Força, inércia e movimento

Antônio Roque

Setembro 2021

1 A lei da inércia

Até agora, tratamos matéria, movimento e força como temas separados. Nesta aula, vamos atacar diretamente o problema central da mecânica newtoniana: Como são os movimentos dos corpos quando forças atuam sobre eles? Para começar, consideraremos um problema, em princípio, mais simples: Como é o movimento de um corpo quando nenhuma força atua sobre ele?

O problema do movimento de um corpo na ausência de forças atuando sobre ele instigou algumas das maiores mentes da ciência ao longo da história, desde Aristóteles, passando por Galileu, Descartes e Huygens até chegar a Newton e depois, até Einstein e seus contemporâneos. A apresentação e a discussão das ideias daqueles que vieram antes de Newton não pode e não deve ser feita de maneira esquemática e simplificada; tal tentativa seria uma injustiça para com esses grandes cientistas e pensadores. Uma apresentação justa de suas ideias iria requerer um curso inteiro – diferente deste – que apresentasse também o contexto científico-cultural no qual cada um trabalhou e desenvolveu suas ideias, muitas vezes de forma tortuosa. No caso deste curso, o que faremos será algo mais simples e pragmático; vamos começar diretamente com Newton (sempre tendo em mente que ele "subiu em ombros de gigantes")[1].

[1] Para os interessados em saber mais acerca da evolução histórica da lei da inércia sem necessidade de se debruçar sobre livros, uma boa introdução é a que está no capítulo 2 da dissertação de mestrado de Balola: Balola, R. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural: A Lei de Inércia*, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2010. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5363/2/ulfl109993_tm.pdf (acessada em 22 de setembro de 2021).

No esquema geral da dinâmica newtoniana, a característica mais importante do movimento dos corpos é que ele tem uma natureza *dual*. No esquema de Newton, cada corpo particular está, a cada momento, respondendo simultaneamente a duas influências de naturezas distintas. Essas duas influências são:

(i) A influência que o espaço e o tempo absolutos exercem sobre o corpo;

(ii) A influência que todos os demais corpos do universo exercem sobre o corpo.

As naturezas distintas dessas influências se manifestam pelo efeito que cada uma delas tem sobre o movimento do corpo e Newton as capturou com suas famosas três leis.

De acordo com a primeira lei de Newton, a consequência da influência exercida sobre o corpo pelo espaço e o tempo absolutos pode ser expressa da seguinte maneira: se a segunda influência não estiver presente, isto é, se os demais corpos do universo não causarem nenhuma perturbação sobre o corpo, então a velocidade instantânea $\boldsymbol{v}$ que o corpo tiver em um dado momento será a mesma para sempre. Note que a velocidade foi expressa na forma vetorial, pois embora a teoria de vetores ainda não existisse na época de Newton ele tinha perfeita noção de que a velocidade de um corpo envolvia, além de sua magnitude, também sua direção e sentido. Note também que a velocidade instantânea $\boldsymbol{v}$ pode ser nula.

Vejamos como Newton enunciou a primeira lei[2]:

> Lei I:
>
> Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.

Note a presença implícita do espaço e do tempo absolutos no enunciado da primeira lei. A retilinearidade do movimento diz respeito ao espaço absoluto e a sua uniformidade diz respeito ao tempo absoluto.

[2]Todas as traduções de trechos dos *Principia* dadas aqui foram tiradas da edição brasileira publicada pela Edusp: Newton, I. *Principia - Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Livro I*, segunda edição, tradução de Ricci, T., Brunet, L. G., Gehring, S. T. e Célia, M. H. C., Editora da Universidade de São Paulo (Edusp), São Paulo, 2002.

A primeira lei de Newton é chamada de *lei da inércia*, ou princípio de inércia, e o estado de movimento retilíneo e uniforme de um corpo ao qual ela se refere é chamado de *movimento inercial*.

Um aspecto importante da lei da inércia é que ela se refere ao movimento de um corpo e, como vimos na Aula 4, qualquer enunciado acerca do movimento de um corpo implica em um sistema de referência. O sistema de referência implicado pela primeira lei é o espaço absoluto e isto pode ser aceito do ponto de vista conceitual; mas, na prática, não vemos o espaço absoluto. Como fazer então?

Antes disso, vamos fazer a seguinte definição operacional da primeira lei:

> Existem certos sistemas de referência em relação aos quais o movimento de um corpo, livre de qualquer força externa, se dá com velocidade constante em linha reta (que pode inclusive ser a velocidade zero).

Um sistema de referência para o qual a definição operacional acima é válida é chamado de *referencial inercial*.

Com a definição operacional de referencial inercial, a questão de determinar se um sistema de referência é inercial ou não torna-se um assunto observacional e experimental. Obviamente, como nenhum sistema de referência *material* corresponde de fato ao espaço absoluto de Newton, qualquer determinação empírica de um referencial inercial é uma tarefa *aproximada*. O melhor que se pode fazer é determinar um sistema que seja *quase* inercial.

Consideremos, por exemplo, experimentos realizados dentro de um laboratório sobre a superfície da Terra. Na maior parte dos casos, os efeitos da rotação da Terra e de seu campo gravitacional afetam pouco os movimentos estudados em laboratório. Ademais, como vimos na aula passada, os efeitos gravitacionais e eletromagnéticos dos objetos dentro do laboratório sobre um dado corpo são desprezíveis. Por causa disso, na prática, considera-se o referencial preso ao laboratório como uma boa aproximação para um referencial inercial, pelo menos para experimentos feitos no interior do laboratório.

Sabemos, no entanto, que a Terra gira em torno de seu eixo e isso causa pequenos efeitos sobre o movimento dos corpos (mensuráveis em laboratório). O movimento de rotação da Terra também faz com que corpos muito distantes no espaço, portanto praticamente livres da ação de forças, pareçam girar em torno da Terra (em vez de terem trajetórias retilíneas). A Terra, portanto, não é a melhor aproximação que podemos escolher para um referencial inercial. Qual poderia ser a melhor escolha?

Desde a época de Newton, considera-se que um referencial preso às estrelas fixas é uma excelente aproximação para um referencial inercial. Na nossa época, a escolha de um sistema de referência que funcione como excelente aproximação a um referencial inercial não pode ser apenas retórica, pois precisamos dele para descrever com precisão os movimentos dos corpos celestes observados (incluindo a Terra) e dos satélites artificiais que lançamos para navegar pelo espaço. Essa escolha é atualmente coordenada pela União Astronômica Internacional (UAI; veja o site dela em https://www.iau.org/). O sistema de referência escolhido pela UAI para aproximar um referencial inercial é denominado Sistema de Referência Celestial Internacional (SRCI; ou ICRS, da sigla em inglês para *International Celestial Reference System*).

Por convenção, o SRCI tem sua origem localizada no baricentro[3] do sistema solar e eixos coordenados definidos com base nas posições de fontes de rádio extragaláticas (quasares e outras fontes compactas) escolhidas para servir de referência. A opção por quasares e outras fontes compactas se dá porque suas distâncias da Terra são tão grandes ($>$ 1,5 bilhão de anos-luz) que eles podem ser considerados como objetos pontuais que não possuem deslocamentos angulares (paralaxes) mensuráveis[4]. Ou seja, para todos os efeitos práticos, eles estão fixos. A Figura 1 mostra esses objetos extragaláticos. O SRCI é atualmente o sistema de referência padrão usado para definir as posições dos planetas (incluindo a Terra) e os outros objetos astronômicos. Um vídeo disponível na internet explicando os princípios do SRCI (em inglês, com sotaque alemão) está disponível em https://youtu.be/aGv66aosJX4.

Para terminar esta seção, uma observação importante que decorre da definição de velocidade relativa entre dois corpos feita na Aula 4 (veja a equação (14) daquela aula) é a seguinte: um referencial que se mova com movimento retilíneo uniforme com velocidade v em relação a um referencial inercial é também um referencial inercial. Ou seja, um corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um dos referenciais também estará em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao outro. Uma consequência disso é que a determinação de um referencial inercial permite

[3] O baricentro de um sistema de massas é o centro de massa do sistema. No caso do sistema solar, é o ponto em torno do qual todos os corpos do sistema solar orbitam, incluindo o Sol. Normalmente ele encontra-se no interior do Sol, mas às vezes se localiza fora dele. Uma animação mostrando as órbitas do Sol, Júpiter e Saturno em torno do baricentro do sistema solar pode ser vista aqui: https://youtu.be/oauf6W3Uz04.

[4] Há vários vídeos na internet que explicam o conceito de paralaxe. Dois deles são https://youtu.be/OvDAm7FNd88 e https://youtu.be/RqI0a5vRHg8.

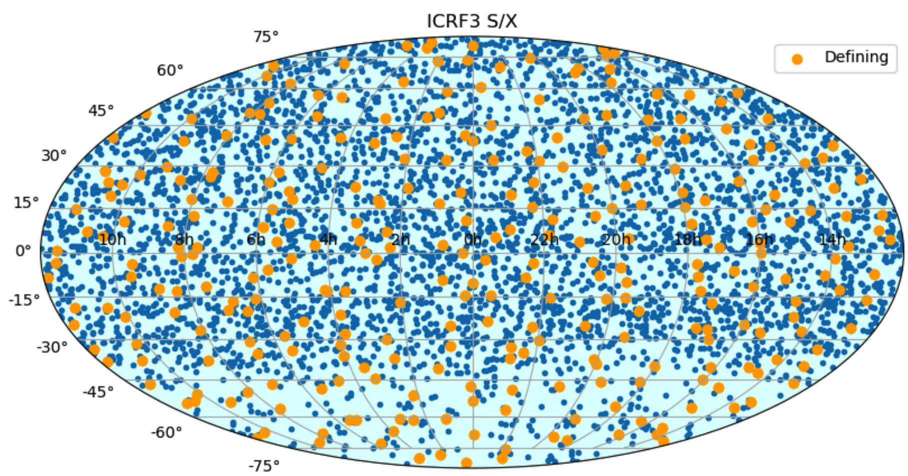

Figura 1: Conjunto de objetos extragaláticos usados para definir os eixos do sistema de coordenadas preso ao sistema de referência celestial internacional (SRCI), que aproxima um referencial inercial. Os objetos mostrados em amarelo são os escolhidos para a terceira versão do SRCI, adotada durante a XXX Assembléia Geral da União Astronômica Internacional em Viena, Áustria, em 30 de agosto de 2018 e que passou a valer a partir de 1º de janeiro de 2019. Figura retirada do site https://hpiers.obspm.fr/icrs-pc/newwww/icrf/index.php.

a definição de um número infinito de outros referenciais inerciais, cada um com movimento retilíneo uniforme com um valor diferente de v em relação ao primeiro.

2 Força e massa; segunda lei de Newton

No início da seção anterior, dissemos que no esquema da dinâmica newtoniana cada corpo em movimento responde simultaneamente a duas influências distintas. A primeira é a influência que o espaço e o tempo absolutos exercem sobre ele, a qual implica na lei da inércia. Nesta seção, vamos considerar a segunda influência, aquela feita pelos demais corpos do universo.

Ao falar de influências de outros corpos sobre um dado corpo, estamos falando de *forças*, pois no esquema da mecânica newtoniana os corpos interagem entre si apenas por meio de forças. Ainda no esquema da mecânica newtoniana, uma força de um corpo sobre outro só pode ocorrer de duas maneiras: por contato, por exemplo via uma colisão; ou por ação à distância, como no caso da gravitação. Em qualquer caso, a força deve produzir um efeito sobre o movimento que o corpo teria se estivesse livre dela, isto é, ela deve alterar o movimento inercial do corpo com velocidade constante $\boldsymbol{v}$. Uma alteração na velocidade $\boldsymbol{v}$ de um corpo corresponde a uma aceleração $\boldsymbol{a}$.

Portanto, para estabelecer como o movimento de um corpo pode ser afetado por outros corpos, devemos encontrar uma relação entre força e aceleração.

Força é um conceito abstrato, mas vimos na Aula 6 como é possível medir forças de uma maneira prática. Isso pode ser feito pela fixação de molas aos corpos e as deformações (estiramentos ou compressões) das molas podem ser medidas usando-se réguas graduadas em alguma escala (Figuras 2 e 3 da Aula 6). Para isolar a aceleração associada a uma força específica de outras acelerações provocadas por forças intervenientes, por exemplo atrito, podemos realizar experimentos com corpos que deslizam sobre *mesas de ar*. Uma mesa de ar é uma mesa lisa com pequenos furinhos por onde sai ar, de maneira a formar um colchão de ar entre a superfície do corpo e a superfície da mesa. Um corpo de superfície plana lançado horizontalmente sobre uma mesa de ar com velocidade inicial $\boldsymbol{v}$ constitui uma aproximação muito boa à situação ideal de um corpo com movimento inercial com velocidade constante.

Para determinar experimentalmente a relação entre força e aceleração, podemos realizar experimentos como os ilustrados na Figura 2.

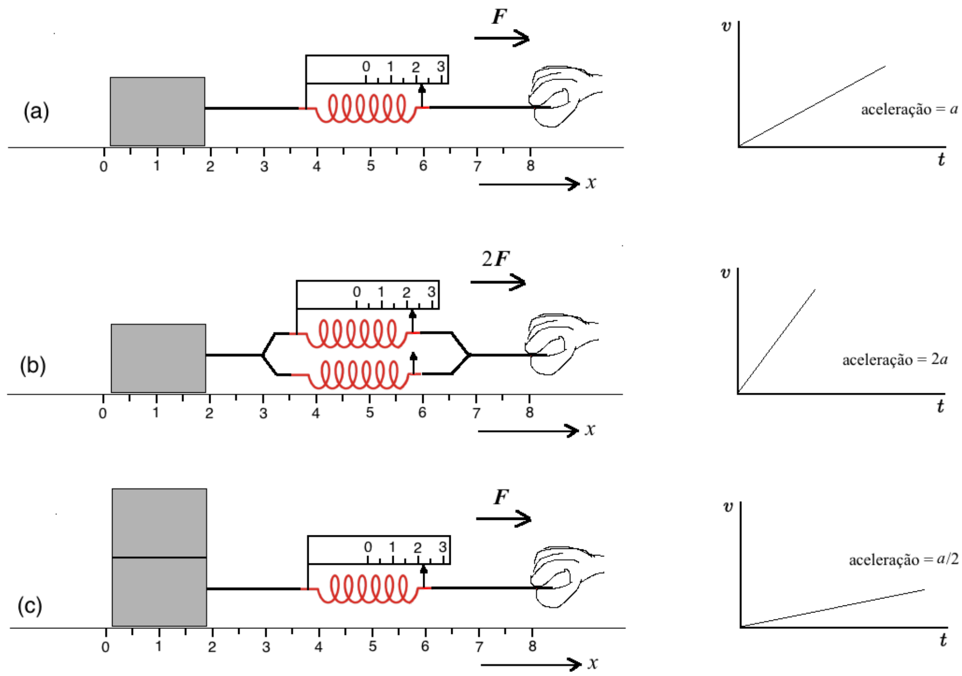

Figura 2: Esquema de experimentos dinâmicos simples que podem servir de base para a determinação da segunda lei de Newton.

Todas os desenhos na Figura 2 correspondem a corpos sobre uma mesa de ar presos a molas com escalas graduadas para se medir a força constante $\boldsymbol{F}$ que uma pessoa faz para movimentar os corpos. Na superfície da mesa também existe uma escala graduada que permite a determinação da variação da posição do corpo com o tempo e, em seguida, a variação da sua velocidade com o tempo. Para cada caso mostrado na figura, mostra-se ao lado o gráfico $v \times t$ correspondente.

A Figura 2(a) mostra um corpo puxado com força constante $\boldsymbol{F}$. O gráfico $v \times t$ correspondente é uma linha reta, indicando que a aceleração do corpo é *constante*. O valor da aceleração a pode ser determinado medindo-se a inclinação da reta.

Em seguida, pode-se aumentar ou diminuir a força constante $\boldsymbol{F}$ para ver o efeito sobre o valor de a. A Figura 2(b) mostra um exemplo quando a força $\boldsymbol{F}$ é dobrada. Nota-se para este caso que a aceleração a também dobra. Repetições desse experimento (não mostradas) para forças triplicadas, quadruplicadas ou reduzidas pela metade sempre indicam que a aceleração é proporcional à força: quando a força é triplicada ou quadruplicada ou reduzida pela metade, a aceleração também é triplicada, quadruplicada ou reduzida pela metade.

Esses resultados nos permitem expressar matematicamente a relação entre a força e a acelaração como uma função *linear* do tipo:

$$F = ka, \tag{1}$$

onde k é uma constante. A questão agora é determinar se essa constante k é a mesma para *todos* os corpos, independente de características dos corpos como tamanho, peso, etc, ou se ela depende do corpo, ou seja, se é uma propriedade *intrínseca* do corpo.

Isso pode ser testado com um experimento como o mostrado na Figura 2(c). Dois corpos idênticos são colocados um sobre o outro e aplica-se a eles a mesma força constante $\boldsymbol{F}$ do caso (a) da figura. O resultado está mostrado no gráfico $v \times t$ do caso (c). A aceleração, quando os dois corpos idênticos estão juntos e submetidos à força $\boldsymbol{F}$, é reduzida pela metade. Portanto, a constante k não pode ser uma grandeza independente dos corpos.

O resultado do experimento da Figura 2(c) pode ser explicado supondo que cada um dos corpos idênticos possui a mesma propriedade intrínseca, quantificada por k, e que quando eles estão juntos ela é dobrada, ou seja, a constante de proporcionalidade entre F e a é agora $k + k = 2k$. Substituindo k por $2k$ na equação (1) e chamando a nova aceleração de a', obtemos:

$$F = 2ka' \Rightarrow a' = \frac{F}{2k} = \frac{a}{2}, \tag{2}$$

onde a é a aceleração medida no caso (a) da figura.

Se o terceiro experimento for repetido colocando-se três ou quatro corpos idênticos, um em cima do outro, a aceleração medida seria $a/3$ ou $a/4$, respectivamente. Se o corpo, suposto como uniforme, for cortado exatamente pela metade, a aceleração medida seria igual a $2a$.

Todas essas evidências indicam que a grandeza k usada na equação (1) é uma propriedade intrínseca de cada corpo. Qual a natureza dessa propriedade intrínseca?

Observe as equações (1) e (2). Quando, para uma mesma força F, k aumenta ou diminui, a aceleração do corpo diminui ou aumenta, respectivamente. Portanto, k parece indicar uma espécie de *resistência* do corpo em ser acelerado. Quanto maior k, maior a dificuldade da força em produzir uma aceleração.

Newton chamou esta propriedade intrínseca que os corpos têm de resistir a uma aceleração de *inércia*. O fator de proporcionalidade k foi identificado por Newton com a massa m do corpo. Como já mencionado antes, Newton tinha perfeita noção de que a força e a aceleração são grandezes do tipo que chamamos atualmente de vetores. Em particular, a aceleração provocada por uma força está sempre na mesma direção da força. Combinando tudo isso, chegamos à expressão conhecida como segunda lei de Newton:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{3}$$

Um fato histórico importante é que Newton não expressou a segunda lei na forma como ela está dada pela equação (3). A equação (3) só foi ser escrita como representação matemática da segunda lei pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1752 (25 anos após a morte de Newton).

Para expressar a segunda lei, Newton introduziu aquele que é, talvez, o mais importante dos conceitos especificamente dinâmicos do seu esquema, que é o de *quantidade de movimento* ou *momento linear* de um corpo, normalmente chamado apenas de *momento*. O momento linear $\boldsymbol{P}$ de um corpo é definido pelo produto de sua massa por sua velocidade:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Note que como m é um escalar, mas $\boldsymbol{v}$ é um vetor, o momento linear de um corpo é um vetor.

Pela primeira lei de Newton, $\boldsymbol{v}$, e portanto $\boldsymbol{P}$ também, permanece constante ao longo do tempo a menos que algum outro corpo exerça uma influência sobre o corpo em consideração. A segunda lei nos diz como o momento do corpo é alterado pelas forças impressas a ele por outros corpos. De acordo com Newton, nos *Principia*:

> Lei II:
>
> A mudança do momento é proporcional à força motora impressa, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é impressa.

Já falamos acima que no esquema newtoniano há apenas duas maneiras pelas quais uma força pode provocar uma mudança no momento de um corpo:

por contato, por exemplo em uma colisão, ou por uma influência à distância como no caso da força gravitacional. Newton chegou à sua segunda lei a partir de considerações acerca de colisões entre corpos. O motivo para isto é que é mais fácil pensarmos em uma mudança no momento de uma partícula no caso de uma colisão instantânea do que no caso de uma força que varia continuamente no tempo como é o caso da força gravitacional.

Imagine um corpo em movimento inercial com momento $\boldsymbol{P}$ como o mostrado na Figura 3 e que em um dado instante ocorre uma colisão com outro corpo.

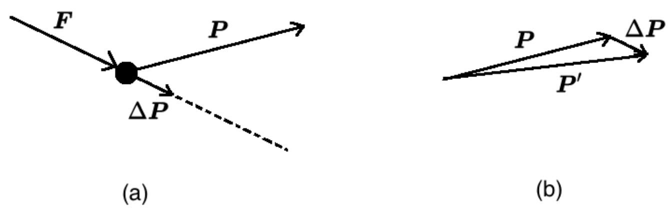

Figura 3: Mudança $\Delta\boldsymbol{P}$ no momento linear $\boldsymbol{P}$ de um corpo devida a uma força $\boldsymbol{F}$ feita durante uma colisão com outro corpo. Após a colisão, o momento linear é $\boldsymbol{P'}$.

Uma colisão é um processo muito rápido, digamos com duração Δt, durante o qual uma força $\boldsymbol{F}$ é feita sobre o corpo. A consequência da colisão é uma mudança abrupta no momento $\boldsymbol{P}$ por uma quantidade finita $\Delta\boldsymbol{P}$. Vemos pela Figura 3(a) que a mudança $\Delta\boldsymbol{P}$ está na direção da força $\boldsymbol{F}$. As quantidades $\boldsymbol{P}$ e $\Delta\boldsymbol{P}$ se somam vetorialmente para resultar no novo momento $\boldsymbol{P}'$ da partícula, como mostrado na Figura 3(b). Newton relacionou a variação $\Delta\boldsymbol{P}$ com o produto de $\boldsymbol{F}$ por Δt (na terminologia moderna, este produto é chamado de *impulso*):

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\Delta t. \tag{5}$$

Rearranjando os termos na equação (5) e tomando o limite para $\Delta t \to 0$, chegamos à forma como Newton expressou matematicamente a segunda lei:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}. \tag{6}$$

Para passar da forma como Newton expressou a segunda lei para a forma mais usual da equação (3), basta escrever $\boldsymbol{P}$ como $m\boldsymbol{v}$ na equação (6). Assumindo que m é uma constante que não varia com o tempo, pode-se colocá-la para fora da derivada e o resultado está mostrado abaixo:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}.$$

Embora as duas formulações da segunda lei, a da equação (6) e a da equação (3), sejam equivalentes, a formulação da equação (6) apresenta algumas vantagens. Uma delas é que a formulação da equação (6) permanece válida na mecânica relativística, enquanto que a formulação da equação (3) não.

3 Ação e reação; terceira lei

Vamos agora completar a apresentação das três leis de Newton. O enunciado da terceira lei é o seguinte.

> Lei III:
>
> A toda ação há sempre uma reação igual; ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.

Esta lei só adquire um significado preciso quando sabemos o que Newton queria dizer por *ação* (a reação é de mesma natureza, só que contrária). Por "ação", ele queria dizer *mudança no momento linear*.

A terceira lei é melhor entendida quando se pensa em uma interação entre dois corpos de massas m_1 e m_2 sem o envolvimento de outros corpos. Sejam $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ as velocidades iniciais dos dois corpos, de maneira que seus momentos lineares são $\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2$. Suponha agora que o corpo 2, ao exercer uma força sobre o corpo 1, causa uma mudança infinitesimal $\delta\boldsymbol{P}_1$ no momento linear do corpo 1, de maneira que $\boldsymbol{P}_1$ muda para $\boldsymbol{P}_1 + \delta\boldsymbol{P}_1$. Então, pela terceira lei, há necessariamente uma mudança $\delta\boldsymbol{P}_2$ no momento linear do corpo 2 cujo módulo e direção são iguais ao módulo e direção de $\delta\boldsymbol{P}_1$, mas seu sentido é o oposto:

$$\delta\boldsymbol{P}_2 = -\delta\boldsymbol{P}_1. \tag{7}$$

Como as mudanças nos momentos são proporcionais às forças que as produzem (pela segunda lei), a terceira lei de Newton também pode ser formulada em termos das forças que os corpos fazem um sobre o outro. Chamando a força que o corpo 1 faz sobre o corpo 2 de $\boldsymbol{F}_{12}$ e a força que o corpo 2 faz sobre o corpo 1 de $\boldsymbol{F}_{21}$, a terceira lei de Newton diz que essas forças são iguais e opostas:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{8}$$

É importante notar que essas forças são sempre aplicadas a corpos diferentes. $\boldsymbol{F}_{12}$ está aplicada ao corpo 2 e $\boldsymbol{F}_{21}$ está aplicada ao corpo 1.

A generalização da terceira lei para interações em que mais de dois corpos estão envolvidos estabelece que a *soma vetorial* de todas as mudanças individuais $\delta\boldsymbol{P}_i$ induzidas nos momentos de cada corpo, $i = 1, 2, \ldots, N$, é exatamente zero:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta\boldsymbol{P}_i = 0. \tag{9}$$

4 Comentários acerca da segunda lei

Devemos nos lembrar sempre que o movimento só pode ser medido em relação a algum sistema de referência. Portanto, a aplicação da segunda lei não pode ser separada da escolha de um sistema de referência. De fato, foi assumido implicitamente no exemplo da Figura 2 que o sistema de referência em que as medidas foram feitas é um sistema inercial. No caso, o referencial do laboratório fez este papel.

Um fato que já foi destacado anteriormente, mas que vala a pena ser enfatizado aqui é que a equação (3) é uma equação *vetorial*. Isto significa que se houver mais de uma força, por exemplo $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ atuando sobre uma partícula, a força $\boldsymbol{F}$ que aparece em (3) é a *força resultante* sobre a partícula, dada pela soma vetorial,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n, \tag{10}$$

e o vetor aceleração da partícula está na direção dessa força resultante $\boldsymbol{F}$. Este é um resultado *experimental*, isto é, que não poderia ser deduzido teoricamente e é a razão pela qual se usa vetores para representar forças. Ele é conhecido como *princípio de superposição de forças*.

Vejamos um exemplo simples de aplicação do princípio de superposição. Considere um corpo de massa m preso a duas molas ortogonais, como na

Figura 4. A mola 1 faz sobre o corpo uma força $\boldsymbol{F}_1$ na direção x e a mola 2 faz sobre o corpo uma força $\boldsymbol{F}_2$ na direção y (Figura 4(a)). A soma vetorial das duas forças é a força resultante $\boldsymbol{F}$ mostrada na Figura 4(b). Aplicando a equação (3), a aceleração do corpo é $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$. Considere agora a aceleração que o corpo teria se apenas a mola 1 estivesse presente; ela seria $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_1/m$. Considere também a aceleração que o corpo teria se apenas a mola 2 estivesse presente; ela seria $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_2/m$. Um resultado *experimental* é que a aceleração $\boldsymbol{a}$, causada pelas duas molas atuando simultaneamente e calculada pelo princípio de superposição, é exatamente igual à soma vetorial das acelerações $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ que o corpo teria se cada mola existisse sem a presença da outra (Figura 4(c)):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{m}.$$

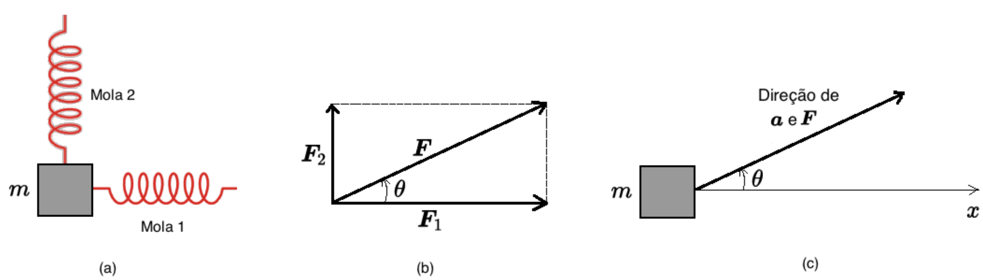

Figura 4: (a) Corpo sob a ação de duas forças exercidas por molas em direções perpendiculares. (b) Força resultante calculada de acordo com as regras da adição vetorial. (c) A aceleração medida do corpo está na direção do vetor força resultante, conforme calculado em (b).

Este é um exemplo prototípico da maioria dos problemas que encontraremos neste curso. Quando várias forças estiverem atuando sobre um corpo, a aceleração instantânea do corpo pode ser calculada como se cada força estivesse sendo aplicada *independentemente* das outras. Calcula-se a aceleração instantânea produzida por cada força particular e, sem seguida, soma-se vetorialmente as acelerações para se obter a aceleração produzida por todas as forças ao mesmo tempo.

Este resultado de independência é válido não apenas para duas forças ortogonais como no exemplo dado, mas para um número n de forças atuando em quaisquer direções. Existem alguns tipos de forças para as quais ele não é válido, por exemplo forças entre partículas carregadas em campos magnéticos, mas nos casos em que ele é válido a análise do movimento produzido por forças torna-se muito mais simples do que seria caso contrário.

As três leis de Newton nada dizem a respeito das forças que de fato existem na natureza. Estas dependem das configurações e da natureza dos corpos envolvidos, como vimos na Aula 7. Pode-se considerar como um dos grandes feitos de Newton a formulação de três leis gerais que são válidas para qualquer tipo de força que se considere (veremos mais tarde que há alguns tipos de força para as quais a terceira lei não é válida).

Em particular, a segunda lei constitui uma espécie de *máquina genérica* que permite a determinação das características dinâmicas do movimento de um corpo (posição, velocidade e aceleração) para qualquer força escolhida (veja a Figura 5).

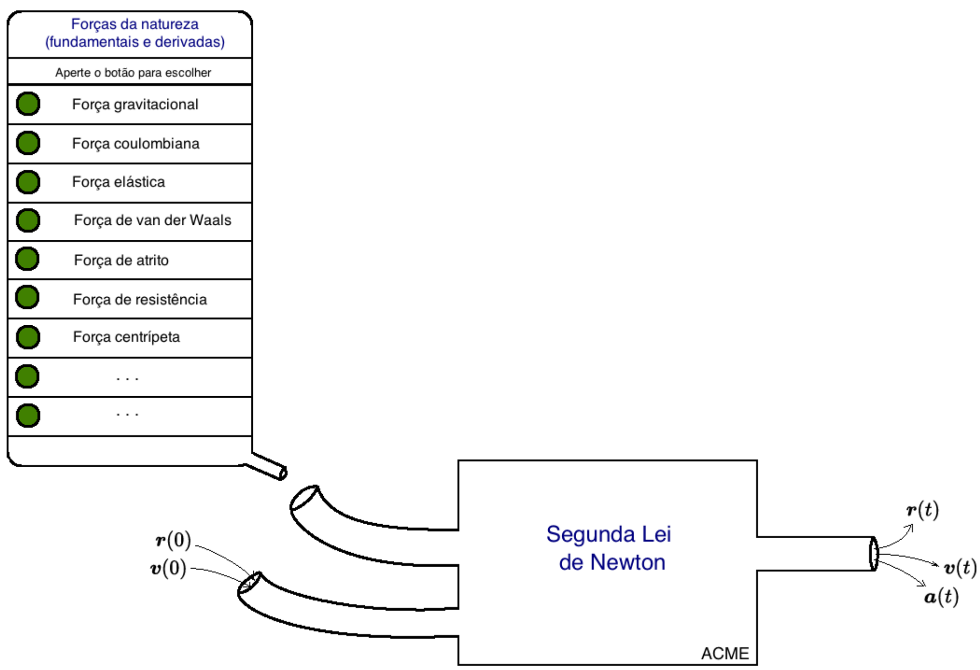

Figura 5: A *máquina* da segunda lei.

Quando estivermos estudando exemplos de aplicação da segunda lei, veremos a razão de a máquina da segunda lei na Figura 5) ter sido desenhada com uma entrada para os valores iniciais da posição e da velocidade do corpo,

$\boldsymbol{r}(0)$ e $\boldsymbol{v}(0)$.

Um fato notável que distingue a força gravitacional de todas as outras é que a massa m de um corpo que está sob a ação de uma força gravitacional também aparece na própria expressão da força. Para ver isto, consideremos dois corpos de massas m_1 e m_2 separados por uma distância r_{12} como mostrado na Figura 6.

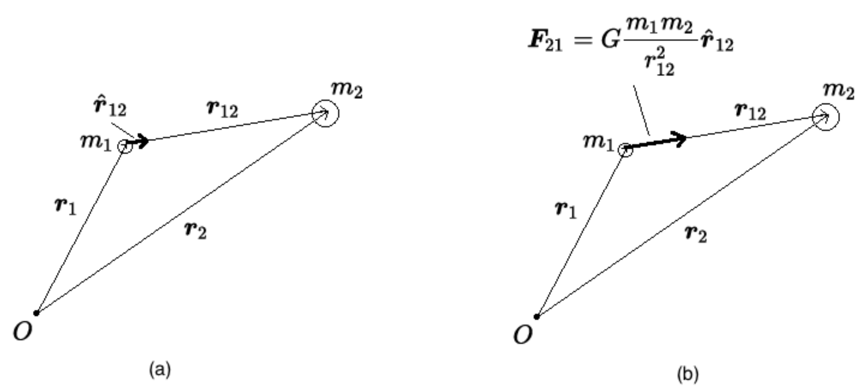

Figura 6: (a) Dois corpos, 1 e 2, de massas m_1 e m_2 separados por uma distância r_{12}. (b) Força gravitacional feita pelo corpo 2 sobre o corpo 1.

A força F_{21} que o corpo 2 faz faz sobre o corpo 1 é (veja a Figura 6(b)):

$$\boldsymbol{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}, \tag{11}$$

onde $\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$ é o vetor unitário que aponta na direção do corpo 1 para o corpo 2. Substituindo esta força na segunda lei de Newton (equação (3)), obtemos:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{21} \Rightarrow$$

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a}_1 = G\frac{m_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}.$$

Ou seja, a aceleração do corpo 1 não depende de sua massa. Este é um fenômeno que só acontece para a força gravitacional. Uma consequência disso é que todos os corpos em um dado campo gravitacional caem com a *mesma* aceleração. Este fato notável é devido ao aparecimento duplo da massa: na segunda lei e na lei da gravitação universal.

Para destacar a natureza excepcional da lei da gravitação universal, é muito comum distinguir entre os dois papéis desempenhados pela massa. A massa m que aparece na equação (3) para a segunda lei de Newton é chamada de *massa inercial* é a massa m que aparece na equação (11) da lei da gravitação universal é chamada de *massa gravitacional*, ou *carga gravitacional*.

5 Escalas de força e massa

Na Aula 6, apresentamos um método baseado em situações de equilíbrio estático para comparar diferentes forças. Naquela aula, falamos que o método poderia ser usado para definir uma escala de unidades para forças, mas, na prática, ele não é usado porque prefere-se usar um método baseado nas propriedades dinâmicas das forças. Vamos agora apresentar esse método dinâmico, que na realidade explora a segunda lei de Newton.

Nossas observações nos permitem assumir que sempre que uma mola tiver a mesma deformação, ela exerce a mesma força sobre um corpo preso a ela. Isto pode ser comprovado experimentalmente, pois sempre que a mesma força é aplicada ao mesmo corpo, a mesma aceleração é medida. Em outras palavras, pode-se repetir o mesmo experimento diversas vezes com o mesmo corpo, em lugares e tempos diferentes, que a mesma aceleração será sempre medida.

Porém, é impraticável ficar transportando um dado corpo para lugares diferentes em épocas diferentes. O que se faz é escolher um certo corpo como *padrão* e aplicar a ele uma dada força (em módulo) F e medir a aceleração a. Em seguida, escolhe-se outros corpos diferentes, por exemplo, corpo 1, corpo 2, corpo 3, ..., e aplica-se a eles a mesma força F e mede-se suas acelerações, $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Esse procedimento permite a definição de uma escala de unidades de massas inerciais, pois podemos escrever

$$F = m_p a_p = m_1 a_1 = m_2 a_2 = m_3 a_3 = \ldots,$$

o que nos dá

$$\frac{m_1}{m_p} = \frac{a_p}{a_1} \quad \frac{m_2}{m_p} = \frac{a_p}{a_2} \quad \text{etc.} \tag{12}$$

O corpo com massa inercial m_p é chamado de *padrão de massa* e pela equação (12) pode-se medir quantitativamente a massa inercial de qualquer outro corpo em relação a m_p. Por definição, o valor de m_p é chamado de 1 kilograma (1 kg), que é a unidade de massa no S.I., e todas as demais massas têm valores que são múltiplos de m_p. O padrão de massa também é chamado de *kilograma padrão*.

Em particular, pode-se escolher várias massas com valores iguais a 1 kg e enviá-las para os diferentes países para que em cada um deles procedimentos similares sejam feitos. Com isso, pode-se ter massas calibradas de acordo com o kilograma padrão em qualquer lugar do mundo e em qualquer tempo. Caso seja necessário, pode-se retornar ao local onde está guardado o padrão de massa e refazer novas medidas, produzindo novas réplicas dele.

O padrão de massa definido acima é um cilindro feito de uma liga de platina e irídio preservado no interior de uma redoma de vidro onde se faz vácuo no Escritório Internacional de Pesos e Medidas (*Bureau International des Poids et Mesures*, BIPM, na sigla em francês), localizado em Saint-Cloud nos subúrbios de Paris.

Até 2019, o padrão de massa usado internacionalmente era esse cilindro em Paris e o procedimento de calibração e confecção de réplicas era como o descrito acima. A partir de 2019, porém, adotou-se outra definição para o kilograma que não depende de um objeto físico gaurdado em um lugar específico. O kilograma é definido atualmente em termos de constantes físicas fundamentais (a velocidade da luz c e a constante de Planck h) e da frequência da radiação emitida quando ocorre uma determinada transição entre níveis de energia no átomo de césio.

A escala quantitativa para forças também é definida em termos da segunda lei de Newton utilizando-se a unidade de massa (kg) definida acima. No S.I., a unidade de força é o newton (N), definido como a força que atuando sobre uma massa de 1 kg produz uma aceleração de 1 m/s^2:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m/s}^2.$$

Nos experimentos simples mostrados anteriormente para ilustrar a segunda lei, adotamos como óbvio o resultado de que a propriedade inercial, representada pela massa, é aditiva e não fizemos nenhum comentário a respeito. Para objetos macroscópicos esta suposição de obviedade faz sentido, mas podemos nos perguntar: a aditividade das massas vale também para corpos em escala microscópica? A resposta é não.

Imagine que medimos as massas inerciais de um próton e de um elétron separadamente e que, em seguida, os unimos para formar um átomo de hidrogênio. Será que a massa inercial do átomo é igual à soma das massas inerciais do próton e do elétron? Não; a massa inercial do átomo é um pouquinho menor. Por que? Porque na formação do átomo, com a união do elétron e do próton, uma certa quantidade de energia equivalente a uma pequena quantidade de massa é emitida na forma de radiação. De forma recíproca, se um corpo está formado por várias partes unidas por forças de coesão, de maneira que é necessário esforço para separá-lo nessas partes, então a soma das massas das partes individuais é maior que a massa do corpo original.

Para corpos macroscópicos, essa diferença é tão pequena que não se consegue medir, mas para os sistemas atômicos e nucleares ela pode chegar a ser uma fração significativa da massa total e deve ser usada nos cálculos relacionados à energia envolvida nas reações nucleares.

Retornando agora à aditividade observada das massas para os corpos macroscópicos, podemos ver que esta propriedade justifica inteiramente a fabricação de um conjunto de massas padrão pela construção de blocos de um dado material com seus volumes tendo relações numéricas simples entre si, por exemplo 1:2:5:10:... Essa proporcionalidade entre massa e volume foi considerada por Newton como básica, sendo a manifestação do conceito de densidade constante para um dado material.

De fato, a primeira sentenca dos *Principia* é uma definição de massa como o produto da densidade pelo volume:

> Definição I
>
> A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume.
>
> Assim, o ar, com o dobro da densidade, num espaço duplicado, tem o quádruplo da quantidade; num espaço triplicado, o sêxtuplo da quantidade. (...) É essa quantidade que doravante sempre denomirarei pelo nome de massa. (...)

Esta definição de Newton foi e tem sido alvo de inúmeras críticas, alegando que é uma definição circular. Segundo tais críticas, densidade é um conceito composto em termos de massa e volume e não pode ser usado para a própria definição de massa.

Newton, porém, imaginava a matéria sólida como composta de pequenas partículas empacotadas de maneira uniforme no interior dos corpos. Para ele, portanto, parecia mais natural assumir como primária a ideia de densidade. O cálculo da massa de um dado corpo seria então, em essência, o de contar o número de partículas no interior do volume do corpo e multiplicá-lo pela massa de uma única partícula (definida arbitrariamente como massa unitária).

6 Duas grandezas importantes

Considere que uma força constante $\boldsymbol{F}$ é aplicada a um corpo de massa m em $t = t_0$ e mantida assim por um certo tempo. Ou seja, a força atua *continuamente* sobre o corpo. Para simplificar, vamos supor que a força está na direção x, de maneira que não precisamos usar a notação vetorial e podemos escrever a força como F. Vamos supor que em t_0 a posição e a velocidade do corpo eram x_0 e v_0, respectivamente. Como a força é constante, sabemos que a aceleração do corpo é constante. Sabemos também, pelo que vimos na Aula 5, que o movimento do corpo é descrito pelas equações cinemáticas:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a(t - t_0) \\ x &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \end{aligned}$$

onde a é a aceleração do corpo. Sabemos, pela segunda lei de Newton, que a força constante F e a aceleração a estão relacionadas por $F = ma$.

Após um tempo $t - t_0$, o corpo percorreu uma distância $x - x_0$. Podemos então calcular duas grandezas, uma combinando F com o tempo gasto $t - t_0$ e outra combinando F com a distância percorrida $x - x_0$.

A multiplicação de F pelo tempo gasto $t - t_0$ nos dá:

$$F(t - t_0) = ma(t - t_0) = m\frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}(t - t_0) = m(v - v_0) = mv - mv_0 = p - p_0,$$

onde p é o momento linear do corpo, conforme definido na Seção 2.

A multiplicação de F pela distância percorrida $x - x_0$ nos dá:

$$F(x - x_0) = ma(x - x_0) = m\frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}v_0(t - t_0) + m\frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}\frac{1}{2}\frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$F(x-x_0) = mv_0(v-v_0)+\frac{1}{2}m(v-v_0)^2 = mv_0(v-v_0)+\frac{1}{2}m(v^2-2v_0v+v_0^2) \Rightarrow$$

$$F(x-x_0) = mv_0v - mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0v = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0^2 \Rightarrow$$

$$F(x-x_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = K - K_0,$$

onde K é a *energia cinética* do corpo[5], definida como,

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2. \tag{13}$$

Recapitulando, os dois resultados obtidos acima são:

$$F(t-t_0) = p - p_0. \tag{14}$$

e

$$F(x-x_0) = K - K_0. \tag{15}$$

As grandezas $p = mv$ e $k = \frac{1}{2}mv^2$ são duas propriedades dinâmicas primárias associadas a um corpo em movimento: seu momento linear e sua energia cinética.

O produto da força pelo tempo já foi apresentado na Seção 2. Ele é definido como o *impulso* da força,

$$I = F(t-t_0) = F\Delta t. \tag{16}$$

O produto da força pela distância percorrida é definido como o *trabalho* feito pela força,

$$W = F(x-x_0) = F\Delta x. \tag{17}$$

Portanto, as equações acima nos dizem que:

- O impulso da força é igual à variação do momento linear do corpo;
- O trabalho feito pela força é igual à variação da energia cinética do corpo.

[5]O símbolo K vem da palavra grega *kinetikos*, que significa "que se move".

Impulso e momento linear não têm unidades específicas e são dadas em termos de outras unidades:

$$[I] = \text{N.s} = [p] = \text{kg.m/s}.$$

Por outro lado, trabalho e energia cinética têm unidades de energia, que no S.I. é o joule (J)[6]:

$$[W] = \text{N.m} = J = [K].$$

Essas grandezas, impulso e trabalho, momento linear e energia cinética, serão vistas e exploradas em aulas futuras desta disciplina. Esta seção teve por objetivo apenas apresentá-las a vocês e mostrar a relação que existe entre elas.

7 Invariância da segunda lei; transformação de Galileu

A base experimental da segunda lei de Newton envolve a observação de movimentos em relação a um referencial inercial (lembre-se dos experimentos na Figura 2).

Na Seção 1, foi dito que se um referencial inercial S for identificado, então teremos automaticamente uma família infinita de referenciais inerciais $\{S_i, i = 1, \ldots\}$, cada um se movimentando com velocidade constante $\boldsymbol{v}$ em relação ao primeiro.

Isto segue diretamente do fato de que se uma partícula tiver velocidade instantânea $\boldsymbol{u}$ em relação a S, e se a velocidade de um referencial S' em relação a S for $\boldsymbol{v}$ (constante), então a velocidade instantânea da partícula em relação a S' é

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}.$$

Logo, se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são constantes, $\boldsymbol{u}'$ também será constante e a partícula também obedecerá à primeira lei no referencial s'.

Para estudar este problema mais a fundo, vamos considerar que os dois referenciais inerciais, S e S', são sistemas de coordenadas retangulares (cartesianos) e que seus eixos x estão alinhados com a velocidade constante $\boldsymbol{v}$ com que S' se move em relação a S. A situação está mostrada na Figura 7.

[6]Dada em homenagem ao físico inglês James Prescott Joule (1818-1889).

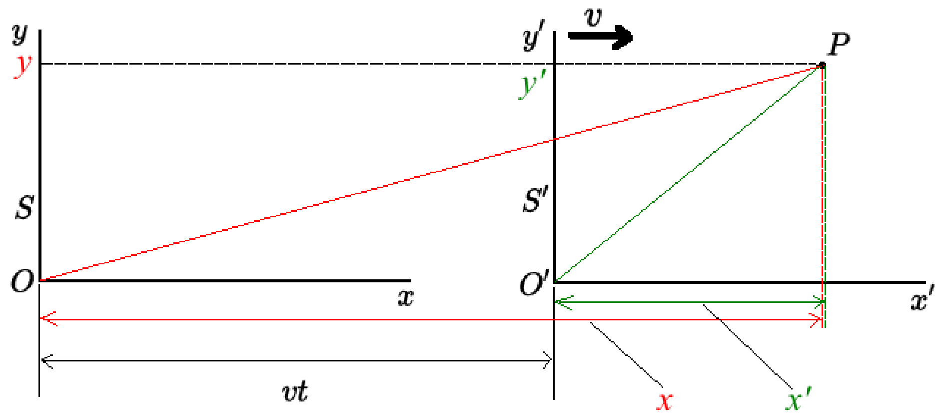

Figura 7: Movimento de uma partícula P em relação a dois sistemas de coordenadas, S e S'. S' move-se em relação a S com velocidade v.

Vamos supor que as origens dos dois sistemas de coordenadas, O e O' coincidem para $t = 0$. Nesse instante de tempo, portanto, os eixos (x, y) e (x', y') dos dois sistemas também coincidem. Seja uma partícula em movimento que, no instante t, está no ponto P mostrado na Figura 7. Nesse instante de tempo, o referencial S' está deslocado em relação a S por uma distância vt ao longo do eixo x.

Analisando a Figura 7, as coordenadas de P estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned}} \tag{18}$$

A última das equações (18) expressa a suposição newtoniana de tempo absoluto. Em particular, ela decorre da consideração de que o tempo $t = 0$ é o mesmo para os dois referenciais, ou seja, os relógios presos aos sistemas S e S' foram sincronizados no instante inicial.

O conjunto de equações (18) é conhecido como *transformação de Galileu*, em homenagem a Galileu por seu trabalho pioneiro relacionado aos movimentos dos corpos.

A partir das equações (18), podemos obter expressões para as componentes da velocidade $\boldsymbol{u}$ da partícula nos dois referenciais. As componentes ao longo dos eixos x e x' são,

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Fazendo $x' = x - vt$ e $t' = t$, obtemos

$$u'_x = \frac{d}{dt}(x - vt) = u_x - v.$$

Portanto, as transformações para as três componentes da velocidade são:

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z. \end{aligned}} \tag{19}$$

Finalmente, diferenciando essas componentes da velocidade em relação ao tempo obtemos as componentes da aceleração (note que v é constante),

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt}; \quad \frac{du'_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt}; \quad \frac{du'_z}{dt'} = \frac{du_z}{dt}.$$

Estas equações implicam que a aceleração é a *mesma* para os dois sistemas:

$$\boxed{\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}.} \tag{20}$$

Este resultado pode ser estendido para o caso geral em que o referencial S' se move em relação a S com movimento retilíneo e uniforme em uma direção qualquer do espaço[7]. A Figura 8 mostra um exemplo.

Assumindo que os eixos dos dois referenciais são paralelos e que as origens dos dois coincidem em $t = 0$, a relação entre as coordenadas de uma partícula P nos dois referenciais é,

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \\ t' &= t. \end{aligned}} \tag{21}$$

[7]Na realidade, ele pode ser estendido para a situação ainda mais geral em que, além do movimento de translação com velocidade $\boldsymbol{v}$, os eixos do referencial S' estão girados rigidamente por um ângulo θ em relação ao referencial S, mantendo-se ortogonais entre si. Os resultados mostrados aqui continuam válidos para este caso geral.

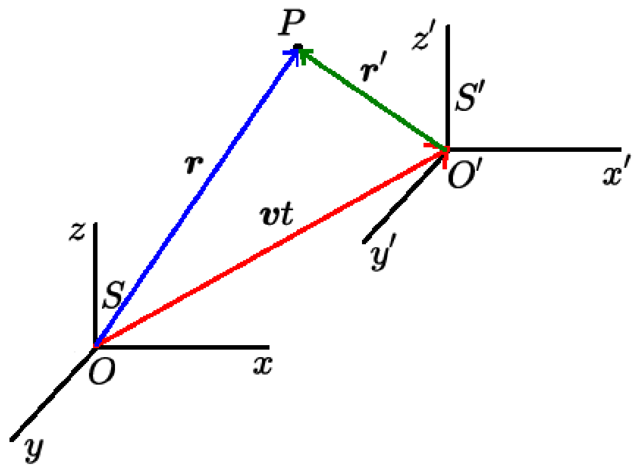

Figura 8: Vetores de posição $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ de uma partícula P em relação a dois referenciais, S e S'. S' move-se em relação a S com velocidade $\boldsymbol{v}$.

As equações (21) costumam ser chamadas de *transformação de Galileu generalizada*. A partir dela, pode-se obter as transformações generalizadas da velocidade e da aceleração, em analogia com as equações (19) e (20):

$$\boxed{\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}.} \tag{22}$$

e

$$\boxed{\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a},} \tag{23}$$

que repete (20).

Como a identidade (20) (ou (23)) é válida para dois referenciais inerciais, qualquer que seja o valor da velocidade constante relativa entre eles, dizemos que a aceleração é *invariante* sob uma transformação de Galileu. Este resultado é a característica central da relatividade na mecânica clássica (que deixa de ser correto na descrição dos movimentos segundo a relatividade especial).

Para ilustrar a aplicação dessas ideias, consideremos o exemplo simples e familiar de um corpo caindo sob a ação da gravidade. Sejam novamente os sistemas S e S' ilustrados na Figura 7. Vamos supor que em $t = 0$, quando as origens dos dois coincidem, um observador no referencial S' deixa cair um corpo a partir do repouso. Como é o movimento desse corpo visto dos referenciais S e S'?

No referencial S', que é o referencial em que o corpo é solto, o movimento do corpo é de queda livre vertical com aceleração $\boldsymbol{g}$. Já no referencial S, o corpo tem inicialmente uma velocidade horizontal v, que permanece constante ao longo do tempo, e uma aceleração para baixo $\boldsymbol{g}$. Por causa disso, sua trajetória é parabólica. As visões de observadores nos dois referenciais estão ilustradas na Figura 9.

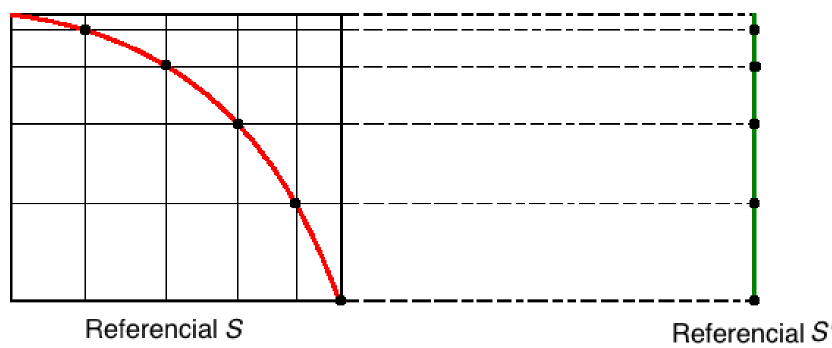

Figura 9: Trajetórias de um corpo solto a partir do repouso em $t = 0$ vistas dos referenciais S (linha vermelha) e S' (linha verde).

O importante é que observadores nos dois referenciais concordam que o movimento observado em seus respectivos referenciais é descrito pela equação $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, onde a força $\boldsymbol{F}$ que atua sobre o corpo, a massa m do corpo e a aceleração $\boldsymbol{a}$ $(= \boldsymbol{g})$ do corpo são as mesmas nos dois referenciais. Os dois sistemas são, portanto, equivalentes no que diz respeito a experimentos dinâmicos em cada um deles. Observadores em cada um dos referenciais consideram que o seu referencial está em repouso e o outro se move em relação a ele, mas todos usam as mesmas leis da mecânica clássica para descrever os movimentos observados. Este é um exemplo simples da invariância das leis da mecânica clássica entre referenciais inerciais.

A validade das leis da mecânica clássica em qualquer referencial inercial é chamada de *princípio de relatividade de Galileu*. Uma consequência do princípio de relatividade de Galileu é que é impossível detectar o movimento retilíneo e uniforme de um referencial pelo seu efeito sobre as leis da mecânica clássica. Obviamente, podemos diferenciar um referencial inercial de outro pelos valores que observadores em diferentes referenciais atribuem às condições iniciais de um dado problema ($\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{v}_0$), pois elas dependem da velocidade relativa entre os referenciais, mas as condições iniciais são arbitrárias e não afetam a dinâmica do movimento dos corpos.

Por exemplo, o movimento de translação do Sistema Solar, com velocidade aproximada de 200 km/s, não afeta as leis da mecânica clássica testadas em um laboratório na Terra. O movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, no entanto, pode ser detectado em um laboratório por seus efeitos mecânicos.