

MAT0120 - ÁLGEBRA LINEAR I

Lista 1 IAG- 2023

1. Determine se a equação é linear nas incógnitas x , y e z . Em caso positivo, encontre o conjunto solução da equação.

(a) $2x + 6y = 12z$

(b) $x - y = (z - 1)(z + 1)$

(c) $5x + 5z = \ln(2)$

(d) $x^3 + y^3 = z^3$

(e) $x - \sqrt[3]{2}y = z + 1$

(f) $6x = t^6$, onde $t \in \mathbb{R}$ é uma constante.

2. Determine a , b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ contenha os pontos $(1, 9)$, $(-1, 6)$ e $(-2, 12)$. Existe uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ contendo os pontos $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(0, 1)$?

3. Resolva os seguintes sistemas:

(a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 = 2 \\ x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{cases}$$

4. Em cada item, resolva o sistema, determinando a quantidade de soluções, e em seguida esboce cada equação do sistema, interpretando-as como o gráfico de uma reta no plano xy . Relacione as interseções das retas com as soluções dos sistemas.

(a)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} x + 4y = -3 \\ x = -3 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$

5. Encontre condições que as constantes b_i devem satisfazer para que o sistema abaixo seja compatível:

(a)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = b_4 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

6. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- Resolva o sistema, determinando o conjunto solução e a quantidade de soluções.
- Acrescente uma equação linear ao sistema sem mudar o seu conjunto solução.

- Acrescente uma equação linear ao sistema de forma que o sistema tenha uma única solução.
- Acrescente uma equação linear ao sistema de forma que o sistema tenha nenhuma solução.
- É possível acrescentar uma equação linear ao sistema de forma que ele possua infinitas soluções, mas seu conjunto solução seja diferente do conjunto solução do sistema original?

7. Usando operações elementares na matriz aumentada dos sistemas lineares abaixo, justifique para quais valores de a e b os sistemas não têm solução, têm exatamente uma solução e têm infinitas soluções.

$$(a) \begin{cases} x + y - az = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x + (1-a)y - 2z = 2-2a \\ 2x + 3y - (2+a)z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + az = a+b+1 \\ 2x + 3y + az = 3a+2b+1 \\ x + y + 2az = 2b+2 \end{cases}$$

8. Decida se os sistemas S_1 e S_2 são ou não equivalentes.

$$(a) S_1 : \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4y - 4z = 3 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} y - z = \frac{3}{4} \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$(b) S_1 : \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 4 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 11 \end{cases}$$

$$(c) S_1 : \begin{cases} x + 6y + 2z + w = 1 \\ 3y + z = 1 \\ -x - w = -1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} 6y + 2z = 2 \\ x + w = 1 \\ x + w = -1 \end{cases}$$

9. Em cada caso, encontre condições sobre os números a e b para que o sistema dado tenha nenhuma solução, uma única solução, ou infinitas soluções. Além disso, resolva o sistema quando for consistente.

$$(a) \begin{cases} ax + y = -1 \\ 2x + y = b \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + ay = 1 \\ bx + 2y = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 7y + 6z = -1 \\ 2x + 4y + (a^2 + 1)z = b - 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$$

10. As afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**? Justifique, provando as verdadeiras ou exibindo um contraexemplo, quando a afirmação for falsa.

(a) Um sistema linear de 3 equações e 5 incógnitas é sempre consistente.

(b) Um sistema de equações homogêneo de 3 equações e 5 incógnitas é sempre consistente.

(c) Se a forma escalonada da matriz aumentada de um sistema de n equações e n incógnitas tiver n pivôs então o sistema tem uma única solução.

- (d) Se um sistema de n equações com n incógnitas tiver duas equações que são múltiplas uma da outra, então o sistema será consistente com infinitas soluções.
- (e) Se um sistema consistente de n equações e n incógnitas tiver duas equações que são múltiplas uma da outra então o sistema terá infinitas soluções.
- (f) Se três retas do plano xy são lados de um triângulo, então o sistema de equações formado pelas equações das três retas tem três soluções, cada uma correspondendo a um vértice do triângulo.

RESPOSTAS

- (a) $(6r - 3t, t, r), r, t \in \mathbb{R}$; (b) A equação não é linear em z ; (c) $(\frac{\ln(2)}{5} - r, t, r), r, t \in \mathbb{R}$;
(d) A equação não é linear em x, y e z ; (e) $(1 + \sqrt[3]{2}t + s, t, s), r, t \in \mathbb{R}$; (f) $(\frac{t^6}{6}, r, s), r, s \in \mathbb{R}$.
- $y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 5$; Não existe tal parábola.
- (a) Inconsistente; (b) $(1, 3, 1)$; (c) $(1 - r - s, 2 - r - 2s - t, r, 3 - 3t, s, t), r, s, t \in \mathbb{R}$;
(d) $(2 - t, 2 + 2t, t), t \in \mathbb{R}$.
- (a) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; (b) Inconsistente; (c) $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$; (d) $(0, 2)$ (e) $(-3, 0)$ (f) $(t, 1 + 2t), t \in \mathbb{R}$.
- (a) $b_1 = b_2 + b_3$; (b) $b_1 = b_3 + b_4$ e $b_2 = 2b_3 + b_4$; (c) $b \in \mathbb{R}$; (d) $b \neq 2$.
- $(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}, \frac{1}{2} + \frac{t}{2}, t), t \in \mathbb{R}$.
- (a) Tem uma única solução quando $a \neq 2$ e $a \neq -1$. Não tem soluções quando $a = -1$. Tem infinitas soluções quando $a = 2$.
(b) Tem infinitas soluções quando $a = 0$ e $b = -1$. Não tem soluções quando $a = 0$ e $b \neq -1$. Tem uma única solução quando $a \neq 0$.
- Nos três casos, os sistemas são equivalentes.
- (a) Se $a = 2$ e $b \neq -1$, o sistema é inconsistente.
Se $a = 2$ e $b = -1$, o sistema é consistente com infinitas soluções:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t\right), t \in \mathbb{R}$$

Se $a \neq 2$ o sistema é consistente com uma única solução $\left(\frac{b+1}{2-a}, -\frac{2+ab}{2-a}\right)$.

- (b) Se $ab \neq 2$ o sistema é consistente com uma única solução.
Se $ab = 2$ e $b = 5$ (ou seja $a = \frac{2}{5}$) o sistema é consistente com infinitas soluções.
Se $ab = 2$ e $b \neq 5$ o sistema é inconsistente.
- (c) Se $a = \pm 1$ e $b \neq -1$, o sistema é inconsistente.
Se $a = \pm 1$ e $b = -1$, o sistema é consistente com infinitas soluções:

$$(-5 + 5t, 2 - 3t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Se $a \neq \pm 1$ o sistema é consistente com uma única solução

$$\left(-5 + 5\frac{b+1}{a^2-1}, 2 - 3\frac{b+1}{a^2-1}, \frac{b+1}{a^2-1}\right).$$

- (d) Se $a \neq 0$ e $b = 2$ o sistema é consistente com infinitas soluções.
Se $a \neq 0$ e $b \neq 2$ o sistema é consistente com uma única solução.
Se $a = 0$, e $b = 2$ o sistema é consistente com infinitas soluções.
Se $a = 0$ e $b \neq 2$ o sistema é inconsistente.