

Movimentos acelerados

Antônio Roque

Agosto 2021

1 Aceleração

De um ponto de vista puramente descritivo, a característica mais notável do movimento é a velocidade, ou taxa de variação instantânea da posição com o tempo. Em física, porém, não estamos interessados apenas em descrever o movimento, mas em encontrar sua relação com as forças responsáveis por ele. Para isto, é preciso estabelecer uma ponte entre o movimento por si só (cinemática) e as forças que o governam (dinâmica). Isto é feito pela *aceleração*.

A aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo. Portanto, as unidades de aceleração são as de velocidade (m/s) divididas pelas de tempo (s): m/s².

Usando novamente o exemplo de um corpo em movimento retilíneo, suponha que a velocidade do corpo varie com o tempo como mostrado na Figura 1.

A aceleração instantânea do corpo é definida como,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Portanto, a aceleração é a derivada primeira de v em relação a t . Em termos geométricos, ela é o coeficiente angular (inclinação) da tangente à curva $v \times t$ em um ponto t dado. Veja a Figura 1.

Por outro lado, se quisermos definir a aceleração em termos da posição $x(t)$ do corpo (visualizada pelo gráfico $x \times t$), devemos escrevê-la como a derivada segunda de x em relação a t :

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2)$$

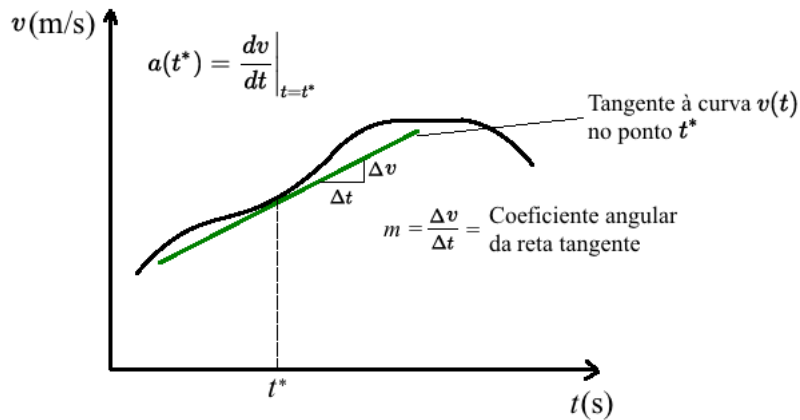


Figura 1: Aceleração instantânea de um corpo em movimento retilíneo com velocidade dada por $v(t)$. A aceleração instantânea em $t = t^*$ é dada pela derivada de $v(t)$ em t^* .

Assim como a posição e a velocidade, a aceleração também é um vetor. No caso geral, a definição vetorial da aceleração instantânea é dada por:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (3)$$

Em termos dos vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , o vetor aceleração \mathbf{a} é escrito como:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2 x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{d^2 y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Em notação matricial, o vetor aceleração pode ser representado como o vetor coluna

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Graficamente, dada a curva que representa a trajetória de uma partícula num sistema de coordenadas (por exemplo, cartesianas), as velocidades instantâneas em dois instantes de tempo t e $t + \Delta t$ são vetores tangentes à trajetória nesses instantes. A variação $\Delta \mathbf{v}$ da velocidade entre esses dois instantes é calculada como mostrado na Figura (2) e a aceleração será dada pelo limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ de $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ como definido por (3).

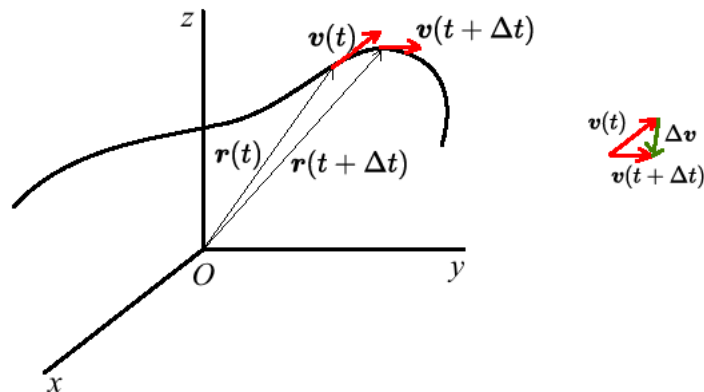


Figura 2: O desenho da esquerda mostra a trajetória da partícula e os Vetores velocidade em dois instantes de tempo (t e $t + \Delta t$). O desenho da direita mostra como determinar a variação do vetor velocidade no intervalo de tempo Δt : coloca-se os vetores $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ saindo de uma origem comum e traça-se um vetor que une a extremidade de $\mathbf{v}(t)$ à extremidade de $\mathbf{v}(t + \Delta t)$.

A observação da Figura (2) mostra que, em geral, *o vetor aceleração não é tangente à trajetória da partícula*. Outra coisa importante a notar é que, por causa da natureza vetorial da velocidade e da aceleração, *um corpo pode ter aceleração mesmo quando o módulo de sua velocidade não muda*. Uma variação na *direção* da velocidade também corresponde a uma aceleração.

Note também outra coisa: de um ponto para cá, não estamos mais usando as expressões “velocidade instantânea” e “aceleração instantânea”. Isto não é necessário, pois está sempre implícito que quando escrevemos $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ estamos nos referindo aos valores instantâneos da velocidade e da aceleração.

Seria possível definir novas grandezas associadas a derivadas de ordem superior a 2 do vetor de posição \mathbf{r} ($d^3\mathbf{r}/dt^3$, $d^4\mathbf{r}/dt^4$, ...). Porém, essas derivadas de ordem superior não acrescentam novas informações de interesse físico. Para construir o arcabouço teórico da mecânica newtoniana, basta

usar o vetor de posição \mathbf{r} e suas derivadas primeira e segunda em relação ao tempo, velocidade \mathbf{v} e aceleração \mathbf{a} .

2 Movimento retilíneo

Dado o gráfico da posição contra o tempo ($x \times t$) de um corpo em movimento retilíneo, com as ferramentas vistas até agora pode-se construir os respectivos gráficos da velocidade e da aceleração do corpo contra o tempo ($v \times t$ e $a \times t$). Um exemplo está mostrado na Figura (3).

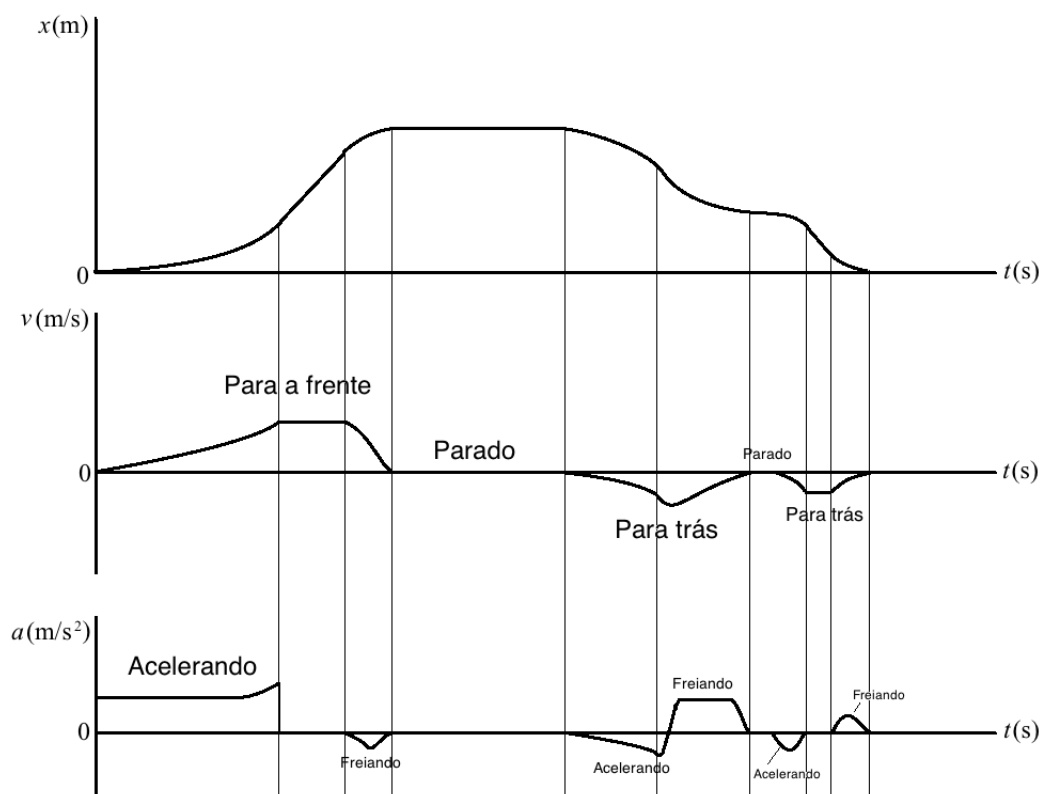


Figura 3: Gráfico da posição contra o tempo ($x \times t$) de um corpo movendo-se ao longo de uma linha reta e esboços dos gráficos correspondentes da velocidade ($v \times t$) e aceleração ($a \times t$) contra o tempo do corpo.

Os gráficos da velocidade e aceleração na Figura (3) são *esboços* dos gráfi-

cos exatos, isto é, eles foram feitos à mão usando a interpretação geométrica da derivada definida anteriormente. Normalmente, esboços desse tipo são suficientes para se ter uma noção qualitativa do comportamento da velocidade e da aceleração de um corpo com o tempo. Em casos específicos, por exemplo, em um experimento em laboratório, pode ser necessário construir gráficos mais precisos.

Uma sugestão de site para vocês praticarem, via simulações, a construção e a interpretação de gráficos de posição, velocidade e aceleração para movimentos retilíneos é o [The Moving Man](#), mantido pelo projeto PhET de simulações interativas da Universidade do Colorado em Boulder, Estados Unidos. Um vídeo didático que faz uso dessa ferramenta e que pode ser útil como complemento desta aula é o [Position vs. Time Graph - Part 2](#), de Paul Anderson (Bozeman Science).

Um problema que aparece quando trabalhamos com posição, velocidade e aceleração de um corpo em movimento retilíneo é o chamado *problema inverso*. Este problema é o seguinte: dado o gráfico da aceleração contra o tempo de um corpo, determine os gráficos da velocidade e da posição contra o tempo desse corpo.

A partir da equação (1), vemos que a variação da velocidade Δv por um tempo muito pequeno Δt é dada, aproximadamente, por

$$\Delta v = a\Delta t. \quad (7)$$

Quanto menor for Δt , melhor será esta aproximação para Δv .

O gráfico na Figura 4(A) mostra que Δv dada por (7) entre t_i e $t_i + \Delta t_i$ é igual à área do retângulo que aproxima a área abaixo da curva $a(t)$ entre esses dois instantes de tempo. Estendendo este resultado para o intervalo de tempo finito entre t_1 e t_2 , temos que a variação $\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = v_2 - v_1$ na velocidade entre os tempos t_1 e t_2 é dada pela soma das áreas retangulares similares à mostrada na figura que cobrem esse intervalo de tempo. No limite de intervalos de tempo infinitesimalmente pequenos, essa soma se iguala à área abaixo da curva de $a(t)$ entre t_1 e t_2 . Por definição, quando a é negativa, a área entre $a(t)$ e o eixo t é tomada como negativa, de maneira que a variação Δv correspondente é negativa.

Matematicamente, isto se escreve como a integral definida,

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt. \quad (8)$$

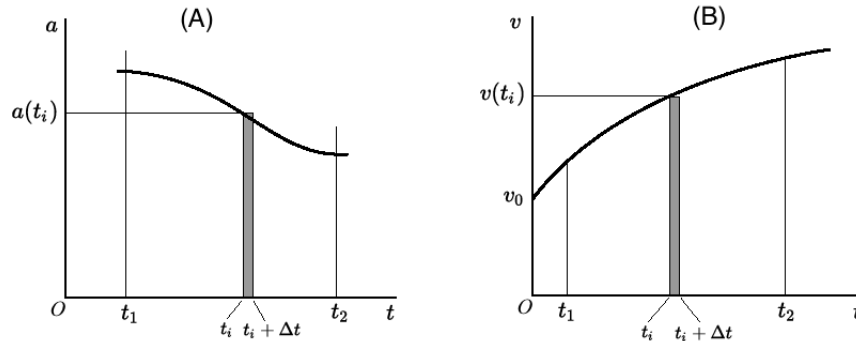


Figura 4: (A). A variação na velocidade Δv entre t_i e $t_i + \Delta t$ é aproximadamente igual à área do retângulo de lados $a(t_i)$ e Δt . (B). A variação na posição Δx entre t_i e $t_i + \Delta t$ é aproximadamente igual à área do retângulo de lados $v(t_i)$ e Δt .

Em geral, porém, a integral (8) é calculada para um tempo t indefinido a partir de um tempo feito igual a zero ($t = t_0$) para o qual a velocidade vale v_0 . Ou seja, é mais comum escrever:

$$v - v_0 = \int_0^t a(t) dt. \quad (9)$$

Note que a expressão (9) dá apenas a *variação* da velocidade durante o tempo t . A informação acerca do valor de v para $t = 0$ deve ser fornecida separadamente. O valor v_0 é um exemplo típico de uma *constante de integração* que, no caso, corresponde a uma *condição inicial*: o valor de v para o instante inicial $t = 0$.

De maneira inteiramente similar, conhecendo-se a curva que descreve a variação da velocidade v com o tempo, $v(t)$, pode-se obter a distância percorrida entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 pela área abaixo de $v(t)$ entre esses dois instantes de tempo (veja a Figura 4(B)).

Temos, então

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (10)$$

Assim como no caso da velocidade, é mais comum calcular a integral (10) entre um instante inicial $t = 0$ e um tempo t arbitrário,

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt. \quad (11)$$

Novamente, esta integral nos dá somente a variação na posição e é necessário fornecer uma constante de integração – a posição inicial x_0 em $t = 0$ – para obter uma posição específica $x(t)$.

As aplicações mais simples das equações cinemáticas (9) e (11) são bem conhecidas de você. Uma é para o caso em que a aceleração é nula ($a = 0$) e a outra é para o caso em que a aceleração é constante ($a = \text{const.}$).

a) $a = 0$

Neste caso a equação (9) nos dá,

$$v - v_0 = 0 \Rightarrow v = \text{const.} \quad (12)$$

O gráfico de $v \times t$ é uma reta paralela ao eixo das abscissas que corta o eixo das ordenadas no valor da velocidade constante v , como mostrado na Figura 5(A).

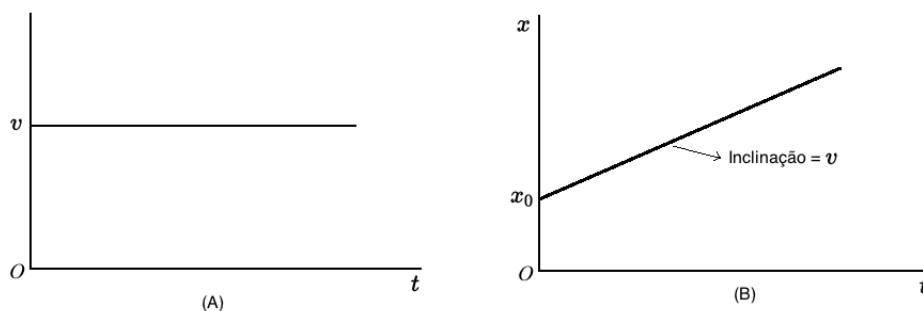


Figura 5: Gráficos de $v \times t$ (A) e $x \times t$ (B) para o movimento retilíneo com aceleração nula.

A equação (11) nos dá,

$$x - x_0 = \int_0^t v dt = v \int_0^t dt = vt, \quad (13)$$

ou

$$x = x_0 + vt. \quad (14)$$

O gráfico de $x(t)$ é uma reta de coeficiente angular v que corta o eixo das ordenadas em x_0 , como pode-se ver na Figura 5(B). Este é o chamado *movimento retilíneo uniforme* (MRU), que você viu no ensino médio.

b) $a = \text{const.}$

Quando a é uma constante, a equação (9) torna-se,

$$v - v_0 = \int_0^t a dt = a \int_0^t dt = at \Rightarrow$$

$$v = v_0 + at. \quad (15)$$

O gráfico de $v(t)$ é uma reta de coeficiente angular a que corta o eixo das ordenadas em v_0 , como pode-se ver na Figura 6(A).

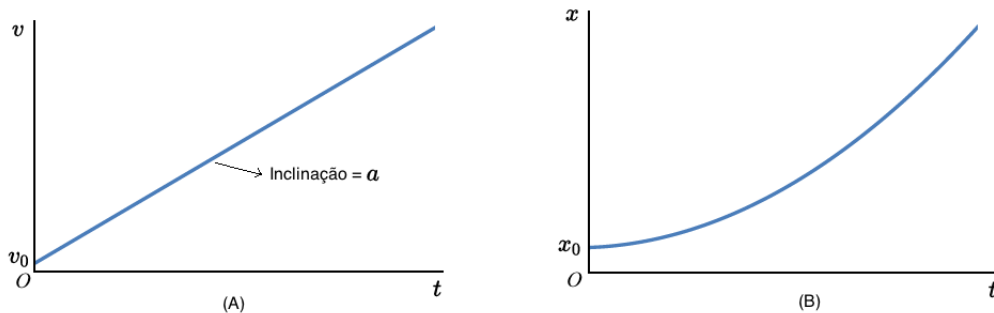


Figura 6: Gráficos de $v \times t$ (A) e $x \times t$ (B) para o movimento retilíneo com aceleração constante.

Substituindo (15) na equação (11), obtemos

$$x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \Rightarrow$$

$$x - x_0 = v_0 t + a \frac{t^2}{2} \Big|_0^t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (16)$$

O gráfico de $x(t)$ é uma curva quadrática como pode-se ver na Figura 6(B). Este é o chamado *movimento retilíneo uniformemente variado* (MRUV) estudado no ensino médio.

As equações (15) e (16) podem ser combinadas para resultar em uma equação em que o tempo não aparece. Isolando t em (15) obtemos,

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Substituindo esta expressão para t em (16):

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v - v_0}{a} \left[v_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \right] \Rightarrow \\
 x - x_0 &= \frac{v - v_0}{a} \left(v_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \right) = \frac{v - v_0}{a} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \right) = \frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2a} \Rightarrow \\
 x - x_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \Rightarrow \\
 v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Esta é a chamada equação de Torricelli, em homenagem ao físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647).

Para facilitar a consulta das equações para um movimento retilíneo uniformemente variado, repetimos abaixo as três equações de forma agrupada.

$$v = v_0 + at \tag{18}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \tag{19}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{20}$$

As equações (18)–(20) para o movimento retilíneo com aceleração constante são úteis e muito usadas, porém temos que ter em mente que nem sempre é possível que um corpo tenha aceleração constante por um tempo muito longo. Por exemplo, no caso da queda livre de um corpo sob ação da gravidade, em geral consideramos que o movimento se dá com aceleração constante igual a g ; porém, por causa da resistência do ar, que aumenta com a velocidade do corpo, a aceleração diminui com o tempo. Para velocidades pequenas, o erro ao se considerar a aceleração de queda como constante não é muito grande, mas ele existe.

Nos casos em que for importante considerar a variação da aceleração com o tempo, as equações a serem usadas não serão mais as (18)–(20), mas as equações de onde elas se originaram, a saber (9) e (11).

A importância desta seção sobre movimento retilíneo é que, embora o espaço seja tridimensional, em muitos casos é possível decompor os vetores de posição, velocidade e aceleração em suas componentes ao longo dos três eixos coordenados e trabalhar com cada uma delas separadamente. Nesses casos, mesmo sabendo que as variáveis \mathbf{r} , \mathbf{v} e \mathbf{a} são vetores, não é necessário usar a

notação vetorial porque estaremos trabalhando com componentes em apenas uma direção. É preciso, no entanto, definir uma origem e um sentido positivo para cada eixo de maneira que saibamos quando a componente do corpo é positiva ou negativa. A decisão acerca de qual sentido é positivo é arbitrária, mas depois da escolha feita devemos mantê-la até o fim (da resolução do problema).

Exemplo: Uma partícula sai em $t = 0$ da posição $x_0 = 10$ m com velocidade inicial $v_0 = 15$ m/s e aceleração constante $a = -5$ m/s². A partícula move-se ao longo do eixo x . Encontre a velocidade e a posição da partícula em $t = 8$ s.

De (18), temos:

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow$$

$$v(8) = 15 + (-5)(8) = -25 \text{ m/s},$$

e, de (19), temos:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

$$x(8) = 10 + (15)(8) + \frac{1}{2}(-5)(8)^2 = -30 \text{ m}.$$

Portanto, em $t = 8$ s a partícula está do lado negativo do eixo x e está se movendo na direção crescente de valores negativos de x . Os gráficos na Figura 7 mostram as variações na velocidade e na posição da partícula entre $t = 0$ e $t = 8$ s.

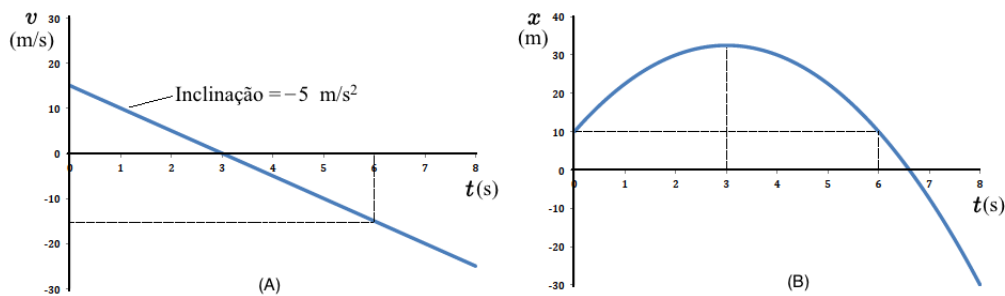


Figura 7: Gráficos de $v \times t$ (A) e $x \times t$ (B) para o exemplo em que a partícula se move com aceleração constante negativa.

Embora este seja um exemplo simples, notem a quantidade de informação que podemos obter a partir dos gráficos na Figura 7. A velocidade torna-se

nula para $t = 3$ s e, em $t = 6$ s, torna-se igual em módulo, mas de sentido contrário ao da velocidade inicial. O valor máximo de x ocorre para $t = 3$ s, que é o momento em que $v = 0$ e v troca de sinal. E a partícula retorna ao ponto de onde partiu ($x = 10$ m) em $t = 6$ s, que é quando v tem valor igual e contrário à velocidade inicial v_0 ; a área total abaixo da curva $v(t)$ entre o início e esse instante é zero (note que consideramos a área quando $v < 0$ como negativa).

Como comentário final para encerrar esta seção, a especificação das condições iniciais x_0 e v_0 para $t = 0$ não nos diz absolutamente nada a respeito do passado do movimento de um corpo. Ademais, o conhecimento desse passado não afeta em nada o movimento do corpo, pois tudo o que precisamos para prever a evolução de $x(t)$ e $v(t)$ são as condições iniciais x_0 e v_0 . Por exemplo, quando dizemos que um corpo cai em queda livre a partir de uma altura h com $v_0 = 0$, isto basta para especificar o movimento futuro do corpo. Antes disso, uma pessoa poderia ter ficado segurando o corpo à altura h por horas antes de soltá-lo, ou ele poderia ter sido jogado para o alto e parado de subir exatamente na altura h , quando sua velocidade seria instantaneamente zero. Os dois casos darão soluções exatamente idênticas para o movimento subsequente de queda do corpo a partir da altura h com $v_0 = 0$.

3 Trajetórias em duas dimensões

Nesta seção, vamos considerar o movimento de um corpo num plano, que tem aplicações importantes no movimento de projéteis e em movimentos circulares. Adotando um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , a posição de uma partícula em movimento no plano é descrita pelo par de funções $(x(t), y(t))$. Como comentado acima, à medida que a partícula descreve sua trajetória no plano, suas projeções sobre os eixos x e y descrevem movimentos unidimensionais correspondentes nesses eixos. A descrição do movimento da partícula no plano é reduzida, portanto, à de dois movimentos unidimensionais simultâneos cuja composição resulta na trajetória bidimensional da partícula.

Uma propriedade que vale aproximadamente para muitos casos, e que aparentemente foi notada pela primeira vez por Galileu Galilei (1564-1642), é que essas componentes do movimento ao longo dos eixos ortogonais x e y são *independentes*. Ou seja, cada um dos dois movimentos simultâneos separados pode ser analisado como se o outro não existisse. Apenas na hora

de representar a trajetória do corpo no plano é que se deve compor vetorialmente os dois movimentos. Essa propriedade não é exata e vale apenas quando se pode desprezar os efeitos da resistência do ar.

Um exemplo dado por Galileu para mostrar a independência dos movimentos nas direções ortogonais x e y é o da queda de um peso solto do mastro de um navio. O tempo que o peso leva para atingir o chão do navio é o mesmo, quer o navio esteja parado ou em movimento com velocidade constante. Galileu argumenta que quando o navio está em movimento, o peso solto compartilha com o navio do mesmo movimento com velocidade constante ao longo da direção horizontal; porém, este movimento não afeta o outro movimento do corpo solto, que é o de queda com aceleração constante na direção vertical. Os tempos de queda com o navio parado e em movimento são iguais porque o tempo de queda só depende do movimento na vertical. Os dois principais livros de Galileu são o *Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas do Mundo*, publicado em 1632, e os *Discursos e Demonstrações Matemáticas Referentes a Duas Novas Ciências*, de 1638, mais comumente conhecido como *Duas Novas Ciências*. Ao contrário de Newton, que escreveu seus *Principia* de forma axiomática, Galileu escreveu esses dois livros na forma de diálogos entre três personagens, Salviati, Sagredo e Simplicio, como os diálogos platônicos. Vale a pena ler esses dois livros de Galileu¹.

3.1 Movimento de projéteis

Um problema importante de trajetória no plano em que a aproximação de movimentos independentes nas direções x e y funciona bem é o do movimento de projéteis. Este foi um dos problemas estudados por Galileu em seus trabalhos. Considere que um projétil, por exemplo, uma bala de canhão, é lançado da superfície da Terra (tomada como plana) formando um ângulo θ com a horizontal como ilustrado na Figura 8.

Vamos considerar o problema sob condições ideais, o que é útil pelo menos em primeira aproximação. Essas condições idealizadas são: (i) a superfície da Terra é tomada como plana; (ii) despreza-se a resistência do ar; e (iii) a aceleração da gravidade é constante. Além disso, vamos usar a aproximação de movimentos independentes nas direções horizontal e vertical.

¹Eles estão traduzidos para o português: *Duas Novas Ciências*. Trad. de L. Mariconda e P. R. Mariconda. São Paulo: Nova Stella, 1988. *Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico e Copernicano*. Trad., Introd. e notas de P. R. Mariconda. São Paulo: Discurso Editorial/Imprensa Oficial, 2004.

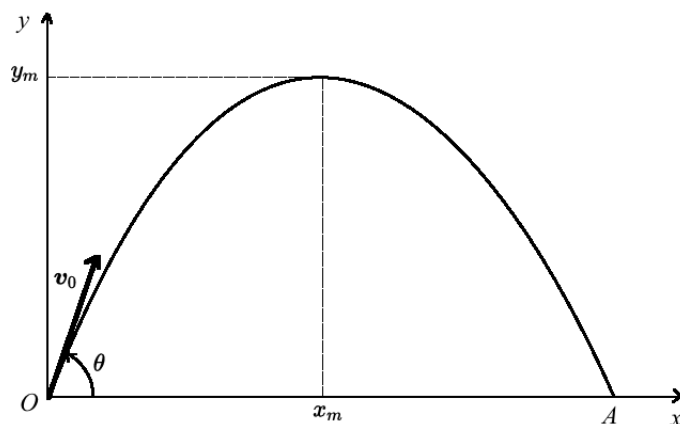


Figura 8: Esquema idealizado para o movimento de um projétil. Despreza-se a resistência do ar e assume-se que a aceleração da gravidade é constante.

Algumas perguntas que queremos responder são:

1. Quanto tempo dura a trajetória do corpo até ele atingir o solo?
2. Qual é o alcance (indicado por A na Figura 8) da trajetória?
3. Qual é a velocidade do projétil quando ele atinge o solo?
4. Qual é a máxima altura atingida pelo projétil (indicada por y_m na Figura 8) e em que ponto do eixo horizontal (indicado por x_m na Figura 8) ela é atingida?

Vamos seguir a convenção adotada na Figura 8 e considerar que o eixo x está orientado para a direita e que o eixo y está orientado para cima. Por causa disso, a aceleração da gravidade estará dirigida para baixo:

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}.$$

Note que escrevemos a aceleração da gravidade na forma vetorial, mas, por causa da independência dos movimentos nas direções x e y , não precisaremos trabalhar com vetores neste problema.

Vamos assumir as seguintes condições iniciais:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 0 \quad \text{e} \quad |\mathbf{v}_0| = v_0.$$

O vetor velocidade inicial é \mathbf{v}_0 e forma um ângulo θ com a horizontal, de maneira que suas componentes são

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (21)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta. \quad (22)$$

A chave para resolver este problema é notar que a única aceleração do corpo é a da gravidade. Portanto, a componente de seu movimento ao longo da direção horizontal tem aceleração nula e a componente de seu movimento ao longo da direção vertical tem aceleração constante $-g$. Vamos analisar os movimentos nas duas direções separadamente.

Na direção x , as equações que descrevem o movimento do projétil são as seguintes:

$$v_x = \text{const.} = v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (23)$$

$$x = x_0 + v_x t = v_0 \cos \theta t. \quad (24)$$

Na direção y as equações são:

$$v_y = v_{0y} + at = v_0 \sin \theta - gt \quad (25)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (26)$$

Tempo para atingir o solo:

Para calcular o tempo t_A em que o projétil atinge o solo, basta fazer $y = 0$ na equação (26):

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t = 0.$$

Esta é uma equação quadrática e, portanto, tem duas raízes. A primeira é o instante inicial ($t = 0$) em que $y = 0$ e a segunda é o tempo t_A que procuramos. De maneira explícita:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta}}{-g} \Rightarrow \\ t &= \frac{-v_0 \sin \theta \pm v_0 \sin \theta}{-g} \Rightarrow \\ t_A &= \frac{2v_0 \sin \theta}{g}. \end{aligned} \quad (27)$$

Alcance:

O alcance A é o valor da coordenada x no tempo t_A . Para obtê-lo, basta substituir (27) em (24):

$$A = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g}.$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

esta expressão torna-se:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta. \quad (28)$$

Uma consequência imediata da equação (28) é que o alcance é máximo quando $\theta = 45^\circ$ (pois o máximo valor da função seno ocorre quando seu argumento vale 90°).

Velocidade ao atingir o solo:

O valor da componente horizontal da velocidade é sempre o mesmo, dado por (23). Já o valor da componente vertical da velocidade quando o projétil atinge o solo é obtido substituindo t_A em (25):

$$v_y(t_A) = v_0 \operatorname{sen} \theta - g \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} = v_0 \operatorname{sen} \theta - 2v_0 \operatorname{sen} \theta = -v_0 \operatorname{sen} \theta.$$

Usando a representação matricial, o vetor velocidade quando o projétil atinge o solo é, então:

$$\mathbf{v}(t_A) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ -v_0 \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}. \quad (29)$$

O vetor velocidade inicial é

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Portanto, o vetor velocidade do projétil quando ele atinge o solo tem o mesmo módulo da velocidade inicial (v_0), a mesma componente x , mas a componente y é invertida em relação à velocidade inicial. Isto está ilustrado na Figura 9.

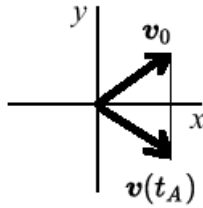


Figura 9: Velocidades de partida e de chegada ao solo do projétil.

Altura máxima:

A altura máxima atingida pelo projétil corresponde ao instante t_m em que sua velocidade vertical se anula ($v_y = 0$). Nesse instante, o projétil para de subir e começa a descer. Fazendo $v_y = 0$ em (25):

$$v_0 \operatorname{sen}\theta - gt_m = 0 \Rightarrow$$

$$t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}. \quad (31)$$

Para acharmos y_m e x_m , basta fazer $t = t_m$ em (26) e (24):

$$y_m = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} \Rightarrow$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \quad (32)$$

e

$$x_m = v_0 \cos\theta \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{2g}, \quad (33)$$

onde usamos a mesma identidade trigonométrica usada anteriormente. Note que

$$x_m = \frac{A}{2},$$

conforme poderíamos esperar pela simetria da trajetória parabólica em relação ao seu ponto de altura máxima.

Por falar em trajetória parabólica, a equação $y(x)$ que corresponde à trajetória parabólica do projétil no plano x - y pode ser obtida dividindo a equação (26) pela equação (24):

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta t - \frac{1}{2}gt^2}{v_0 \cos\theta t} = \operatorname{tg}\theta - \frac{gt}{2v_0 \cos\theta} \Rightarrow \\ \frac{y}{x} &= \operatorname{tg}\theta - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow \\ y &= \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}.\end{aligned}\tag{34}$$

Os resultados obtidos nesta seção são idealizações do que acontece de fato quando projéteis são disparados. O principal motivo é que não levamos em conta o efeito da resistência do ar. Esse efeito complica bastante o problema, pois a resistência do ar depende da forma do projétil e do módulo da sua velocidade. O módulo da velocidade do projétil é dado por $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, isto é, ele depende das componentes da velocidade do projétil ao longo dos eixos x e y . Isto causa um *acoplamento* dos movimentos na horizontal e na vertical, fazendo com que a aproximação de independência entre os movimentos nessas duas direções não seja mais válida.

3.2 Queda livre de átomos individuais

A trajetória parabólica de um corpo lançado no plano x - y sob a ação da gravidade não ocorre apenas com corpos macroscópicos como balas de canhão, mas com todo tipo de matéria. Em particular, átomos “evaporados” emitidos por “fornos” de alta temperatura também caem com a distância – em um efeito que é chamado de *queda livre de átomos* – e o efeito disso pode ser detectado com um arranjo experimental como o mostrado na Figura 10².

Os átomos saem do forno em diferentes direções e o efeito dos colimadores, que possuem aberturas muito estreitas, é selecionar um feixe bem delimitado (*colimado*). Pelo esquema da figura, vemos que para que um átomo passe pelos dois colimadores e atinja o detector ele deve sair do forno com uma

²O esquema da Figura foi utilizado por Estermann, Simpson e Stern em um experimento com átomos de césio emitidos por fornos a 450 K em uma câmara de vácuo. O artigo original é: Estermann, I., Simpson, O. C. and Stern, O. The free fall of atoms and the measurement of the velocity distribution in a molecular beam of cesium atoms. *Phys. Rev.* 71:238-249, 1947.

pequena componente da velocidade apontando para cima. Mais ou menos no ponto médio entre os dois colimadores, a componente vertical do vetor velocidade é nula e podemos considerar que nesse ponto os átomos do feixe têm velocidade totalmente na horizontal. Este será tomado como o instante inicial $t_0 = 0$ do experimento e a velocidade horizontal dos átomos será indicada por v_0 . A partir daí, os átomos viajam por uma distância fixa (1,5 m, segundo a figura) antes de atingir o detector. A queda vertical da trajetória nesse percurso é y , medida a partir do eixo horizontal (despreza-se a pequena elevação ε da trajetória em relação ao eixo horizontal no ponto médio entre os colimadores). A deflexão y não é muito grande, mas pode ser medida (veja os detalhes no artigo de Estermann, Simpson e Stern citado na nota de rodapé acima).

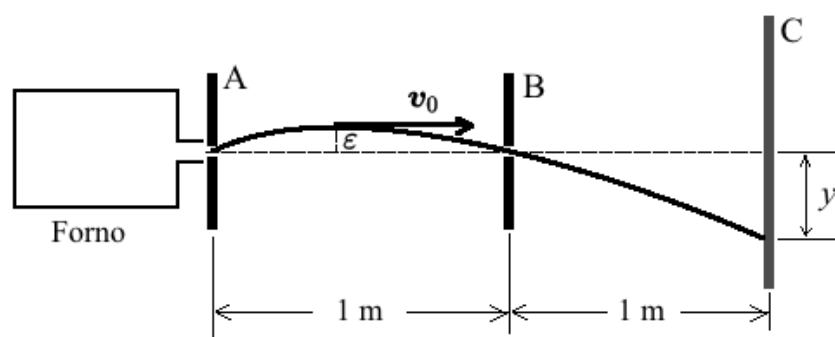


Figura 10: Trajetória parabólica de um feixe de átomos evaporados de um forno. O feixe selecionado passa através de dois colimadores A e B antes de atingir o detector C a uma distância y do eixo horizontal. No ponto médio entre A e B os átomos do feixe têm velocidade puramente na horizontal v_0 e estão a uma altura desprezível ε em relação ao eixo horizontal. O sistema todo está dentro de uma câmara de vácuo.

O cálculo da deflexão y do feixe de átomos pode ser feito usando as fórmulas para o movimento de um projétil desenvolvidas na seção anterior. O problema é inteiramente análogo ao de um projétil disparado com velocidade v_0 na direção horizontal (veja a Figura 11).

Como a velocidade inicial só tem componente na horizontal e seu módulo é v_0 , a equação (23) nos dá

$$v_x = v_0,$$

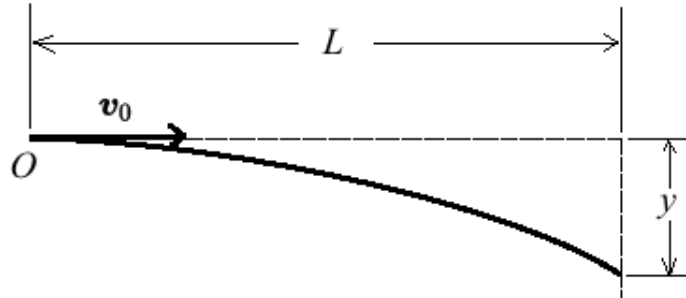


Figura 11: Esquema de lançamento de projétil para calcular a queda vertical y do problema do feixe de átomos evaporados da Figura 10.

de maneira que o deslocamento do átomo na horizontal obedece a equação

$$x = v_0 t.$$

O deslocamento total nessa direção até o átomo atingir o detector é L , e isso nos dá o tempo em que ocorre a colisão com o detector:

$$t = \frac{L}{v_0}. \quad (35)$$

Pela equação (26), a componente vertical da trajetória do átomo é

$$y = -\frac{1}{2}gt^2,$$

onde novamente escolhemos a direção positiva do eixo y apontando para cima. Substituindo o tempo dado por (35) nesta equação, obtemos a deflexão vertical do átomo:

$$y = -\frac{g}{2} \left(\frac{L}{v_0} \right)^2 \quad (36)$$

Substituindo nesta equação $L = 1,5$ m, $g = 9,8$ m/s² e supondo que os átomos saem do forno com $v_0 \approx 500$ m/s:

$$y = -\frac{9,8}{2} \left(\frac{1,5}{500} \right)^2 \approx -4 \times 10^{-5} \text{ m}. \quad (37)$$

A queda dos átomos é pequena, de aproximadamente 0,04 mm, mas ainda assim pode ser detectada porque os diâmetros do feixe atômico e do detector³ são cerca de 10 vezes menores.

O experimento descrito aqui não foi feito para comprovar a queda livre dos átomos, mas para determinar a distribuição de velocidades dos átomos e compará-la com a distribuição teórica prevista pela teoria cinética dos gases, chamada de distribuição de Maxwell-Boltzmann. Esta é uma elegante demonstração de que átomos, assim como bolas de futebol e a Lua, também seguem trajetórias curvas sob a ação da gravidade terrestre. Como o experimento foi feito no vácuo, o efeito da resistência do ar não existe e ele pode ser considerado como uma implementação mais próxima das condições ideais consideradas na dedução das equações para o movimento de projéteis do que o exemplo comumente dado de tiros de canhões.

3.3 Movimento circular uniforme

Uma das aplicações mais importantes do movimento no plano e que ilustra bem a definição vetorial de velocidade e aceleração, é o movimento circular uniforme.

Neste tipo de movimento, o vetor posição da partícula \mathbf{r} tem sempre o mesmo módulo r e descreve uma trajetória circular em torno do centro O . O vetor velocidade \mathbf{v} sempre forma um ângulo reto com \mathbf{r} e seu módulo é constante v . A situação está mostrada na Figura 12.

A partir dos desenhos na Figura 12, podemos calcular a aceleração da partícula. Durante o curto intervalo de tempo Δt , a distância percorrida pela partícula é $v\Delta t$ (reta em vermelho na Figura 12(A)) e o ângulo entre os vetores de posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ é $\Delta\theta$. O comprimento de arco s de uma circunferência de raio r subtendido por um ângulo θ é $s = r\theta$. Portanto, o ângulo $\Delta\theta$ na Figura 12(A) vale

$$\Delta\theta = \frac{v\Delta t}{r}.$$

Imagine agora a bissetriz do ângulo $\Delta\theta$, indo de O até a reta P_1P_2 , como mostrado na Figura 12(B). A bissetriz forma um ângulo reto com a reta P_1P_2 .

³O detector utilizado por Estermann, Simpson e Stern foi um fio de tungstênio aquecido. Quando um átomo de césio atinge o fio, ele se ioniza perdendo um elétron; um eletrodo próximo, com potencial negativo em relação ao fio, atrai os íons positivos e a corrente resultante pode ser medida indicando a chegada do feixe e o número de átomos que o compõem.

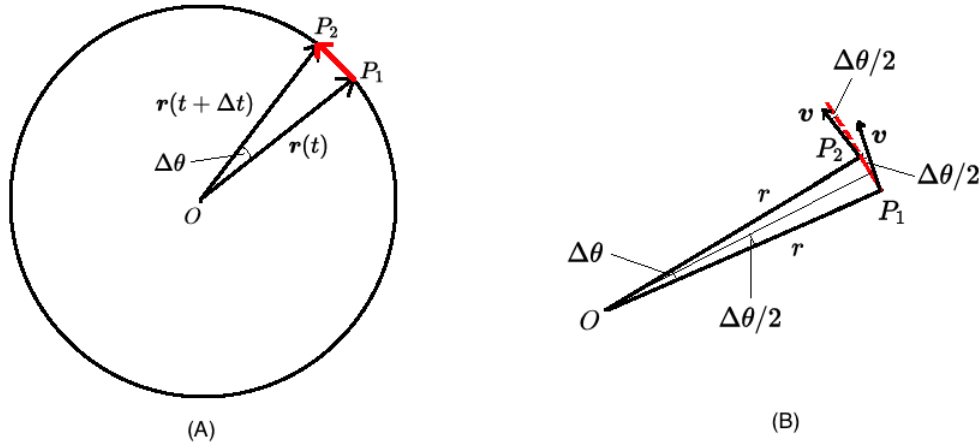


Figura 12: Movimento circular uniforme. (A) Pequeno deslocamento de um ponto P_1 a um ponto P_2 num intervalo de tempo Δt . (B) Vetores velocidade nos pontos P_1 e P_2 .

Como \mathbf{v} forma um ângulo reto com \mathbf{r} , o ângulo entre \mathbf{v} e a reta P_1P_2 é o mesmo que o ângulo entre \mathbf{r} e a reta bissetriz, que é $\Delta\theta/2$.

Então, no instante t o vetor velocidade \mathbf{v} tem componente $v \cos(\Delta\theta/2)$ na direção da reta P_1P_2 e componente $v \sin(\Delta\theta/2)$ na direção perpendicular à reta P_1P_2 , apontando *para fora* do círculo. Por outro lado, no instante $t + \Delta t$, a componente de \mathbf{v} na direção da reta P_1P_2 continua a mesma ($v \cos(\Delta\theta/2)$), mas sua componente na direção perpendicular é $v \sin(\Delta\theta/2)$ apontando *para dentro* do círculo. Portanto, os valores velocidade nos instantes t e $t + \Delta t$ podem ser escritos como

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v \cos(\Delta\theta/2) \\ v \sin(\Delta\theta/2) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} v \cos(\Delta\theta/2) \\ -v \sin(\Delta\theta/2) \end{pmatrix},$$

de maneira que a diferença entre eles é

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v \sin(\Delta\theta/2) \end{pmatrix}.$$

O módulo de $\Delta\mathbf{v}$ é, portanto,

$$|\Delta\mathbf{v}| = \Delta v = 2v \sin(\Delta\theta/2).$$

Para ângulos pequenos, pode-se aproximar

$$\text{sen}\theta \approx \theta,$$

com θ medido em radianos. Usando esta aproximação aqui, podemos escrever

$$\text{sen}(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2,$$

o que implica que

$$\Delta v = 2v(\Delta\theta/2) = v\Delta\theta.$$

Mas

$$\Delta\theta = \frac{v\Delta t}{r},$$

de maneira que temos

$$\Delta v = v^2 \frac{\Delta t}{r}.$$

Finalmente, podemos escrever o módulo da aceleração como:

$$|\mathbf{a}| = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (38)$$

Qual a direção do vetor \mathbf{a} ? Observe de novo a Figura 12. No limite de $\Delta\theta \rightarrow 0$ a reta em vermelho tende para a tangente ao círculo, de maneira que a direção perpendicular a ela é a direção radial, que liga O à circunferência. Vimos na dedução do módulo de \mathbf{a} que o vetor $\Delta\mathbf{v}$ tem componente nula na direção da reta em vermelho e componente *negativa* na direção perpendicular a essa reta. Portanto, a aceleração \mathbf{a} está na direção radial e aponta para o centro do círculo.

Nesta dedução, consideramos que a partícula move-se no sentido anti-horário ao redor do círculo. Se você refizer a dedução para uma partícula movendo-se no sentido horário, verá que o resultado será o mesmo. O módulo da aceleração será

$$a = \frac{v^2}{r}$$

e ela apontará para o centro da trajetória. Esta aceleração se chama *aceleração centrípeta* (o nome quer dizer “buscando o centro”) e ela está associada a qualquer movimento circular.

3.4 Velocidade e aceleração em coordenadas polares

O resultado da seção anterior pode ser obtido de maneira mais elegante com a ajuda de coordenadas polares (para relembrar o que são coordenadas polares, veja a Seção 4.1 da Aula 4).

Primeiramente, representamos o vetor de posição da partícula em coordenadas polares por

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}. \quad (39)$$

Note que em coordenadas polares o vetor de posição \mathbf{r} só tem componente ao longo da direção radial. Agora vamos representar a mudança de \mathbf{r} em um tempo curto Δt . De maneira geral, o vetor \mathbf{r} pode ter uma mudança no módulo ou na direção, ou em ambos. No caso do movimento circular o módulo de \mathbf{r} é constante, portanto ele só pode ter mudança na sua direção. Esta mudança está mostrada na Figura 13(A).

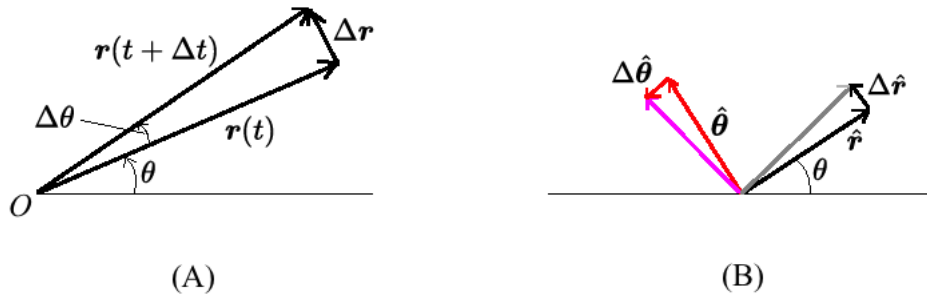


Figura 13: (A) Mudança no vetor de posição \mathbf{r} durante um pequeno intervalo de tempo Δt em um movimento circular uniforme. (B) Mudanças nos vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ durante o mesmo intervalo de tempo. A mudança em $\hat{\mathbf{r}}$ é paralela e no mesmo sentido de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e a mudança em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é paralela e no sentido oposto a $\hat{\mathbf{r}}$.

Pela Figura 13(A), vemos que a mudança $\Delta\mathbf{r}$ no vetor posição é ortogonal a \mathbf{r} . Ela aponta na mesma direção do vetor unitário $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, como mostrado na Figura 13(B), e seu módulo é $r\Delta\theta$, de maneira que podemos escrever

$$\Delta\mathbf{r} = r\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Dividindo por Δt e tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos o resultado

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (40)$$

Vamos definir a velocidade angular da partícula por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (41)$$

A velocidade angular é medida em radianos/segundo (rad/s). No caso geral, ω pode variar com o tempo, mas para um movimento circular uniforme ela é constante. Em termos de ω , a equação (41) fica:

$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\boldsymbol{\theta}} = v \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (42)$$

Um fato importante mostrado pela Figura 13(B) é que durante o movimento circular os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ mudam com o tempo. Embora seus módulos sejam constantes (iguais a 1), suas direções e sentidos mudam com o tempo seguindo as mudanças no vetor de posição \mathbf{r} .

No caso de $\hat{\mathbf{r}}$, podemos obter uma expressão para sua variação fazendo $r = 1$ na equação (40):

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (43)$$

No caso de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, se os incrementos em θ são positivos como é o caso aqui, vemos pela Figura 13(B) que sua variação aponta no sentido de $-\hat{\mathbf{r}}$. Ela é dada por

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{r}} = -\omega \hat{\mathbf{r}}. \quad (44)$$

Esta possível dependência temporal dos vetores unitários do sistema de coordenadas polares é uma característica deste sistema de coordenadas que não existe para o sistema de coordenadas cartesiano, em que os vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ têm, por definição, as mesmas direções e sentidos para todos os valores do vetor de posição \mathbf{r} .

Agora que mostramos como os vetores unitários em coordenadas polares mudam com o tempo em um movimento circular, podemos calcular a aceleração da partícula tomando a derivada da velocidade \mathbf{v} em (42):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Como no movimento circular uniforme r e ω são constantes,

$$\mathbf{a} = \omega r \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}}. \quad (45)$$

De (42) temos que $v = \omega r \Rightarrow \omega = v/r$. Logo, podemos escrever

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}, \quad (46)$$

Este é o mesmo resultado que obtivemos na Seção 3.3, só que agora a dedução já nos deu diretamente o módulo, a direção e o sentido de \mathbf{a} .

No caso mais geral em que o movimento circular não é uniforme, ou seja, se o módulo da velocidade v puder variar com o tempo, a aceleração da partícula terá uma componente ao longo da direção $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ também. A expressão geral para \mathbf{a} pode ser obtida diretamente com o uso das equações (43) e (44). Vamos deduzi-la abaixo de uma maneira que servirá para recapitular as passagens feitas acima.

Posição:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}. \quad (47)$$

Velocidade:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}.$$

Substituindo (43) nesta expressão:

$$\mathbf{v} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (48)$$

Aceleração:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

Substituindo (44) nesta expressão:

$$\mathbf{a} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}. \quad (49)$$

Como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} = \omega,$$

a aceleração \mathbf{a} pode ser escrita em termos de v como,

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (50)$$

ou ainda, em termos de ω como,

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\omega}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (51)$$