Estimativa de ordem de grandeza

Antônio Roque

Agosto 2022

1 Motivação

O trecho entre aspas a seguir é uma tradução livre de partes do texto da página web Order of Magnitude Estimation da Universidade Dartmouth (*Dartmouth College*), uma das principais instituições acadêmicas do mundo:

"O aprendizado da ciência não é sobre memorizar fatos, equações e números, mas desenvolver entendimento conceitual e intuição para resolver problemas. Estas são as habilidades mais versáteis que um estudante pode desenvolver, pois são úteis em uma ampla variedade de situações e não apenas nas ciências. Uma ferramenta bem conhecida para aperfeiçoar essas habilidades é a *estimativa de ordem de grandeza* (também conhecida como "problema de Fermi"[1]). Ao resolver problemas de ordem de grandeza, usa-se o conhecimento existente para fazer um palpite abalizado [um "chute" bem dado] acerca do valor aproximado de um parâmetro ou quantidade. Uma estimativa bem feita implica que ela fica distante da "resposta correta" por aproximadamente um fator de 10 [dez vezes maior ou menor]; o interesse não é no cálculo exato, mas em ganhar algum entendimento geral a respeito da questão sob estudo".

"Essas questões são normalmente ensinadas a e usadas por estudantes avançados nas ciências, mas estudantes mais jovens se beneficiariam muito se se acostumarem a praticá-las desde o início de seus estudos".

[1]Isto porque o físico italiano Enrico Fermi (1901-1954), ganhador do prêmio Nobel, era muito bom em fazer estimativas bem razoáveis de ordens de grandezas de fenômenos e medidas físicas tendo por base apenas a informação disponível antes da medida (NdT).

2 Conhecimento básico útil

Uma das características que distingue um bom cientista é a capacidade de fazer estimativas de ordem de grandeza a partir de conhecimentos básicos. Alguns desses conhecimentos básicos estão listados abaixo (notem que não são dados valores exatos, mas aproximados; valores exatos de algumas dessas grandezas podem ser encontrados nos livros indicados no roteiro da disciplina).

Grandezas físicas

Aceleração da gravidade (g)	10 m/s^2
Densidades de líquidos e sólidos	10^3-10^4 kg/m^3
Densidade do ar ao nível do mar	1 kg/m^3 (aprox.)
Duração do dia	10^5 s (aprox.)
Duração do ano	3,16 $\times$ 10^7 s
Raio da Terra	6400 km
Ângulo subtendido pela largura de um dedo com o braço esticado	1°(aprox.)
Grossura de uma folha de papel	0,1 mm (aprox.)
Massa de um clipe de papel	0,5 g (aprox.)
Montanhas mais altas, maior profundidade oceânica	10 km (aprox.)
Distância Terra-Lua	3,8 $\times$ 10^5 km
Distância Terra-Sol	1,5 $\times$ 10^8 km
Pressão atmosférica	Equivalente ao peso de uma coluna de água de 1 m^2 de área e 10 m de altura
Número de Avogadro	6,0 $\times$ 10^{23}
Massas atômicas	1,6 $\times$ 10^{-27} kg a 4 $\times$ 10^{-25} kg
Dimensão linear ("diâmetro") de um átomo	10^{-10} m (aprox.)
Moléculas/cm^3 em gás a CNTP	2,7 $\times$ 10^{19}
Átomos/cm^3 em sólidos	10^{23} (aprox.)
Carga elétrica elementar (e)	1,6 $\times$ 10^{-19} C
Massa do elétron	10^{-30} kg (aprox.)
Velocidade da luz (c)	3 $\times$ 10^8 m/s
Comprimento de onda da luz	6 $\times$ 10^{-7} m (aprox.)

Grandezas matemáticas

$\pi^2 \approx 10$	$\log_{10} 4 \approx 0{,}60$
$e \approx 2{,}7$	$\log_{10} e \approx 0{,}43$
$\log_{10} 2 \approx 0{,}30$	$\log_{10} \pi \approx 0{,}50$
$\log_{10} 3 \approx 0{,}48$	$\log_e 10 = \ln 10 \approx 2{,}3$
Ângulo (radianos) = comprimento de arco/raio	Círculo completo = 2π rad
1 rad $\approx 0{,}16 \times$ círculo completo = 57°	
Ângulo sólido (esferorradiano) = área da esfera/(raio)^2	Esfera completa = 4π sr

Aproximações

Teorema do binômio:	
Para $x \ll 1$,	$(1+x)^n \approx 1 + nx$
p. ex.	$(1+x)^3 \approx 1 + 3x$
	$(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \approx (1+x)^{-1/2}$
Para $b \ll a$,	$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \approx a^n \left(1 + n\frac{b}{a}\right)$
Outras expansões:	
Para $\theta \ll 1$ rad,	$\mathrm{sen}\theta \approx \theta$
	$\cos\theta \approx 1$
Para $x \ll 1$,	$\ln(1+x) \approx x$
	$\log_{10}(1+x) \approx 0{,}43\ x$

3 Exemplos

A seguir, damos alguns exemplos de estimativas de ordem de grandeza. Note que não existem respostas *certas* para problemas de estimativa de ordem de grandeza; o que se espera é que a resposta seja razoável (isto é, não seja um absurdo) e esteja relativamente próxima do valor verdadeiro, caso ele seja conhecido (isto é, difira por um fator 10 ou 10^2 dele). Por causa disso, estimativas são feitas usando notação científica (potências de 10) e o importante é determinar o expoente. A mantissa (termo que multiplica a potência de 10) normalmente é arredondada para ter um ou dois algarismos significativos. Uma dica importante é sempre manter as unidades nos cálculos feitos, pois isso auxilia na obtenção do resultado.

Exemplo 1. Estime o número de átomos de ferro na cabeça de um prego.

Vamos considerar um prego de cabeça chata com diâmetro de 3 mm. A área da cabeça do prego é então:

$$A_{\text{cabeça}} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}d^2 \approx 0{,}8 \times (3 \times 10^{-3}\text{ m})^2 \approx 7 \times 10^{-6}\text{ m}^2.$$

O diâmetro de um átomo de ferro é (procure na internet) $2{,}8 \times 10^{-10}$ m. Portanto, a área correspondente a um átomo de ferro é:

$$A_{\text{Fe}} \approx 0{,}8 \times (2{,}8 \times 10^{-10}\text{ m})^2 \approx 6{,}3 \times 10^{-20}\text{ m}^2.$$

O número estimado de átomos de ferro na cabeça do prego é:

$$N = \frac{A_{\text{cabeça}}}{A_{\text{Fe}}} = \frac{7 \times 10^{-6}\text{ m}^2}{6,3 \times 10^{-20}\text{ m}^2} \approx 10^{14}.$$

Exemplo 2. Durante a vida de uma pessoa, quantas vezes seu coração bate? E quantas respirações são feitas?

Vamos considerar uma pessoa com a expectativa de vida no Brasil: 77 anos. Em minutos, isso corresponde a

$$77 \times 365 \times 24 \times 60 = 40.771.200 \approx 4{,}1 \times 10^7\text{ min}.$$

O número de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa saudável varia entre 60 e 90 batidas por minuto (bpm); vamos tomar como valor representativo 75 bpm. Portanto, o número de vezes que o coração de uma pessoa bate durante sua vida é estimado como:

$$N = 4{,}1 \times 10^7\text{ min} \times 75\text{ bpm} = 307{,}5 \times 10^7 \approx 3 \times 10^9\text{ batidas}.$$

Já o número de respirações por minuto de uma pessoal saudável está entre 12 e 20 respirações por minuto (rpm). Vamos tomar como valor típico 16 rpm. Portanto, o número de respirações que uma pessoa faz durante sua vida é estimado como:

$$N = 4{,}1 \times 10^7\text{ min} \times 16\text{ rpm} = 65{,}6 \times 10^7 \approx 6{,}6 \times 10^8\text{ respirações}.$$

Exemplo 3. O Sol está perdendo massa (na forma de energia radiante) ao ritmo de 4 milhões de toneladas por segundo. Que fração de sua massa foi perdida ao longo da história do sistema solar?

A idade estimada do sistema solar (procure na internet) é de 5 bilhões de anos. Em segundos, esta idade vale:

$$5 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} \approx 1{,}6 \times 10^{17} \text{ s}.$$

A massa perdida pelo Sol a cada segundo é:

$$m = 4000000 \, \frac{\text{ton}}{s} = 4 \times 10^6 \, \frac{\text{ton}}{s} = 4 \times 10^6 \times 10^3 \, \frac{\text{kg}}{s} = 4 \times 10^9 \, \frac{\text{kg}}{s},$$

pois 1 tonelada $= 10^3$ kg. Portanto, a massa total perdida pelo Sol durante a existência do sistema solar foi:

$$M_{\text{perdida}} \approx 1{,}6 \times 10^{17} \, s \times 4 \times 10^9 \, \frac{kg}{s} \approx 6{,}4 \times 10^{26} \text{ kg}.$$

A massa do Sol é (procure na internet):

$$\mathrm{M}_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Portanto, a fração da massa solar perdida na forma de radiação desde o início do sistema solar é:

$$\frac{M_{\text{perdida}}}{\mathrm{M}_\odot} = \frac{6{,}4 \times 10^{26} \text{ kg}}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 3{,}2 \times 10^{-4},$$

ou 0,032% de $\mathrm{M}_\odot$.

Exemplo 4. Partindo da estimativa da kilometragem total que um pneu de um carro deve rodar antes de se gastar totalmente, estime a espessura de borracha que é gasta a cada volta da roda. Considere o possível significado físico de seu resultado.

A Figura 1 mostra as medidas de um pneu do tipo 175/80 R14 (qualquer outro pneu poderia ser usado aqui; escolhi este para ter um caso concreto).

Dos dados da figura, podemos estimar o diâmetro do pneu como:

$$14\text{''} + 2 \times (0,8 \times 175 \text{ mm}) \approx 35{,}6 \text{ cm} + 2 \times (0,8 \times 17{,}5 \text{ cm}) = 63{,}6 \text{ cm}.$$

Logo, a circunferência do pneu pode ser estimada como:

$$\ell = 2\pi \frac{63{,}6 \text{ cm}}{2} \approx 6{,}3 \times 31{,}8 \text{ cm} = 200{,}3 \text{ cm} \approx 2 \text{ m}.$$

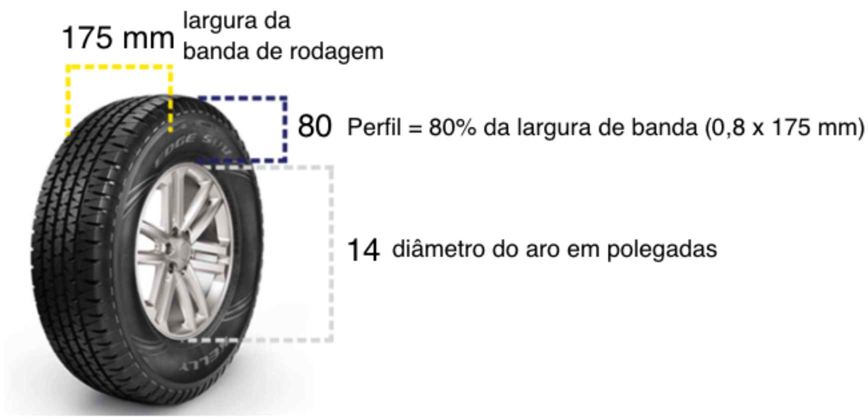

Figura 1: Medidas de um pneu.

O número de voltas dadas pelo pneu a cada km rodado é, então:

$$\frac{1000 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 500 \text{ voltas}.$$

Normalmente, um pneu novo pode rodar de 70 a 80 mil quilômetros antes de ser trocado. Porém, como estamos interessados aqui na "gastura" total do pneu vamos considerar o limite superior extremo de 100 mil quilômetros. O número de voltas que o pneu dá nesses 100.000 km pode ser calculado pela seguinte regra de três:

$$\begin{array}{rcr} 500 \text{ voltas} & — & 1 \text{ km} \\ x \text{ voltas} & — & 10^5 \text{ km} \end{array}$$

$$x = 10^5 \times 5 \times 10^2 = 5 \times 10^7 \text{ voltas}.$$

Precisamos agora estimar o que se quer dizer com "gastar totalmente". Obviamente, ningém roda com um pneu até ele chegar à roda. A espessura da borracha do penu novo é $0,8\times$ 17,5 cm $=$ 14 cm. Vamos considerar que o pneu está bem gasto quando sua espessura cai para 4 cm, ou seja, depois de serem gastos 10 cm. Considerando que esses 10 cm de borracha são gastos durante as 5×10^7 voltas que o pneu dá em sua vida útil, a espessura de borracha gasta em uma volta é:

$$\begin{array}{rcr} 5 \times 10^7 \text{ voltas} & — & 10 \text{ cm} \\ 1 \text{ volta} & — & x \text{ cm} \end{array}$$

$$x = \frac{10}{5 \times 10^7} = 2 \times 10^{-7} \text{ cm} = 2 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

Considerando que as dimensões atômicas são da ordem de 10^{-10} m, podemos concluir que a cada volta do pneu, aproximadamente uma camada molecular é perdida.

Exemplo 5. Estima-se que existem aproximadamente 10^{80} prótons no universo conhecido. Se todos esse prótons fossem compactados no interior de uma esfera de maneira a preenche-la totalmente, qual seria o raio da esfera? Ignore o espaço que fica livre no interior da esfera quandos os prótons são compactados e considere que o raio de um próton é de aproximadamente 10^{-15} m.

Desprezando o espaço livre deixado pelos prótons no interior da esfera, podemos estimar que o volume total ocupado pelos prótons é igual ao volume total da esfera. O volume de um próton é

$$V_p = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(10^{-15} \text{ m}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 10^{-45} \text{ m}^3,$$

e o volume dos 10^{80} prótons é

$$V = 10^{80} \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-45} \text{ m}^3 = \frac{4}{3}\pi \times 10^{35} \text{ m}^3.$$

Igualando este volume ao volume da esfera cujo raio R queremos estimar:

$$\frac{4}{3}\pi \times 10^{35} \text{ m}^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 10^{35/3} \text{ m} \approx 10^{12} \text{ m}.$$

Exemplo 6. Esferas idênticas do mesmo material são empacotadas de forma compacta em um dado volume de espaço. Supondo que as dimensões lineares do volume são grandes comparadas com o raio de cada uma das esferas, estime a massa total contida no volume em termos da densidade do material.

Vamos denominar a dimensão linear característica do volume ocupado pelas esferas de L. Portanto, a ordem de grandeza do volume é

$$V \sim L^3.$$

Se o raio de cada esfera é muito menor que L, podemos supor que as esferas preenchem quase completamente o volume V (quanto menor o raio das esferas, melhor é essa aproximação). Então, a massa M total das esferas no interior do volume V é

$$M = \rho V \approx \rho L^3.$$

Exemplo 7. Estime o número de moléculas na atmosfera terrestre.

O primeiro passo para resolver este problema é estimar o volume da atmosfera terrestre. A área da superfície da Terra é

$$4\pi\left(R_{\mathrm{T}}\right)^2 \approx 12{,}6 \times \left(6{,}4 \times 10^6 \text{ m}\right)^2 \approx 5{,}2 \times 10^{14} \text{ m}^2.$$

Considerando que a altura da atmosfera terrestre é de 20 km, o volume da atmosfera é então:

$$V = \left(5{,}2 \times 10^{14} \text{ m}^2\right) \times \left(2 \times 10^4 \text{ m}\right) \approx 10^{19} \text{ m}^3.$$

Para determinar o número de moléculas no volume V, vamos supor que a atmosfera é um gás ideal. O volume ocupado por um mol de gás ideal a CNTP é 22,4 L ou 22,4 $\times 10^{-3}$ m^3. O número de moléculas em um mol é igual ao número de Avogadro, 6×10^{23}. Portanto, o número de moléculas na atmosfera pode ser estimado pela regra de três:

$$\begin{array}{rcr} 6 \times 10^{23} & — & 22{,}4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ N & — & 10^{19} \text{ m}^3 \end{array}$$

$$N = \frac{6 \times 10^{42}}{22{,}4 \times 10^{-3}} \approx 3 \times 10^{44} \text{ moléculas.}$$

Exemplo 8. Em uma palestra dada em 1940, o físico inglês sir James Jeans (1877-1946) disse que cada vez que um de nós respira, há uma boa probabilidade de que no ar que inspiramos haja pelo menos uma molécula que estava no último suspiro de Júlio César (assassinado por Brutus em 44 a.C). Estime se esta hipótese pode estar correta.

A cada inspiração dada, entra em nossos pulmões cerca de 400 centímetros cúbicos de ar. Um centímetro cúbico de ar contém cerca de 2,7 $\times 10^{19}$ moléculas, de maneira que, durante uma inspiração, a quantidade de moléculas que entra em nossos pulmões é

$$400 \times 2{,}7 \times 10^{19} \approx 10^{22} \text{ moléculas.}$$

No exemplo anterior, estimamos que a atmosfera terrestre contém cerca de 3×10^{44} moléculas.

Como o último suspiro de César foi há muito tempo e as moléculas expelidas em uma respiração tendem a se difundir aleatoriamente por todas as direções do espaço, já houve tempo mais que suficiente para todas as moléculas da última lufada de ar exalada por César se espalharem por toda a atmosfera. Portanto, é razoável assumir que séculos depois da morte de César, as 10^{22} moléculas que estavam em sua última respiração estejam agora uniformemente espalhadas por toda a atmosfera terrestre. A razão entre o número de moléculas na atmosfera e o número de moléculas em uma respiração é

$$\frac{3 \times 10^{44}}{10^{22}} = 3 \times 10^{22}.$$

Isso significa que o volume total da atmosfera pode ser subdividido em 3×10^{22} volumes, cada um contendo a quantidade de ar em uma inspiração. Em média, cada um desses volumes tem uma das moléculas que estavam no último suspiro de César. Portanto, a afirmação de sir James Jeans pode estar correta.

Ao longo do curso (e da vida), você encontrará outras situações em que será conveniente (ou necessário) fazer estimativas e aproximações. Portanto, é bom ter o costume de fazer estimativas para se manter "afiado" neste tipo de atividade. Para praticar com mais exercícios, procure na internet por "problemas de Fermi" ou, em inglês, *Fermi problems*.