}\tag{21}$$

Como vimos na Aula 5, o produto mv é o módulo do momento linear p da partícula. Portanto, a equação (21) pode ser reescrita como

$$r = \frac{p}{qB}.\tag{22}$$

O raio da trajetória circular da partícula é proporcional ao momento linear da partícula e inversamente proporcional à carga da partícula e ao módulo do campo magnético. Esta propriedade é utilizada em física nuclear e física de partículas elementares para determinar experimentalmente os valores dos momentos lineares das partículas nas reações e colisões estudadas a altas energias. As trajetórias das partículas produzidas ou espalhadas podem ser visualizadas e fotografadas usando uma *câmara de bolhas*². A partir da fotografia da trajetória circular de uma partícula numa câmara de bolhas, pode-se medir o raio r da trajetória e, conhecendo-se q e B , determinar p .

A velocidade angular do movimento circular uniforme da partícula é dada por (via (21))

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m}B.\tag{23}$$

Note que a frequência angular ω não depende da velocidade v da partícula ou do raio r da trajetória circular. Ela depende apenas da razão q/m entre a carga e a massa da partícula e do módulo do campo magnético B . Essa frequência angular é chamada de *frequência de cíclotron* e a razão desse nome é que ela é a base teórica do funcionamento do *cíclotron*, um tipo de acelerador de partículas inventado pelo físico estadunidense Ernest Lawrence (1901-1958). Veja o esquema básico de funcionamento de um cíclotron na Figura 12.

²Para saber como funciona uma câmara de bolhas, veja, por exemplo, a página da Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Bubble_chamber. Um exemplo de aplicação de câmaras de bolhas para visualizar antimatéria é dado em <https://www.youtube.com/watch?v=4lbyxwaItcQ>. Câmaras de bolhas foram muito usadas nos primórdios da física das partículas elementares e dos aceleradores de partículas, mas atualmente elas foram substituídas por detectores de trajetórias baseados em semicondutores.

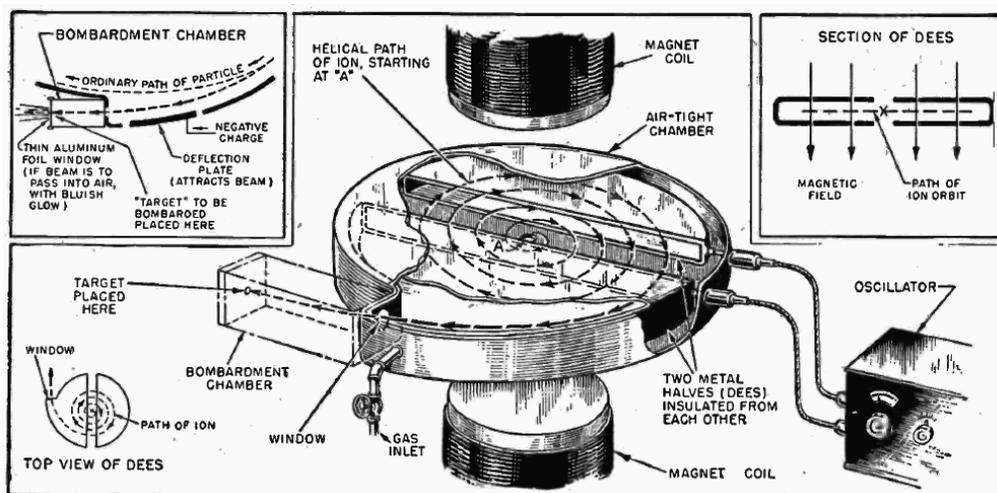


Figura 12: Esquema de funcionamento de um ciclotron. Figura de domínio público tirada de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyclotron_diagram.png.

Os ciclotrons foram os aceleradores de partículas de tecnologia mais avançada até o início da década de 1950, quando foram suplantados pelos síncrotrons. Mesmo assim, ciclotrons são usados ainda hoje para produzir feixes de partículas em medicina nuclear.

Um ciclotron consiste de duas câmaras metálicas ocas com a forma da letra “D” colocadas no interior de um tanque onde se faz vácuo. Os Ds ficam um em frente ao outro e separados por um vão de largura estreita. Acima e abaixo dos Ds estão os pólos de um eletroímã que gera um campo magnético B constante perpendicular ao plano dos Ds. Um feixe de partículas carregadas é injetado no centro do vão entre os dois Ds e, por causa da força magnética (18), as partículas adquirem uma trajetória circular no interior das câmaras em D.

Se os módulos das velocidades das partículas fossem constantes, elas ficariam girando no interior dos Ds em órbitas fechadas. A frequência angular das órbitas é ω dada em (23) e dela pode-se calcular o período T de um ciclo por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

No entanto, o ciclotron não mantém as velocidades das partículas cons-

tantes, mas acelera-as quando eles passam pelo vão entre os dois Ds. Isso é feito por meio de um oscilador acoplado aos dois Ds que produz no vão entre eles uma voltagem alternada de milhares de volts com frequência ajustada para valer exatamente metade do período T . Essa voltagem alternada cria no vão entre os Ds um campo elétrico que muda de sentido a cada meio período. Isso faz com que a cada meia volta que uma partícula dá (no momento em que ela sai de um D e entra no vão) ela seja acelerada em direção ao D oposto pelo tempo em que ela fica no vão. Como a velocidade aumenta de módulo a cada meia volta, o raio da órbita também aumenta (veja a equação (21)). A frequência das oscilações, porém, não muda, sendo sempre igual à frequência de cíclotron (23). Como a frequência das oscilações não muda, o período delas também não e é por isso que é possível ajustar as oscilações da voltagem com os instantes em que a partícula passa pelo vão entre os Ds. O efeito disso é que a trajetória das partículas é uma espiral de raio cada vez maior. O módulo da velocidade permanece constante a cada meia volta, mas aumenta a cada passagem pelo vão. Quando as partículas atingem a borda de um dos Ds, elas saem por uma abertura e são desviadas por uma placa defletora na direção desejada para atingir o alvo.

Um exemplo típico de cíclotron tem um campo magnético de 2 T e Ds com raio de 0,25 m. Supondo que as partículas aceleradas são prótons ($q = e = 1,6 \times 10^{-19}$ C e $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg), a frequência de cíclotron é

$$\omega = \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \cdot 2 \text{ T} \approx 2 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

e a velocidade com a qual os prótons saem do cíclotron é

$$v = \omega r = 2 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \cdot 0,25 \text{ m} = 5 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Esta já é uma velocidade considerável, um pouco acima de 10% da velocidade da luz.

O problema de acelerar partículas a velocidades maiores que esta com um cíclotron é que a partir daí efeitos relativísticos começam a ser importantes. Um deles é que a massa da partícula aumenta com a velocidade e isso faz com a frequência de cíclotron passe agora a depender da velocidade v da partícula. Veja a equação (23): se m cresce com a velocidade, ω diminui com v e o período T aumenta. Para resolver este problema e permitir que o cíclotron seja usado com velocidades relativistas, pode-se “sincronizar” a frequência do oscilador que gera a voltagem alternada, fazendo-a diminuir

com o aumento de v da mesma forma que ω diminui. Aceleradores desse tipo são chamados de *sincrociclotrons*.

No caso geral de uma partícula de carga q em movimento em um campo magnético uniforme, a velocidade \mathbf{v} não é exatamente perpendicular a \mathbf{B} . Neste caso, podemos imaginar que \mathbf{v} é decomposta em uma componente perpendicular a \mathbf{B} e uma componente paralela a \mathbf{B} . A componente paralela ao campo não tem uma força magnética associada a ela, mas a componente perpendicular sim, do mesmo jeito que descrito pelas equações (18)–(23). A consequência disso é que, no caso geral, a trajetória da partícula será helicoidal (a superposição de um movimento circular uniforme num plano com uma translação com velocidade constante na direção da velocidade perpendicular ao plano) como mostrado na Figura 13.

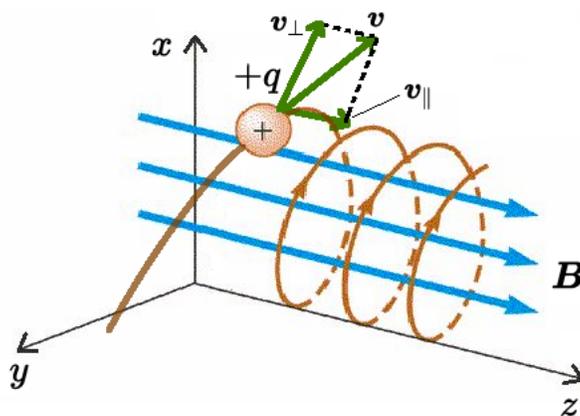


Figura 13: Trajetória helicoidal de uma partícula com carga q positiva que tem velocidade com componentes perpendicular (\mathbf{v}_\perp) e paralela (\mathbf{v}_\parallel) ao campo magnético.

Um exemplo importante de trajetórias helicoidais de partículas carregadas em um campo magnético é o dos *cinturões de Van Allen*. Um cinturão de Van Allen³ consiste de partículas carregadas (elétrons e prótons) provenientes do Sol (o chamado *vento solar*) que quando interagem com o campo magnético terrestre são aprisionadas por ele. A Terra tem dois cinturões principais (externo e interno) e outros que são criados temporariamente (existem cinturões em outros planetas também).

³O nome é dado em homenagem ao seu descobridor, o físico e cientista espacial estadunidense James Van Allen (1914-2006).

Os elétrons e prótons oriundos do Sol incidem sobre o campo magnético da Terra com velocidades que possuem componentes paralelas e perpendiculares ao campo. Por causa disso, elas adquirem trajetórias helicoidais que seguem as linhas de campo do campo magnético (veja a Figura 14). A trajetória dos elétrons vai num sentido e a dos prótons vai no oposto.

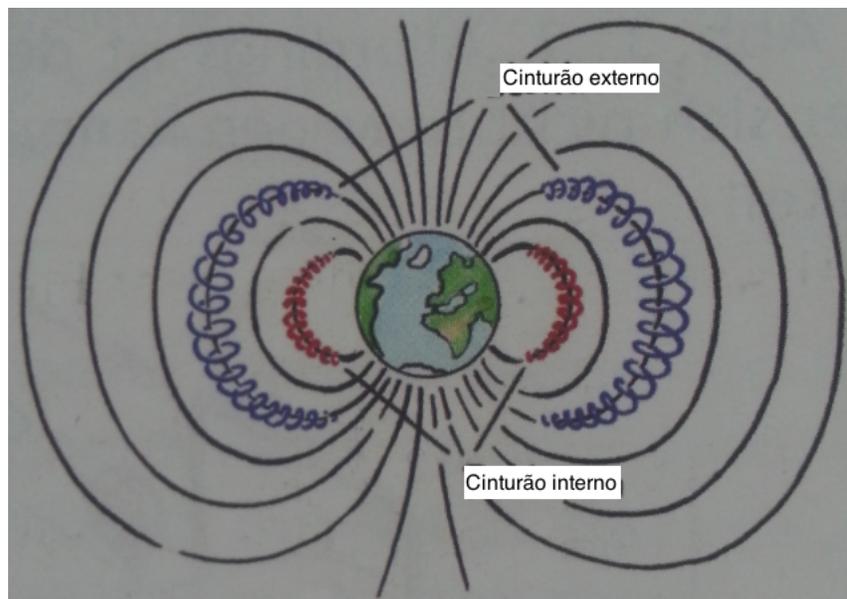


Figura 14: Ilustração dos dois principais cinturões de Van Allen da Terra (externo e interno).

O campo magnético da Terra não é uniforme e sua intensidade aumenta à medida que nos aproximamos dos pólos (veja na Figura 14 que a densidade das linhas de campo é maior nos pólos). Isso causa um efeito de *espelho magnético* que faz com as partículas mudem a direção de suas velocidades quando o campo magnético torna-se muito intenso (é como se as partículas fossem “refletidas” nas regiões de campo magnético intenso). A explicação desse efeito está além dos objetivos deste curso (espere pelo curso de Física III). O resultado é que as partículas ficam indo e vindo entre dois pontos, um ao norte e outro ao sul, aprisionadas pelo campo magnético terrestre. Para saber mais a respeito dos cinturões de Van Allen, veja a página da Wikipédia em inglês https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Allen_radiation_belt.

4 Espectrógrafos de massa

O fato de que partículas carregadas em campos magnéticos uniformes possuem órbitas circulares que dependem de suas propriedades constitui a base de praticamente todos os métodos de medição precisa de massas atômicas e isotópicas. Os instrumentos que se baseiam nesses métodos fazem uso da força magnética de duas maneiras: primeiro, como um seletor de velocidades e, depois, como um detector de massa.

Para partículas de mesma carga q , a equação (21) nos diz que os raios de suas trajetórias circulares em um campo magnético uniforme dependem do produto de suas massas m por suas velocidades v . Se for possível selecionar partículas que tenham todas a *mesma* velocidade, que denominaremos \bar{v} , o raio da trajetória torna-se então uma função apenas da massa m da partícula.

Vejam primeiro como se pode fazer um seletor, ou filtro, de velocidade com base na força magnética (18). Ele também se baseia na força elétrica sobre uma partícula carregada em um campo elétrico (equação (3) da aula passada):

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}.$$

O esquema do seletor de velocidade está dado na Figura 15. Ele consiste de um par de placas metálicas separadas por uma distância d . As placas são ligadas aos terminais de uma bateria cuja voltagem é V e isto estabelece um campo elétrico uniforme \mathbf{E} entre as placas. Sem perda de generalidade, vamos supor que a placa de cima está a uma voltagem positiva em relação à placa de baixo, de maneira que o campo elétrico aponta da placa de cima para a de baixo (como na Figura 15). Vimos na aula passada que uma partícula de carga q lançada com velocidade horizontal \mathbf{v} entre as placas sofrerá uma força elétrica $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ cujo efeito será o de desviar a trajetória da partícula em relação à sua trajetória original em linha reta. No caso da Figura 15 estamos supondo que a carga q é negativa, de maneira que a deflexão da trajetória será para cima (em direção à placa que está ao potencial positivo).

Suponha agora que criamos um campo magnético uniforme \mathbf{B} entre as placas, conforme mostrado na Figura 15 (o campo magnético está entrando no plano da tela). Aplicando a equação (18) à partícula de carga negativa, vemos que o efeito do campo \mathbf{B} será fazer a trajetória da partícula se curvar para baixo (tente mostrar isso usando a regra da mão direita; lembre-se de levar em conta o sinal da carga q).

Portanto, a partícula fica sob a ação de duas forças que tendem a mo-

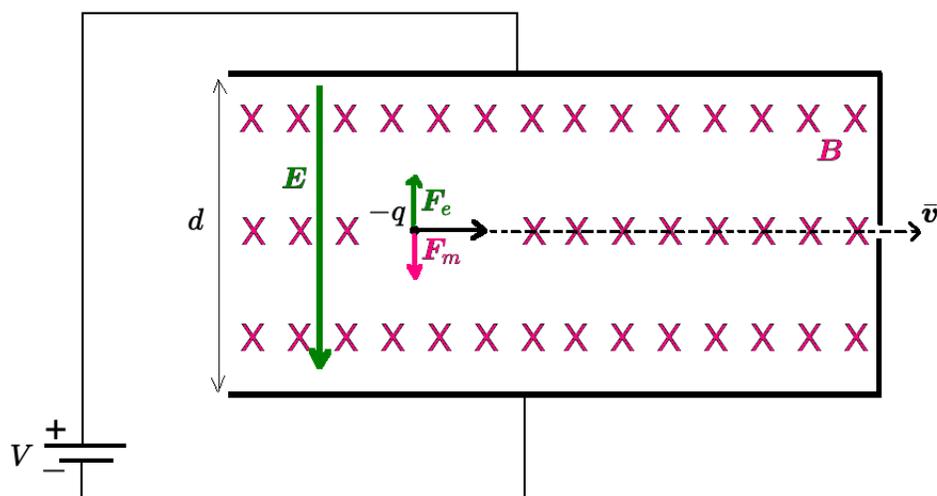


Figura 15: Esquema de um filtro seletor de velocidades. Campos elétricos e magnéticos uniformes \mathbf{E} (em verde) e \mathbf{B} (em rosa) são superpostos na mesma região do espaço. Ajustando os valores de E e B , pode-se fazer com que as forças elétrica e magnética sobre uma partícula carregada se cancelem para partículas que tenham exatamente uma velocidade com módulo especificado \bar{v} . Neste caso, como as forças sobre a partícula se cancelam ela segue em linha reta com velocidade \bar{v} até sair da região de sobreposição dos campos por uma fenda que só deixa passar as partículas que não sofrem deflexão. Veja o texto para uma dedução do valor de \bar{v}).

dificar sua trajetória de maneiras opostas: o campo elétrico tende a desviar a trajetória da partícula para cima e o campo magnético tende a desviar a trajetória da partícula para baixo.

Ajustando os valores dos módulos de \mathbf{E} e \mathbf{B} , pode-se fazer com que as duas tendências opostas se cancelem para partículas que tenham uma velocidade de módulo especificado \bar{v} . A força resultante sobre as partículas que tenham velocidade com este módulo será então nula e essas partículas seguirão em linha reta com velocidade de módulo constante \bar{v} . Partículas que não tenham essa velocidade serão desviadas, para cima ou para baixo. Para evitar que essas partículas saiam do seletor de velocidade, coloca-se um anteparo na saída das placas com uma fenda estreita por onde somente podem passar as partículas que não sofrem deflexão. Desta forma, as partículas que emergem da fenda têm todas o mesmo módulo de velocidade \bar{v} .

Matematicamente, podemos escrever o módulo do campo elétrico \mathbf{E} como

$$E = \frac{V}{d},$$

de maneira que o módulo da força elétrica apontando para cima sobre a partícula de carga q é

$$F_e = qE = \frac{qV}{d}.$$

Por outro lado, o módulo da força magnética apontando para baixo sobre a partícula é

$$F_m = qvB,$$

onde v é o módulo da velocidade da partícula. Para que as forças elétrica e magnética se cancelem, devemos ter

$$qvB = \frac{qV}{d} \Rightarrow$$

$$v = \frac{V}{Bd}.$$

Ajustando os valores da voltagem V da bateria, da separação d entre as placas e do módulo do campo magnético B , pode-se fazer v ser a velocidade desejada \bar{v} .

O esquema básico de um espectrógrafo de massa está mostrado na Figura 16. Ele consiste do filtro seletor de velocidade da Figura 15 com o campo magnético \mathbf{B} estendido para a região externa ao filtro.

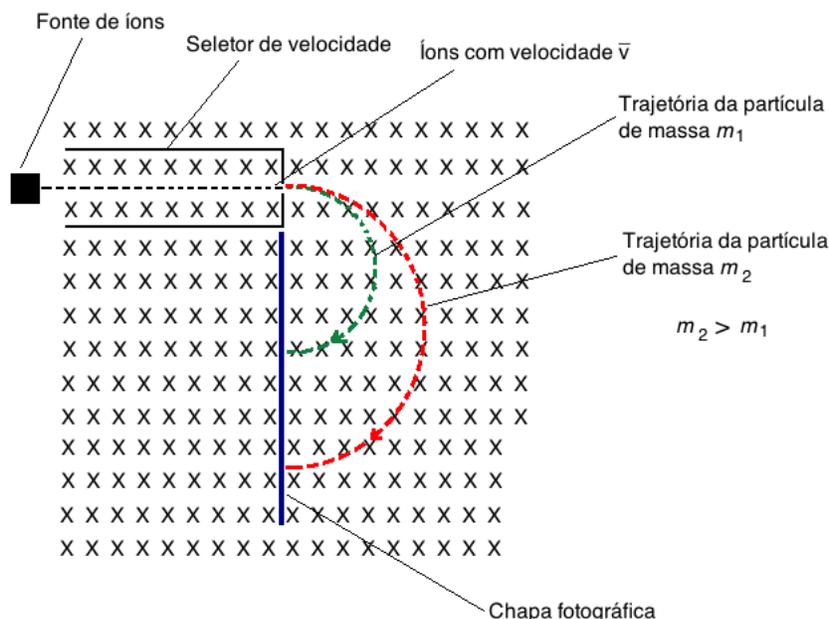


Figura 16: Esquema básico de um espectrógrafo de massa.

Como na região externa ao filtro de velocidade não existe mais o campo elétrico \mathbf{E} , as partículas que saem do filtro estão sujeitas apenas à força magnética. Considerando partículas de carga negativa como na Figura 15, as trajetórias das partículas que saem do filtro serão círculos cujos raios dependerão apenas da massa da partícula (pois $v = \bar{v}$ para todas elas). Pela equação (21), partículas com maior massa terão trajetórias de raios maiores que partículas de menor.

Acoplado ao filtro existe um detector, por exemplo, uma chapa fotográfica, que registra a chegada das partículas. As diferentes posições de chegada das partículas indicarão o “espectro” das partículas constituintes do feixe original.

No exemplo dado, estamos usando o termo “partícula” de maneira genérica. Na prática, um espectrógrafo de massa é usado para separar isótopos diferentes do mesmo elemento químico e medir suas massas com precisão. Neste caso, a fonte das partículas que entram no seletor de velocidade é uma fonte de átomos ionizados do elemento químico. Em geral, a ionização ocorre pela perda de um elétron, de maneira que todos os átomos têm carga positiva e . Note que, por causa disso, a trajetória circular dos íons após sair do filtro

de velocidade deve ser para cima ao invés de para baixo, como na Figura 16, mas isto não afeta o princípio básico de detecção de partículas com massas diferentes em pontos diferentes da chapa fotográfica.

Costuma-se também usar detectores de corrente elétrica no lugar da chapa fotográfica. Neste caso, as correntes medidas por detectores em posições diferentes serão proporcionais à quantidade de íons que atingem os detectores. As amplitudes relativas de cada correntes permitem então determinar com precisão a abundância relativa dos diferentes isótopos em uma amostra. Um exemplo clássico está mostrado na Figura 17.

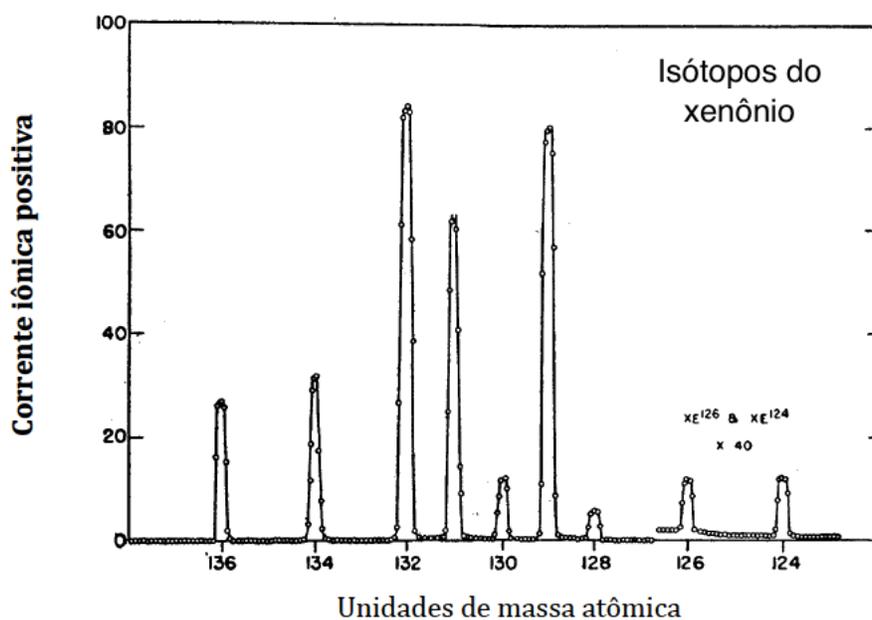


Figura 17: Exemplo de separação isotópica e análise de massas para isótopos do xenônio feita com um espectrógrafo de massa como o da Figura 16. As correntes para o ^{126}Xe e para o ^{124}Xe estão multiplicadas por um fator 40 para ficarem visíveis na escala do gráfico. Figura adaptada da Fig. 4 do artigo clássico de Alfred O. Nier, A Mass-Spectrographic Study of the Isotopes of Hg, Xe, Kr, Be, I, As, and Cs, *Physical Review* 52:933-937, 1937.