UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

disciplina "NOÇÕES DE ESTATISTICA"

Parte 4: "Variável Aleatória de Bernoulli"

Ministrante: Vladimir Belitsky
docente do Dep. de Estatística
do IME-USP

A presente apresentação resume o conteúdo do Capítulo 4 do livro "Probabilidade e Estatística Básicas para meus Filhos" que trata da variável aleatória de Bernoulli.

Definição e propriedades básicas 1/1

Para qualquer valor de p no intervalo $[0,1]$, a distribuição

valor	0	1
probabilidade	$1-p$	p

chama-se **distribuição de Bernoulli de parâmetro** p.
A variável aleatória que tem essa distribuição, chama se **variável aleatória de Bernoulli de parâmetro** p.

No que segue-se, usaremos frequentemente a escrita

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

que abrevia com uso de símbolos matemáticos a frase "a variável aleatória X é de Bernoulli de parâmetro p" ou "a variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p".

Proposição 1. *sobre a esperança matemática e a variância da distribuição de Bernoulli.*

Se $X \sim$ Bernoulli(p) então

$$\boldsymbol{E}[X] = p \text{ e } \mathrm{Var}[X] = p(1-p) \tag{1}$$

Demostração da Proposição 1.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[X] &= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p; \\
\mathrm{Var}[X] &= \boldsymbol{E}[X^2] - \big(\boldsymbol{E}[X]\big)^2 = \big(0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p\big) - \big(\boldsymbol{E}[X]\big)^2 \\
&= p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}$$

O gráfico da função de probabilidade da variável aleatória de Bernoulli.

valor	0	1
probabilidade	0.2	0.8

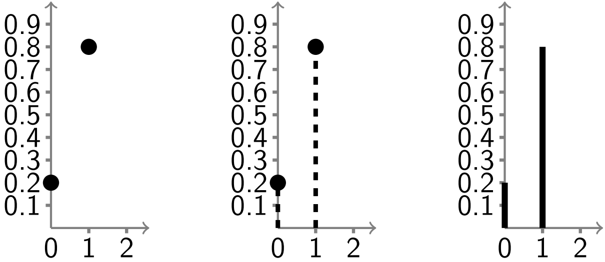
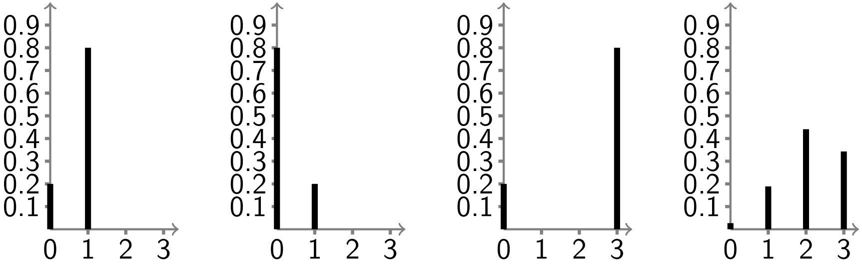


Figura:



São os gráficos das funções de probabilidade correspondentes às seguintes distribuições:

valor	0	1
prob.	0,2	0,8

valor	0	1
prob.	0,8	0,2

valor	0	3
prob.	0,2	0,8

valor	0	1	2	3
prob.	0,027	0,189	0,441	0,343

Figura: Quatro exemplos de gráfico de função de probabilidade.

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$(0,3)^2$	$0,7 \cdot 0,3$
1	$0,3 \cdot 0,7$	$(0,7)^2$

y	$P[X_2 = y]$
0	0,3
1	0,7

x	0	1
$P[X_1 = x]$	0,3	0,7

A partir da distribuição conjunta calcula-se a distribuição da variável aleatória $Y = X_1 + X_2$:

y	0	1	2
$P[Y = y]$	$(0,3)^2$	$2(0,7 \cdot 0,3)$	$(0,7)^2$

Y / X_3	0	1	2
0	$(0,3)^3$	$2 \cdot 0,7(0,3)^2$	$(0,7)^2 \cdot 0,3$
1	$(0,3)^2 \cdot 0,7$	$2(0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

x	$P[X_3 = x]$
0	0,3
1	0,7

y	0	1	2
$P[Y = y]$	$(0,3)^2$	$2(0,7 \cdot 0,3)$	$(0,7)^2$

A partir da distribuição conjunta calcula-se a distribuição de $V = X_1 + X_2 + X_3$:

v	0	1	2	3
$P[V = v]$	$(0,3)^3$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

X_4 \ V	0	1	2	3
0	$(0,3)^4$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^3$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$(0,7)^3 \cdot 0,3$
1	$(0,3)^3 \cdot 0,7$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^3 \cdot 0,3$	$(0,7)^4$

x	$P[X_4 = x]$
0	0,3
1	0,7

v	0	1	2	3
$P[V = v]$	$(0,3)^3$	$3 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^2$	$3 \cdot (0,7)^2 \cdot 0,3$	$(0,7)^3$

Temos abaixo a tabela da distribuição de $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$:

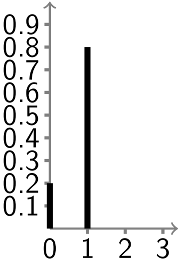
w	0	1	2	3	4
$P[W = w]$	$(0,3)^4$	$4 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^3$	$6 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$	$4 \cdot (0,7)^3 \cdot 0,3$	$(0,7)^4$

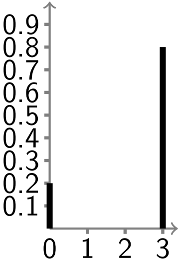
Aviso sobre os exemplos a seguir. *Os exemplo o convidam a confirmar o fato que alega que a distribuição de qualquer variável aleatória, que assume dois valores, pode ser replicada por uma variável aleatória de Bernoulli após que essa passa por transformação linear apropriada. Ao passar por exemplos, você aprende como achar tais transformações lineares.*

Também, deve ser dito explicitamente que fazer os exemplos ajuda a conceber a modificação que ocorre com a cara da distribuição de uma variável aleatória em resposta à transformação linear nela aplicada. Essa concepção será útil na hora do estudo de variáveis aleatórias normais. O ponto aquí é que o tratamento rigoroso de variáveis normais exige um profundo conhecimento do Cálculo, e, portanto, é saudável que tal tratamento seja subsituído por explicações intuitivas adquiridas por meus leitores em seus estudos de variáveis discretas.

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias por exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

Ao lado esquerdo, desenhei a função de probabilidade para a variável aleatória $X \sim Bernoulli(0,8)$. Ao lado direito, fica o desenho da a função de probabilidade de variável aleatória chamada de Y; ela não é de Bernoulli. Pergunta-se: podemos transformar X em Y?

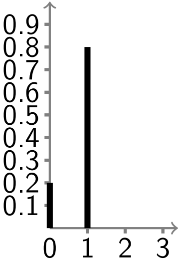


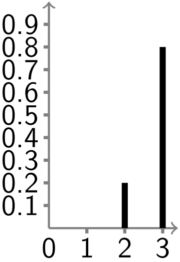


Resposta: $3X = Y$.

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias por exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

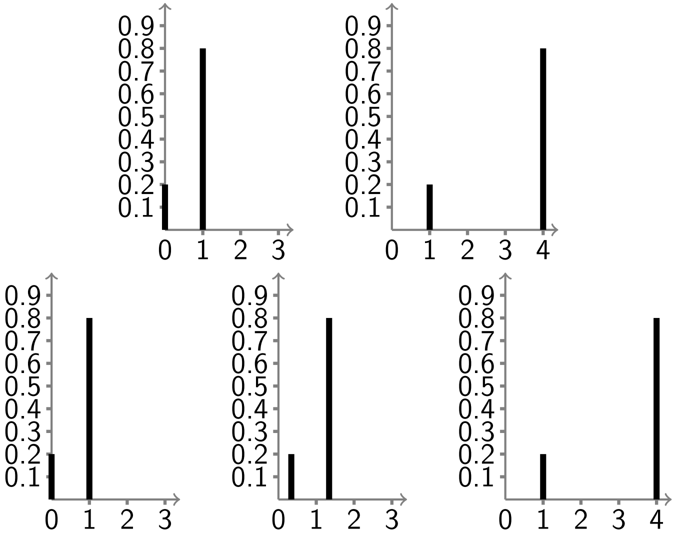
Ao lado esquerdo, desenhei a função de probabilidade para a variável aleatória $X \sim Bernoulli(0,8)$. Ao lado direito, fica o desenho da a função de probabilidade de variável aleatória chamada de Z; ela não é de Bernoulli. Pergunta-se: podemos transformar X em Z?





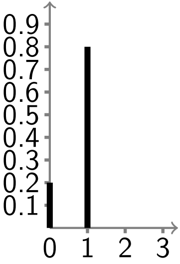
Resposta: $X + 2 = Z$.

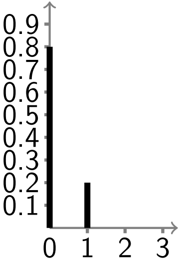
Aprendendo transformações de variáveis aleatórias por exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

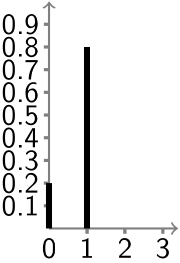


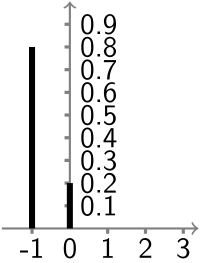
X $\qquad$ $X + 1/3$ $\qquad$ $(X + 1/3) \times 3 = 3X + 1 = W$

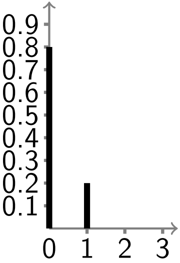
Aprendendo transformações de variáveis aleatórias por exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli





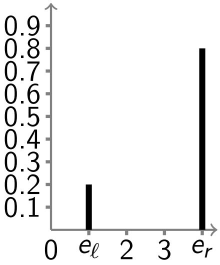






X $\qquad$ $(-1) \times X$ $\qquad$ $(-1) \times X + 1 = 1 - X = U$

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias com auxílio de exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli



De modo geral: se uma variável aleatória V assume dois valores e_ℓ e e_r (o *e*xtremo ℓeft e o *e*xtremo *r*ight) e se deseja-se que o valor 0 de variável aleatória Bernoulli(p) viage para e_ℓ enquanto que o valor 1 viage para e_r, então o *d*eslocamento da variável aleatória de Bernoulli por d e a *m*ultiplicação dela por m devem satisfazer ao sistema

$$\begin{cases} (0+d)m = e_\ell \\ (1+d)m = e_r \end{cases}$$

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias com auxílio de exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

A solução é $m = e_r - e_\ell$ e $d = e_\ell/(e_r - e_\ell)$.

Verificamos para o caso específico acima:
Como $e_\ell = 1$ e $e_r = 4$, então $m = 4 - 1 = 3$ e $d = \frac{1}{4-1} = 1/3$.
A variável aleatória de Bernoulli$(0,8)$ deve então passar pela transformação $\left(X + \frac{1}{3}\right) \times 3$, o que é a mesma coisa que $3X + 1$.
Verificaremos que esta transformação atende as nossas planos:
Se$X = 0$ então $3X + 1 = 3 \times 0 + 1$=1, enquanto que se

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias com auxílio de exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

Observação 1. Como mostra o último exemplo, há dois caminhos de transformação da variável aleatória de Bernoulli que a levam coincidir com uma variável aleatória escolhida a nosso gosto (com a unica condição de que a variável aleatória esolhida assuma somente dois valores). Matematicamente elas dão na mesma, mas admitem interpretações diferentes; em termos do exemplo, tais interpretações são assim: $\left(X + \frac{1}{3}\right) \times 3$ significa deslocar a variável aleatória X à direita por $1/3$ e depois esticar 3 vezes; já $3X + 1$ significa que X deve ser esticada 3 vezes e depois deslocada por 1 unidade à direita.

Aprendendo transformações de variáveis aleatórias com auxílio de exemplos que envolvem variáveis de Bernoulli

Observação 2. Se escolhemos uma variável aleatória qua assume dois valores e_ℓ e e_r com as respectivas probabilidades p e $1-p$, então ela pode ser "produzida" tanto a partir da variável aleatória $X \sim Bernoulli(p)$ quanto da variável aleatória $Y \sim Bernoulli(1-p)$. Nós não vimos esse fato em termos de exemplo, mas ele é óbvio pois a variável aleatória $Y \sim Bernoulli(1-p)$ pode ser produzida a partir da variável aleatória $X \sim Bernoulli(p)$.

Diferenca entre duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e diferença entre duas variáveis aleatórias idênticas.

Os alunos frequentemente confundem

$$X + X$$

com

$$X + Y, \text{ onde } Y \text{ é independente de } X \\ \text{e tem a mesma distribuição que X}$$

Vou explicar a diferença empregando as variáveis aleatórias de Bernoulli, pois a simplidade delas permite expor a mencionada diferença com transparência .

Diferenca entre duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e diferença entre duas variáveis aleatórias idênticas.

(1) Suponha que fui contratado para trabalhar numa empresa e que fui avisado que meu salário será 100 ou 200 unidades monetárias (u.m.) e que isso depende do faturamento da empresa. Foi ainda me dito que a empresa fatura mal com a probabilidade $0,3$ e que fatura bem com a probabilidade $0,7$. Vamos denotar meu salário pela variável aleatória X. Então, sobre ela sabemos que

salário	100	200
probabilidade	0.3	0.7

Suponha que minha esposa tem o mesmo contrato (com os mesmos valores e as mesmas probabilidades respectivas), **mas numa outra empresa**, cujo faturamento não depende do da empresa onde eu trabalho. Denotamos por variável aleatória Y.

Diferenca entre duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e diferença entre duas variáveis aleatórias idênticas.

Sabemos sobre a Y que
(a) Y e X são independentes;
(b) Y tem a mesma distribuição que X, quer dizer a distribuição mostrada na tabela acima.
O faturamento acumulado da família expressa-se por

$$X + Y$$

e tem a distribuição

fatur. acumulado	200	300	400
probabilidade	$(0,3)^2$	$2(0,7 \cdot 0,3)$	$(0,7)^2$

Diferenca entre duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e diferença entre duas variáveis aleatórias idênticas.

(2) Suponha que fui contratado para trabalhar numa empresa e que fui avisado que meu salário será 100 ou 200 unidades monetárias (u.m.) e que isso depende do faturamento da empresa. Foi ainda me dito que a empresa fatura mal com a probabilidade $0,3$ e que fatura bem com a probabilidade $0,7$. Vamos denotar meu salário pela variável aleatória X. Então, sobre ela sabemos que

salário	100	200
probabilidade	0.3	0.7

Suponha que minha esposa tem o mesmo contrato **na mesma empresa**. Assim como no caso **(1)**, a distribuição do salário da esposa dá-se pela A variável aleatória adequada para denotar o salário da esposa é X, pois ela recebe o mesmo valor que eu, para tods os valores possiveis de meu salário.

Diferenca entre duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e diferença entre duas variáveis aleatórias idênticas.

O faturamento acumulado da família expressa-se por

$$X + X \quad \text{equivalentemente} \quad 2X$$

(mas a notação $2X$ obscura e dificulta a comparação com $X + Y$)
e $X + X$ tem a distribuição

fatur. acumulado	200	400
probabilidade	0.3	0.7